3. ZP – 22.5.

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

Vhodné komentáře vám mohou zachránit body i v případě, že ve výpočtu máte numerické chyby nebo nestihnete dokončit.

---

1. [5b] Je dána funkce

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^4 + y^3}\,.$$

(a) zdůvodněte podrobně, že f je spojitá ve svém definičním oboru
(b) spočítejte v bodě $(1,1)$ derivaci ve směru vektoru $(-1,-2)$
(c) spočítejte (přímo z definice) parciální derivace v bodě $(0,0)$; rozhodněte, zda má funkce v počátku totální diferenciál

---

2. [5b] Je dána funkce

$$f(x,y,z) = xyz - 3x - 6y - 3z\,.$$

(a) určete, zda je f omezená v $\mathbb{R}^3$
(b) vyšetřete lokální extrémy (nápověda: zkuste kořen ± 1)

---

3. [5b] Uvažujte funkci

$$f(x,y) = x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 + z^2$$
$$\text{na množině } M := \{x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}.$$

(a) zdůvodněte podrobně existenci globálních extrémů
(b) vyšetřete extrémy uvnitř M
(c) vyšetřete extrémy na hranici M

1. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^4+y^3}$

(a) složení fcí $(x,y) \longmapsto x^4+y^3$ (polynom – spojitý)

$t \longmapsto \sqrt[3]{t}$ (spojité v $\mathbb{R}$)

(b) $\underset{\sim}{a} = (1,1)$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{v}}(\underset{\sim}{a}) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[f(\underset{\sim}{a}+t\underset{\sim}{v}) - f(\underset{\sim}{a})\right]$

$\underset{\sim}{v} = (-1,-2)$

$$\frac{1}{t}\left[\sqrt[3]{(1-t)^4+(1-2t)^3} - \sqrt[3]{2}\right] \;=\; \underset{0/0}{\text{l'Hosp.}} \qquad \left(\sqrt[3]{t}\right)' = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{t}\right)^2}$$

$$\frac{1}{1}\cdot\left[\frac{1}{\left(\sqrt[3]{(1-t)^4+(1-2t)^3}\right)^2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\underbrace{\left((1-t)^4+(1-2t)^3\right)'}_{4(1-t)^3+3(1-2t)^2}\right]$$

$$\to 1\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(4\cdot 0+3\right) = \boxed{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}$$

(c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[f(t,0)-f(0,0)\right]$

$$\frac{1}{t}\left[\underbrace{\sqrt[3]{t^4}}_{=t\sqrt[3]{t}} - 0\right] = \sqrt[3]{t} \to \boxed{0}; \; t\to 0$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[f(0,t)-f(0,0)\right]$

$$\frac{1}{t}\left[\sqrt[3]{t^3} - 0\right] = 1 \to \boxed{1}; \; t\to 0.$$

kandidát: $df(\underset{\sim}{0}) = L$; $L: (u,v) \longmapsto v$

ověření:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{f(u,v) - f(0,0) - L(u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0$$

$$\frac{\sqrt[3]{u^4+v^3} - v}{\sqrt[2]{u^2+v^2}} \quad ; \quad \begin{aligned} u &= r_n \cos\varphi_n \\ v &= r_n \sin\varphi_n \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} &r_n \to 0+ \\ &\{\varphi_n\} \text{ -- libovolné} \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt[3]{r_n^3 \cdot r_n \cos^4\varphi_n + r_n^3 \sin^3\varphi_n} - r_n \sin\varphi_n}{\sqrt[2]{r_n^2\cos^2\varphi_n + r_n^2 \sin^2\varphi_n}}$$

$$= \sqrt[3]{\underbrace{r_n \cos^4\varphi_n}_{\in[0, r_n]} + \sin^3\varphi_n} - \sin\varphi_n = A_n$$

$$\begin{aligned} 0 \le A_n &\le \sqrt[3]{r_n + \sin^3\varphi_n} - \sin\varphi_n \\ &= \sqrt[3]{r_n + \sin^3\varphi_n} - \sqrt[3]{\sin^3\varphi_n} \\ &\le \sqrt[3]{r_n} \to 0. \end{aligned}$$

---

variante (sporem) $A_n \not\to 0$; $\exists$ podposl. $A_n \to a \neq 0$

navíc $\sin^3\varphi_n \to \theta$

$A_n \to \sqrt[3]{0+\theta^3} - \theta = 0$; spor.

