1. TERMÍN – 29.5.2012

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

Postup výpočtu se snažte srozumitelně komentovat.

---

1. **[6b]** Je dána mocninná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{k!}{(2+1^a)(2+2^a)\dots(2+k^a)}}\, z^k$$

(a) v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ určete poloměr konvergence řady R

(b) pro všechny hodnoty a, pro něž je R konečné a nenulové, vyšetřete konvergenci (absolutní, neabsolutní) řady v bodech $z = \pm R$

---

2. **[7b]** Nalezněte obecné řešení rovnice

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2(1 + \ln x)$$

v intervalu $x \in (0, +\infty)$.

Existuje řešení, které má *konečnou nenulovou* limitu pro $x \to 0+$? Zdůvodněte.

---

3. **[9b]** Uvažujte funkci

$$f(x,y) = \frac{y}{1 - \sqrt[3]{yx}}$$

(a) Určete $\delta > 0$ tak, že f je definovaná na δ-okolí počátku. Odůvodněte co nejpodrobněji, že f je na tomto okolí spojitá.

(b) Vypočítejte směrovou derivaci $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{w}}(0,0)$, kde $\boldsymbol{w} = (a,b)$ je libovolný (nenulový) vektor.

(c) Má f v počátku totální diferenciál? Pokud ano, jak přesně vypadá?

---

4. **[10b]** Uvažujte funkci $f = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ na množině $M \subset \mathbb{R}^3$, určené podmínkami $xyz = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

(a) rozhodněte, zda je množina M omezená a zda je uzavřená

(b) aplikací vhodné věty identifikujte „body podezřelé z extrému"

(c) pokuste se odůvodnit, zda některý z nalezených bodů je (lokální či globální) extrém

(d) pokud se naopak domníváte, že globální maximum či minimum neexistuje, pokuste se to podrobně odůvodnit

① $\sum c_k x^k$; $c_k = \left(\frac{k!}{(2+1^a)(2+2^a)\cdots(2+k^a)}\right)^{1/3}$.

$$\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \left(\frac{k+1}{2+(k+1)^a}\right)^{1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2}{k+1}+(k+1)^{a-1}}} \to q$$

$a>1$: $q=0 \Rightarrow R=+\infty$

$a=1$: $q=1 \Rightarrow R=1$

$a<1$: $q=+\infty$ $R=0$

$a=1$; $x=+1$: $\sum b_k$; $b_k = \left(\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}{3\cdot 4\cdots k+2}\right)^{1/3}$

$$= \left(\frac{1\cdot 2}{(k+1)(k+2)}\right)^{1/3}.$$

$b_k \sim \frac{1}{k^{2/3}} \Rightarrow \sum b_k$ div

$x=-1$: $\sum (-1)^k b_k$ konv. (Leibniz)

zjevně $b_k \to 0$; klesá $\forall k \geq 1$

tj. (dle předchozího) konverguje neabsolutně.

(2) $\mathcal{E}(y) = x^2(1+\ln x); \quad x \in (0, +\infty)$

$\lambda(\lambda-1) + b\lambda + c$

$\lambda^2 + (b-1)\lambda + c$;

$\chi(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)$

$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 \quad ; \quad b = -2$

$c = 2$

$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2(1+\ln x)$

$y(x) = z(\ln x)$

$y'(t) = \frac{1}{x} z'(\ln x)$

$y'' = z''(\ln x) \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} z'(\ln x)$

$z''(\ln x) - 3z'(\ln x) + 2z(\ln x) = x^2(1+\ln x)$

$e^{2\ln x}$

$z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = e^{2t}(1+t)$

$D = 9 - 8 = 1; \quad \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}; \quad FS\{e^t, e^{2t}\}$.

$z_p = e^{2t}(At^2 + Bt) \longrightarrow \frac{1}{2}t^2 e^{2t}$

$z_p' = e^{2t}(2At^2 + (2A+2B)t + B)$

$y'' = 2e^{2t}(2At^2 + (4A+2B)t + (2B+A))$

$z_p'' = e^{2t}(4At^2 + (8A+4B)t + (4B+2A))$

$y_p \quad \frac{1}{2}x^2 \ln x$

$y \quad Ax^2 + Bx$

(2b)

$$t^2: \quad 4A - 3\cdot 2A + 2A = 0$$

$$t: \quad (8A+4B) - 3(2A+2B) + 2B = 1$$

$$1: \quad 4B + 2A - 3B = 1$$

$$2A = 1 \qquad A = \frac{1}{2}$$

$$2A + B = 1 \qquad B = 0$$

$$\underline{z_p} = \frac{1}{2} t^2 e^{2t}$$

$$y_{obec} = \frac{1}{2} \ln^2 x \cdot x^2 + Ax + Bx^2;$$

$y \to 0;\ x \to 0+$ (nezávisle na A, B)

$\Rightarrow \nexists$ sdružené řešení.

