5. TERMÍN – 11.9.2012

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty!

---

1. [**7b**] Je dána řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\sqrt[k]{1+\sqrt{k}}-1\right)$$

Vyšetřete, zda řada konverguje a zda absolutně konverguje.

---

2. [**8b**] Uvažujte rovnici:

$$2\sqrt{xy}+y=xy'$$

(i) pro která x, y má rovnice smysl ?
(ii) nalezněte *maximální* nenulová řešení – pozor na rozlišení $x>0$ a $x<0$!
(iii) je možné tato řešení prodloužit? Odůvodněte podrobně!

---

3. [**7b**] Uvažujte funkci

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & (x,y)=(0,0)\\ \sqrt[3]{\frac{x^2y}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

(i) Dokažte podrobně, že funkce je spojitá v počátku.
(ii) Vypočítejte parciální derivace v počátku (z definice).
(iii) Rozhodněte, zda v počátku existuje totální diferenciál. Pokud ano, jaký je jeho přesný tvar?

---

4. [**10b**] Uvažujte funkci $f=-x^2-2y^2+y$ na množině $M\subset\mathbb{R}^2$, zadané podmínkami

$$M=\left\{x^2+y^2\geq 1\right\}\cap\left\{x+y\geq 0\right\}$$

(o) načrtněte, jak množina M vypadá
(i) vyšetřete lokální extrémy *uvnitř* M
(ii) určete body podezřelé z extrémů *na hranici* M
(iii) co lze říci o existenci či neexistenci *globálních* extrémů?

body P5:

1) (i) ABS. KONV. řádové rovn. 2

odhad $\frac{1}{2}$ 2

(ii) Leibniz monotonie 2

závěr 1 (7)

---

2) (i) $\exists y \equiv 0$ 1

(ii) obecné 4

různo z def oboru

(iii) řešení 3 (8)

---

3) (i) 2 ~~1.5~~

(ii) 2

(iii) 3 ~~2.5~~ [7]

---

4) (0) 1

(i) vnitrní? 1.5

(ii) hroty 1.5

přímka? 1.5

kruh 2.5

---

globální 2 [10]

1| $\sum a_k$; $a_k = (-1)^k \left(\sqrt[k]{1+\sqrt{k}} - 1 \right)$

(i) absolutní konvergence?

$|a_k| = e^{b_k} - 1$; $b_k = \frac{1}{k} \ln(1+\sqrt{k})$

$b_k \to 0$; např. l'Hospital: $\frac{\infty}{\infty}$

$$\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x} \ldots \frac{\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}}{1} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} \to 0.$$

$b_k > 0$; $\forall k \geq 1$:

navíc: $\frac{e^y - 1}{y} \to 1$, $y \to 0$

$\Rightarrow |a_k| \sim b_k$; tedy $\sum |a_k|$ konv.

$\Leftrightarrow \sum b_k$ konv.

$b_k \geq \frac{\ln 2}{k}$; $\sum \frac{1}{k}$ div.

tedy $\sum |a_k| = +\infty$;

řada nekonverguje absolutně.

konverguje neab?

(ii) konvergence: $a_k = (-1)^k c_k$;

$c_k = e^{b_k} - 1 \to 0$;

? stačí: monotonie:

stačí pro $\{b_k\}$, neboť e^y je monotónní fce

$b_k = f(k)$; $f(x) = \dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{x}$;

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\left[\frac{x}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} - \ln(1+\sqrt{x})\right]$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[\frac{\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})} - \ln(1+\sqrt{x})\right]$$

$\frac{1}{x^2} > 0$, $\frac{\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})} \to \frac{1}{2}$, $\ln(1+\sqrt{x}) \to +\infty$

tedy $[\;] < 0$, $f'(x) < 0$ pro x velké

$b_k = f(k)$ klesá!

Závěr: $\sum a_k$ konverguje (Leibniz)

2| $2\sqrt{xy} + y = xy'$;

(i) má smysl pro $xy \geq 0$; tj. $x \geq 0, y \geq 0$

nebo $x \leq 0, y \leq 0$

$y \equiv 0$; $x \in \mathbb{R}$ je (maximální) řešení.