2. $f = xyz - 3x - 6y - 3z$

$\partial_x f = yz - 3$

$\partial_y f = xz - 6$

$\partial_z f = xy - 3$

$yz = 3$

$xz = 6$

$xy = 3$

$x, y, z \neq 0$

$(1:3) \to \quad x = z$

$(1:2) \to \quad x = 2y$

$3: \quad xy = 2y^2 = 3$

$y = \pm\sqrt{3/2}$

podezřelé body $\left(2\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 2\sqrt{3/2}\right) =: A$

$\left(-2\sqrt{3/2}, -\sqrt{3/2}, -2\sqrt{3/2}\right) =: B$

$$D^2 f = \begin{pmatrix} 0, & z, & y \\ z, & 0, & x \\ y, & x, & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^2 f(A) = \sqrt{3/2}\,\underbrace{\begin{pmatrix} 0, & 2, & 1 \\ 2, & 0, & 2 \\ 1, & 2, & 0 \end{pmatrix}}_{M}$$

char. polynom $\chi(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda - 8 = (\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda - 8)$

indefinitní

sedlový bod.

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{33}}{2}$ <0, >0

Pozn.: užitečné triky z LA:

A.. matice

$k \in \mathbb{R}$.. konstanta

λ je vl. číslo $A \iff k\lambda$ je vl. číslo kA.

Dále: $\{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$ vl. čísla A

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$\mathrm{tr}\, A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_n$$

„stopa A" .. součet diagonály

Zde: $$\Pi = \begin{pmatrix} 0, 2, 1 \\ 2, 0, 2 \\ 1, 2, 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \Pi = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 8$$

$$\mathrm{tr}\, \Pi = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_i \neq 0 \ \forall i$$

$$\exists \lambda_i > 0, \lambda_j < 0$$

sedlový bod.

3. $f = x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 + z^2$

$M = \{ x^2+y^2+z^2 \le 1 \}$

(a) f spojité (polynom)

M omezené ($|x|, |y|, |z| \le 1$)

uzavřené: $M = \varphi^{-1}((-\infty, 1])$

$\varphi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ (spojité)

M kompaktní $\Rightarrow \exists$ glob. extr.

(b) vnitřek: $\{x^2+y^2+z^2 < 1\}$

podezřelé body: $\nabla f = \underline{0}$

$\partial_x f = 2x - \sqrt{3}y$

$\partial_y f = 2y - \sqrt{3}x$

$\partial_z f = 2z$

glob. minimum

(3) $\to z = 0$ $\quad A = (0,0,0)$; $f(A) = 0$. min

(1&2) $\to x = y = 0$.

(c) vázaně vůči hranici $\Gamma = \{ \underbrace{x^2+y^2+z^2-1}_{g} = 0 \}$

podezřelé: • $\nabla g = \underline{0}$

$\nabla g = (2x, 2y, 2z) \neq \underline{0}$ všude na Γ

$\emptyset$

• $\nabla f = \lambda \nabla g$

$$2x - \sqrt{3}\,y = 2\lambda x$$
$$2y - \sqrt{3}\,x = 2\lambda y$$
$$2z = 2\lambda z$$

(3) — $z \neq 0$: $\boxed{\lambda = 1}$; (1)&(2): $x = y = 0 \Rightarrow z = \pm 1$

$(0, 0, \pm 1)$ spor ~~ϕ~~

$f = 1$ min

$\boxed{z = 0:}$ (1) $\to$ $\lambda = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{y}{x}$

(2) $\to$ $\lambda = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{x}{y}$

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{y} \iff x^2 = y^2$$
$$\boxed{|x| = |y|}$$

podezřelé $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. $f =$

max $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ $f = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ max

~~min $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$~~ $f = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ min