7. TERMÍN – 22.9.2009

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte všechny použité výpočty.

---

1. [**7b**] Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k!}{(1+k^a)(2+k^a)\dots(k+k^a)} \right)^{\frac{1}{4}}$$

pro všechny hodnoty reálného parametru a.

Návod: $\lim_{y\to 0} y^{-1}\big((1+y)^b - 1\big) = b.$

---

2. [**7b**] Nalezněte obecné řešení rovnice

$$x^3 y''' - 2xy' = 8 \ln^2 |x|.$$

Návod: $\big(z(\ln|x|)\big)''' = x^{-3}[z'''(\ln|x|) - 3z''(\ln|x|) + 2z'(\ln|x|)].$

---

3. [**9b**] Je dána funkce

$$f(x,y) = \frac{(x^2-y^2)\sqrt[3]{x+2y}}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{1-x}, \qquad (x,y) \neq (0,0),\ x \neq 1.$$

(a) dodefinujte funkci spojitě v bodě $(0,0)$ a následně:
(b) vypočítejte $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$
(c) vysvětlete podrobně, co znamená $df(0,0)$ a rozhodněte, zda existuje

---

4. [**9b**] Je dána funkce

$$f = x^2 + xy + y^2 - z^2$$

na množině

$$M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \leq 4\right\}.$$

(a) zdůvodněte podrobně existenci globálních extrémů
(b) vyšetřete extrémy *uvnitř* M
(c) vyšetřete extrémy *na hranici* M
(d) *[BONUS +1b] dopočtěte, který z podezřelých bodů je extrém.*

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{k!}{(1+k^a)(2+k^a)\cdots(k+k^a)}\right)^{1/4}}_{b_k}$

[7b]

(i) $a \leq 0$: $\quad k^a \leq 1 \quad \forall k$

$$(1+k^a)(2+k^a)\cdots(k+k^a) \leq 2\cdot 3 \cdots (k+1)$$

$$b_k \geq \left(\frac{k!}{2\cdots k+1}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{k+1}\right)^{\frac{1}{4}} \sim \frac{1}{k^{1/4}};$$

diverguje

(ii) $1+k^a > k^a$; tedy $\quad b_k \leq \left(\dfrac{k!}{(k^a)^k}\right)^{\frac{1}{4}} =: c_k$

podílové kritérium:

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{k+1}{(k+1)^{a(k+1)}} \cdot k^{ak} = \underbrace{\left(\frac{k}{k+1}\right)^{ka}}_{\to e^{-a}} \cdot \underbrace{(k+1)^{1-a}}_{\to 0 \text{ pro } a>1}$$

(známá limita)

$\Rightarrow$ konverguje pro $a > 1$.

(iii) $a>0$ obecné

$$b_k = \left(\frac{1\cdot 2 \cdot \cdots k}{(1+k^a)(2+k^a)\cdots(k+k^a)}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \left(\frac{1}{(1+k^a)\left(1+\frac{k^a}{2}\right)\cdots\underbrace{\left(1+\frac{k^a}{k}\right)}_{\geq 1}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{k^a\cdot\frac{1}{2}k^a\cdot\frac{1}{3}k^a\cdot\frac{1}{4}k^a\cdot\frac{1}{5}k^a}\right)^{\frac{1}{4}} \leq \left(\frac{c}{k^{5a}}\right)^{\frac{1}{4}} \sim \frac{1}{k^{\frac{5a}{4}}}$$

$\Rightarrow$ konverguje pro $a>4/5$

– analogicky pro libovolné $a>0$.

$[+6]$

(2) $x^3 y''' - 2x y' = 8\ln^2|x|$.

