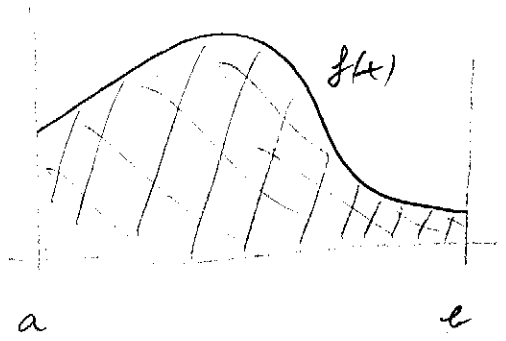


$$\int_a^b f(x)\,dx$$

integrál: definice — Riemannův, Newtonův, Lebesgueův, ⋮

Def. [Newtonův int.]

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx := \Big[F(x)\Big]_a^b \quad ; \quad \text{má-li p.s. smysl}$$

kde $\Big[F(x)\Big]_a^b = \lim\limits_{x\to b-} F(x) - \lim\limits_{x\to a+} F(x)$ (zobecněný přírůstek).

$F(x)$ -- libovolná primitivní funkce k $f(x)$ v (a,b).
(neboli $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a,b)$).

N.i.: není definován: (nemá smysl:)
- $F(x)$
- limity $F(b-)$, $F(a+)$ neexistují
- rozdíl typu $\infty - \infty$

$a, b \in \mathbb{R}$; $F(x)$ spojitá v $[a,b]$...

$$\Big(F(x)\Big)_a^b = F(b) - F(a).$$

Úmluva: $\int_a^b f(x)$ značí Newt. integrál.

$f(x) \in N^*(a,b)$ -- $\int_a^b f$ je definován

$f(x) \in N(a,b)$ -- je def. a je konečný.

Věta 9. 8. [Vlastnosti N. i.]

$f(t), g(t) : (a,b) \to \mathbb{R}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

① $$\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t)\, dx = \alpha \int_a^b f(t)\, dx + \boxed{\beta \int_a^b g(t)\, dx}\,,$$

má-li pravá strana smysl.

② je-li $\boxed{f(t) \text{ spojitá v bodě } c} \in (a,b)$, pak

$$\int_a^b f(t)\, dx = \int_a^c f(t)\, dx + \int_c^b f(t)\, dx\,,$$

má-li p. s. smysl

③ (a) $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(t)\, dx \geq 0$

(b) $f \geq g \Rightarrow \int_a^b f(t)\, dx \geq \int_a^b g(t)\, dx$

(c) $\left| \int_a^b f(t)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dx$; pokud $f, g, |f| \in \mathcal{N}^*(a,b)$.

---

dk.: ① $F(t) \ldots$ p. f. k $f(t)$

$G(t) \ldots$ p. f. k $g(t)$

$\alpha F(t) + \beta G(t) \ldots$ prim. fce k $\alpha f(t) + \beta g(t)$.

$$[\alpha F(t) + \beta G(t)]_a^b = \lim_{x \to b-} \{\alpha F(t) + \beta G(t)\} - \lim_{x \to a+} \{\alpha F(t) + \beta G(t)\}$$

$$= \alpha F(b-) + \boxed{\beta G(b-)} - \{\alpha F(a+) + \beta G(a+)\}$$

aritmetika limit??

↓

mají výrazy smysl?

$$= \alpha \underbrace{\left(F(b-) - F(a+) \right)}_{\int_a^b f} - \beta \underbrace{\left(G(b-) - G(a+) \right)}_{\int_a^b g}$$

dod-N3

? nechť $\beta = 0$; $G(b-) = +\infty$.

$\Downarrow \int_a^b g = +\infty$; $\beta \cdot \int_a^b g$ nemá smysl

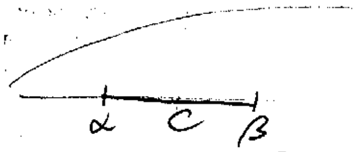
spor.

(2) $F_1(x)$ .. prim. fce $f(x)$ na (a, c)

$F_2(x)$ .. prim. fce $f(x)$ na (c, b).

ukážeme: $F_1(c-)$, $F_2(c+)$ jsou konečné.

klíčový krok:



$f(x)$ majoriz. v $x = c$: $\exists K > 0, \delta > 0$: $|f(x)| \leq K$ na $[x_0-\delta, x_0+\delta]$.

Lemma ?? $[\alpha, \beta]$

$H(x) := F_1(x) + Kx$; $x \in [\alpha, c)$.

$H'(x) = F_1'(x) + K = f(x) + K \geq -|f(x)| + K \geq 0$; $x \in (x_0-\delta, c)$

$H(x)$ .. neklesající ; omezené.

Lagrange: $H(x) - H(\alpha) = H'(\delta) \cdot (x-a)$ $\quad \delta_x \in (\alpha, x)$.

$$H(x) = H(\alpha) + H'(\delta_x) \cdot (x-a)$$

$$|H(x)| \leq |H(\alpha)| + 2K \cdot (c-\alpha) =: C.$$

$\lim_{x \to c-} H(x)$ .. $\exists$ a je konečná

(Věta ??).