(3) $f = \dfrac{y}{1-\sqrt[3]{xy}}$;

$\delta \in (0,1)$ libovolné: $(x,y) \in \mathcal{U}((0,0),\delta) \Rightarrow$

$|x|, |y| < \delta < 1$

$|\sqrt[3]{xy}| < \sqrt[3]{\delta^2} < 1$

$\Rightarrow$ jmenovatel > 0.

fce $(x,y) \mapsto y,\ xy$ spojité (polynomy)

$z \mapsto \sqrt[3]{z}$ spojité $(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$

$\Rightarrow f$ složení (podíl) spoj. (nenulových) fcí

(b) $w = (a,b) \neq (0,0)$; $\dfrac{\partial f}{\partial w}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \varphi(t)$;

$$\varphi(t) = \frac{1}{t}\left[f(ta,tb) - f(0,0)\right] = \frac{1}{t}\cdot\frac{tb}{1-\sqrt[3]{t^2ab}}$$

$$= \frac{b}{1-\sqrt[3]{t^2ab}} \to \frac{b}{1+0} = \underline{\underline{b}}$$; VoAL; spojitost $\sqrt[3]{\cdot}$.

(c) kandidát na t. d. $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(a,b) \mapsto b$

ověření: $\lim\limits_{(u,v)\to(0,0)} \psi(u,v) \overset{?}{=} 0$; kde

$$\psi(u,v) = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left[f(u,v) - L(u,v) - f(0,0)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left[\frac{v}{1-\sqrt[3]{uv}} - v\right]$$

(3b) $$|\psi| = \underbrace{\frac{|v|}{\sqrt{u^2+v^2}}}_{\text{omezené}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{1-\sqrt[3]{uv}} - 1\right)}_{\to 0\text{; neboť } uv \to 0\cdot 0 = 0.}$$

jinak: polární souřadnice: (Heine)

$u = r_n \cos \varphi_n \qquad r_n > 0,\ \to 0$

$v = r_n \sin \varphi_n \qquad \varphi_n \ \ldots$ libovolné.

$$\psi = \frac{r_n \cdot |\sin \varphi_n|}{\sqrt{r_n^2 \cos^2 \varphi_n + r_n^2 \sin^2 \varphi_n}} \cdot \left(\frac{1}{1-\sqrt[3]{r_n^2 \cos \varphi_n \sin \varphi_n}} - 1\right)$$

$$= \underbrace{|\sin \varphi_n|}_{\text{omezená}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt[3]{r_n^2 \cdot \cos \varphi_n \cdot \sin \varphi_n}}{1 - \sqrt[3]{\cdots}}}_{\to \frac{0}{1-0}} \to 0$$

<u>Věta:</u> omezené $\cdot (\to 0) = \to 0$.

(4) $M = \{g = 0\} \cap \{x, y, z \geq 0\}$

$f = x^2 + 2y^2 + 3z^2$;

$\nabla g = (yz, xz, xy) \neq (0,0,0)$ na M

(nebot $x, y, z \neq 0$ nutně)

$\nabla f = \lambda \nabla g$:

$$2x = \lambda yz$$
$$4y = \lambda xz$$
$$6z = \lambda xy$$

---

jistě vše $\neq 0$; (dokonce > 0)

$1:2 \rightarrow \frac{x}{2y} = \frac{y}{x}$

$y^2 = \frac{1}{2}x^2$

$y = \frac{x}{\sqrt{2}}$

$1:3 \rightarrow \frac{x}{3z} = \frac{z}{x}$

$z^2 = \frac{1}{3}x^2$

$z = \frac{x}{\sqrt{3}}$

body $\left(x, \frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{3}}\right)$; $x^3 = \sqrt{6} = 6^{1/2}$

$x = 6^{1/6}$.

$A = \left(6^{1/6}, \frac{6^{1/6}}{2^{1/2}}, \frac{6^{1/6}}{3^{1/2}}\right)$; $f(A) = \dots$

$\left(n, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \in M$; $f = n^2$ .. shora neomezené

$\Rightarrow$ glob. max. $\nexists$

$M_K = M \cap \{x, y, z \leq K\}$. omez. uz. $\Rightarrow \exists$ glob. min

na $M \setminus M_K$: $\exists$ souř. $> K$: $f > K^2$ ... etc.