Eulerova rce: $y(x) = z(\ln|x|)$

$$y'(x) = z'(\ln|x|)\cdot\frac{1}{x} \qquad [1]$$

$$y''(x) = z''(\ln|x|)\cdot\frac{1}{x^2} - z'(\ln|x|)\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$= \left[z''(\ln|x|) - z'(\ln|x|)\right]\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$y'''(x) = \left[z'''(\ln|x|) - z''(\ln|x|)\right]\cdot\frac{1}{x^3}$$

$$\left[z''(\ln|x|) - z'(\ln|x|)\right]\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

$$= \left[z'''(\ln|x|) - 3z''(\ln|x|) + 2z'(\ln|x|)\right]\cdot\frac{1}{x^3}$$

$$z'''(\ln|x|) - 3z''(\ln|x|) = 8\ln^2|x| ;$$

$$z'''(t) - 3z''(t) = 8t^2 . \qquad [1]$$

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 3)$$

F.S.: $\{1, t, e^{3t}\}$.

$$z_h(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^{3t} . \qquad [1]$$

$$r_p = (At^2 + Bt + C)t^2 = At^4 + Bt^3 + Ct^2 \qquad [1]$$

$$r_p' = 4At^3 + 3Bt^2 + 2Ct$$

$$r_p'' = 12At^2 + 6Bt + 2C$$

$$r_p''' = 24At + 6B$$

$$24A\cdot t + 6B - 3\left(12A\cdot t^2 + 6B\cdot t + 2C\right) = 8t^2$$

$$t^2 : \quad -36A = 8 \qquad\qquad A = -\frac{8}{36} = \frac{-2}{9}$$

$$t : \quad 24A - 18B = 0 \qquad\qquad B = \frac{24}{18}A = -\frac{2\cdot 24}{9\cdot 18} = \frac{-8}{27}$$

$$1 : \quad 6B - 6C = 0 \qquad\qquad B = C$$

$$r_p = -\frac{2}{9}t^4 - \frac{8}{27}\left(t^3 + t^2\right). \qquad [2]$$

$$y_{obec} = C_1 + C_2 \ln^2|x| + C_3|x|^3 - \frac{2}{9}\ln^4|x|$$

$$- \frac{8}{27}\left(\ln^3|x| + \ln^2|x|\right)$$

$$x \in (0, +\infty)$$

$$x \in (-\infty, 0). \qquad [1]$$

③ [9b]

$$f(x,y) = \frac{(x^2-y^2)\sqrt[3]{x+2y}}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{1-x} \quad ; \ (x,y) \neq (0,0) \quad x \neq 1.$$

(a) spojitost v $(0,0) \iff f(0,0) = \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)}_{\text{pokud existuje}}$. [1]

polární souřadnice
& Heineho věta

$x = r_n \cos\varphi_n$ $\qquad$ $r_n \to 0;\ r_n > 0$

$y = r_n \sin\varphi_n$ $\qquad$ ... $\{\varphi_n\}$ libovolné. [1]

$$f = \frac{(r_n^2\cos^2\varphi_n - r_n^2\sin^2\varphi_n)\sqrt[3]{r_n\cos\varphi_n + 2r_n\sin\varphi_n}}{\sqrt{r_n^2\cos^2\varphi_n + r_n^2\sin^2\varphi_n}} - \frac{1}{1-r_n\cos\varphi_n}$$

$$= \underbrace{\frac{r_n^2 \cdot \sqrt[3]{r_n}}{r_n}}_{= r_n^{4/3} \to 0} \cdot \underbrace{(\cos^2\varphi_n - \sin^2\varphi_n)\sqrt[3]{\cos\varphi_n + 2\sin\varphi_n}}_{\text{omezené}} - \frac{1}{1-\underbrace{r_n\cos\varphi_n}_{\to 0}}$$

$\to -1$

Klademe $f(0,0) := -1$. [1]

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[f(t,0) - f(0,0)\right]$$

$$\frac{1}{t}\left[f(t,0) - f(0,0)\right] = \frac{1}{t}\left[\frac{t^2\sqrt[3]{t}}{\sqrt{t^2}} - \frac{1}{1-t} + 1\right]$$

$$= \underbrace{\frac{t}{|t|}}_{\text{omezené}} \underbrace{\sqrt[3]{t}}_{0} + \underbrace{\frac{-1+1-t}{(1-t)t}}_{= \frac{-1}{1-t} \to -1} \to -1 \qquad [1]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[f(0,t) - f(0,0)\right]$$

$$\frac{1}{t}\left[f(0,t) - f(0,0)\right] = \frac{-t^2\sqrt[3]{2t}}{t|t|} \to 0. \qquad [1]$$