(ii) $x \in (0, +\infty)$; $y > 0$:

položme $y = xz$; tj. musíme $z > 0$

$y' = z + xz'$

$$2\sqrt{x^2 z} + \cancel{xz} = x(\cancel{z} + xz')$$

$$2\underbrace{|x|}_{=x}\sqrt{z} = x^2 z'$$

$$\frac{1}{x} = \frac{z'}{2\sqrt{z}}$$

$$\ln|x| - c = \sqrt{z} > 0$$

$\ln|x| > c$

$|x| > e^c$; tj. $x \in I_c = (e^c, +\infty)$

máme $\underline{x > 0}$ $z = (\ln|x| - c)^2$

$$\underline{y = x(\ln|x| - c)^2.}$$

(ii) – případ $x, y < 0$.

$y = xr$; opět $r > 0$.

$$2\sqrt{x^2 r} + xr = x(r + xr')$$

$$2|x|\sqrt{r} = x^2 r' \quad ; \quad |x| = -x$$

$$-\frac{1}{x} = \frac{r'}{2\sqrt{r}}$$

$$C - \ln|x| = \sqrt{r} > 0$$

$$\ln|x| < C$$

$|x| < e^C$; navíc $x < 0$:

$$x \in J_C = (-e^C, 0)$$

$$r = (C - \ln|x|)^2$$

$$y = x(C - \ln|x|)^2$$

(iii) ANO: v bodech $\pm e^C$: $y \to 0$, $y' \to 0$

lze prodloužit nulou

v bodě $x = 0-$ $y = x(C - \ln|x|)^2$

prodloužit NELZE: $y \to 0 \Rightarrow y(0) = 0$;

ale $y'_-(0) = +\infty$

$$= \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x}\left(x(C - \ln|x|)^2 - 0\right)$$

3) (ii) spojitost v $(0,0)$ ekvivalentní:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

Heine: $x = r_n \cos \varphi_n$ $\quad r_n \to 0,\ > 0$

$y = r_n \sin \varphi_n$ $\quad \{\varphi_n\}$ libovolné

$$f = \sqrt[3]{\frac{r_n^3 \cos^2\varphi_n \sin\varphi_n}{r_n^2\cos^2\varphi_n + r_n^2 \sin^2\varphi_n}} = \sqrt[3]{r_n \cdot \underbrace{\cos^2\varphi_n \sin\varphi_n}_{\text{omezené}}}$$

$\downarrow$

0

OK.

(iii) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \varphi(t)$,

$$\varphi(t) = \frac{1}{t}\left[f(t,0) - f(0,0)\right]$$

$$= \frac{1}{t}\sqrt[3]{\frac{t^2\cdot 0}{t^2+0^2}} = 0 \quad \forall t \neq 0$$

tj. $\varphi = 0$ na $P(0,\delta)$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

podobně $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

(iii) kandidát na $df(0,0)$ je lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(u,v) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot v = 0$$

tj. nulové zobrazení . . .

tvrdíme: $\nexists\, df(0,0)$; neboť např. $\nexists\, \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{v}}(0,0)$;

pro $\underset{\sim}{v} = (1,1)$

ověření:

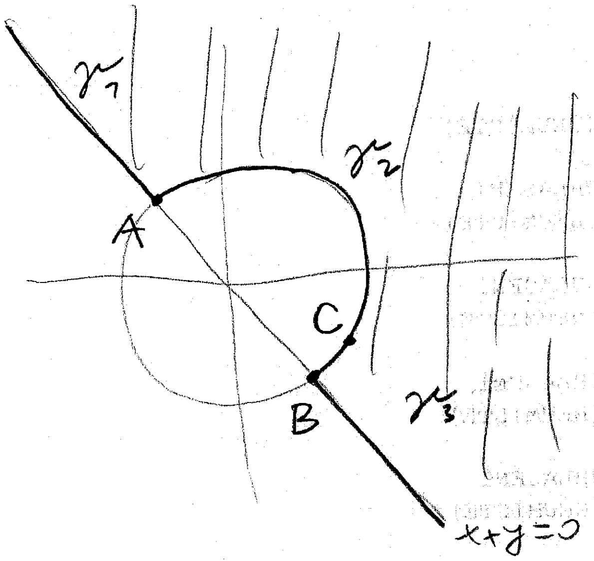
$$\lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{1}{t}\left[f(t,t) - f(0,0)\right]}$$