Kandidát na $df(0,0)$: $L(u,v) \mapsto -u$.

ověření: $$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left[f(u,v) - L(u,v) - f(0,0)\right]} = 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left[\frac{(u^2-v^2)\sqrt[3]{u+2v}}{\sqrt{u^2+v^2}} - \frac{1}{1-u} + u + 1\right].$$

[2]

1. část (polární souř $u = r\cos\varphi$
$v = r\sin\varphi$

$$\underbrace{\frac{r^2}{r\cdot r}}_{1}\underbrace{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}_{\text{omezené}}\underbrace{\sqrt[3]{r\cos\varphi + 2r\sin\varphi}}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

2. část: $$\frac{-1}{1-u} + u + 1 = \frac{1}{1-u}\left(-1+1-u^2\right)$$

$$= \frac{-u^2}{1-u}$$

$$\frac{-u^2}{(1-u)\sqrt{u^2+v^2}} = \underbrace{-u}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{1}{1-u}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}}_{\leq 1} \longrightarrow 0.$$

$\Rightarrow \quad \exists\ df(0,0).$ [2]

④ $f = x^2 + xy + y^2 - z^2$

$M = \{ g(x,y,z) \leq 4 \}$; kde

$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

(a) M omezená: $|x|, |y|, |z| \leq 2$

uzavřená: $g^{-1}((-\infty, 4])$; $(-\infty, 4]$ uzavřené

$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ spojitá

(polynom..)

f .. spojitá (polynom)

$\Rightarrow \exists$ globální extrémy [1]

(b) uvnitř: $(g < 4)$: nutné podmínka

$$\nabla f = \underset{\sim}{0} : \quad \begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ x + 2y &= 0 \\ -2z &= 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{|l} 1 \\ -2 \\ \end{array}$$

$z = 0$;

$-3y = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = 0$.

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0 \\ 1, & +2, & 0 \\ 0, & 0, & -2 \end{pmatrix}$$

Silvestr: $\sigma \begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 1, & +2 \end{pmatrix} = \{+\lambda_1, \lambda_2\}$

$\to$ Sedlový bod ... [3]

$\Rightarrow$ uvnitř $\nexists$ (ani lokální) extrémy

(c) hranice : podezřelé body (α) $\nabla g = 0$

$(g=4)$ (β) $\nabla f = \lambda \nabla g$

(α) $\nabla g = (2x, 2y, 2z) = \underset{\sim}{0}$

pouze v počátku $\notin$ hranice [1]

(β) $\nabla f = \lambda \nabla g$:

$$2x + y = 2\lambda x$$
$$x + 2y = 2\lambda y$$
$$-2z = 2\lambda z$$

{3. rce} $0 = 2z(1+\lambda)$

(i) $z = 0$: musí $x, y \neq 0$

(jinak spor s $g=4$).

{1. & 2. rce:} $x = ky$

$$2ky + y = 2\lambda k y$$
$$ky + 2y = 2\lambda y$$

$$2k + 1 = 2\lambda k$$
$$k + 2 = 2\lambda \quad \Big| \cdot (-k)$$

$$2k + 1 - k^2 - 2k = 0.$$
$$k^2 = 1 \; ; \; k = \pm 1.$$

$x = y$: $\quad 2x^2 = 4.$

$\varrho = 0.$ $\quad x = \pm\sqrt{2}$

$A = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \qquad f = 6$

$B = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0) \qquad f = 6$

$x = -y$:

$C = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0) \qquad f = 4$

$D = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \qquad f = 4$ $\qquad$ [2]

(ii) $\varrho \neq 0$: $\lambda = -1$:

1. & 2. rce: $\quad 2x + y = -2x \quad : \quad 4x + y = 0$

$\qquad x + 2y = -2y \qquad x + 4y = 0$

jediné řešení $(x, y) = (0, 0)$.

$E = (0, 0, 2) \qquad f = -4$

$F = (0, 0, -2) \qquad f = -4$ $\qquad$ [2]

Závěr: E, F ... globální minima

A, B ... globální maxima..

[+bonus 1b].