$$\frac{1}{t}\sqrt[3]{\frac{t^3}{2t^2}} = \sqrt[3]{\frac{t}{2t^3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2t^2}}$$

$\to +\infty$;

$t \to 0$.

4)
$$f = -x^2 - 2y^2 + y$$
$$M = \{x^2+y^2 \geq 1\} \cap \{x+y \geq 0\}$$



(i) vnitřek: $\{x^2+y^2>1\} \cap \{x+y>0\}$

podezřelé: $\nabla f = \underset{\sim}{0}$ nebo $\nabla f \nexists$

ϕ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4y+1 \qquad \nabla f = \underset{\sim}{0} \iff (x,y) = (0, \tfrac{1}{4})$$

neleží uvnitř.

$\Rightarrow \nexists$ vnitřní extrémy

(ii) podezřelé:

(a) hrany: $A = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$: $f = -\frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq -0.8$

$B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$: $f = -\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq -2.2$

(b) extrémy na $x+y=0$

$\nabla f = \lambda \nabla(x+y)$

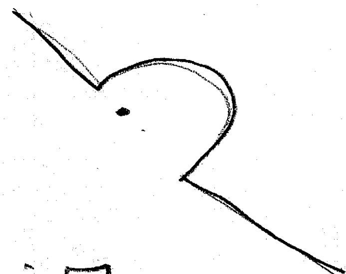
$-2x = \lambda \cdot 1 \quad | +1$

$-4y+1 = \lambda \cdot 1 \quad | -1$

$4y - 2x + 1 = 0 \quad : \quad 6y = 1$

$x = -y$

$(x,y) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$



neleží na hranici Π

(c) extrémy na $x^2+y^2=1$

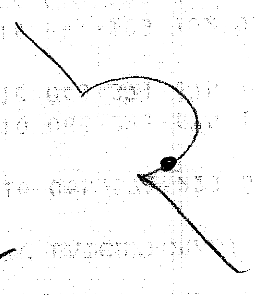
$\nabla f = \lambda \nabla(x^2+y^2-1)$

$-2x = 2\lambda x$

$-4y+1 = 2\lambda y$

1.rce: $\alpha)$ $x=0$: $y=1$: $f=-1$

$\beta)$ $x \neq 0$: $\lambda = -1$



2.rce: $-4y+1 = -2y$

$C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$1 = 2y$

$y = -\frac{1}{2}$;

$x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$f = -\frac{3}{4} = -0.756$

$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 1$

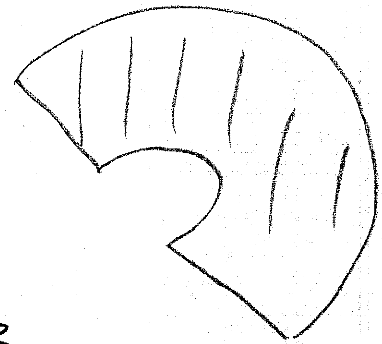
$= -1.2$

(iii) glob. minimum $\nexists$

$(n,0) \in M$; $f = -n^2 \to -\infty$

glob. max? ANO:

$M_R = M \cap \{x^2+y^2 \leq R^2\}$



(omezené, uzavřené

$\exists$ glob. max. f na M_R

$f \to -\infty$; $x^2+y^2 \to \infty$

$\Rightarrow$ $f \leq -10$ pro $M \setminus M_R$

$f(1,0) = -1$

$\Rightarrow$ $\exists$ glob. max. na M

$\to$ musí mezi diskutovanými body

je to $A = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$