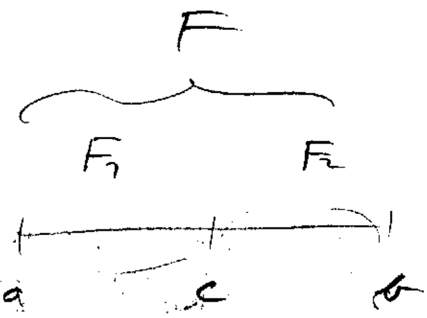
$F_1(x) = H(x) - Kx$; $\lim_{x \to c-}$

analogicky: $F_2(c+) \in \mathbb{R}$.

(posun F_2 o konstantu).

BÚNO: $F_1(c-) = F_2(c+) = A \in \mathbb{R}$

definuji: $F(x) := \begin{cases} F_1(x); & x \in (a,c) \\ A; & x = c \\ F_2(x); & x \in (c,b). \end{cases}$



Uvidíme: $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$.

$x \neq c$: jasné

$x = c$: Lemma (spojité nalepení p.f.)

$$\int_a^b f = [F(x)]_a^b = F(b-) - F(a+) = F(b-) - F(c+) + F(c-) - F(a+)$$

$$= F_2(b-) - F_2(c+) + F_1(c-) - F_1(a+).$$

$$= \int_c^b f + \int_a^c f$$ výrazy mají smysl.

③ (a) F ... prim. fce f; $F' = f \geq 0$

F ... neklesající: $F(b-) \geq F(a+)$; $(F(x))_a^b \geq 0$.

navíc: $F(b-) - F(a+)$ má něj. smysl.

(b) $f \geq g \iff f - g \geq 0$ dle (a): $\int_a^b f - g \geq 0$

dle ① $\int_a^b f - \int_a^b g \geq 0 \iff \int_a^b f \geq \int_a^b g$.

(c): Lemma: $|A| \leq B \iff -B \leq A \leq B$.

$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x$

dle (b): $\int_a^b -|f| \leq \underbrace{\int_a^b f}_{A} \leq \underbrace{\int_a^b |f|}_{B}$ Lemma: $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

Věta 9.9 [Per-partes pro N.i.]

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dx,$$

mají-li pravé strany smysl.

dk.: $H(x)$ ... prim. fce $u(t)v'(t)$.

$$F(x) := u(t)v(t) - H(t)$$

$$F'(x) = \big(u(t)v(t)\big)' - H'(x) = \underline{u'(t)v(t)} + \cancel{u(t)v'(t)} - \cancel{u(t)v'(t)}$$

$$\int_a^b u'v = \big[F(t)\big]_a^b = \Big[u(t)v(t) - H(t)\Big]_a^b =$$

$$= \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \underbrace{\big[H(t)\big]_a^b}_{\int_a^b uv'}.$$

mají smysl. (aritmetika limit.)

Věta 9.10. [Substituce pro N.i.]

$f(x): (a,b) \to \mathbb{R}$.

$\varphi(t): (\alpha,\beta) \to (a,b)$ ~~vzájemně jednoznačné~~ ryze monotónní

$\exists\, \varphi'(t)$ konečná, nenulová $\forall t \in (\alpha,\beta)$.

Potom
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt.$$

Existuje-li jeden z integrálů, existuje i druhý a rovnají se.

dk.: (i) L.S. má smysl: $F(x)$ ... prim. fce k $f(x)$

označ: $G(t) := F(\varphi(t))$;

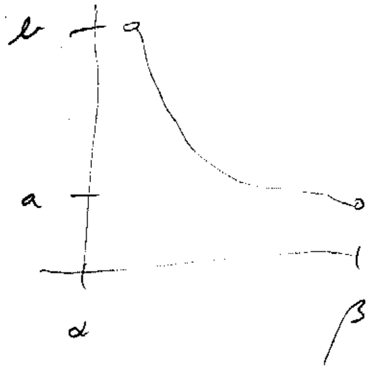
tedy $G'(t) = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$.

pozorování: $|\varphi'(t)| = \pm\varphi'(t)$; $\varphi(t)$ rostoucí/klesající.

$\varphi'(t) > 0$ / $\varphi'(t) < 0$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt = \pm\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

$$= \pm\left[G(t)\right]_\alpha^\beta .$$



$\varphi(t)$ klesající: $G(\beta-) = \lim_{t\to\beta-} F(\varphi(t))$

$\varphi(t) \to a$; $t \to \beta-$

$\boxed{\varphi(t) > 0 \quad \forall t \in P_-(\beta,\delta)}$.

$F(x) \to F(a+)$; $x \to a+$.

---

limita superpozice: $F(\varphi(t)) \to F(a+)$; $t \to \beta-$

podobně: $F(\varphi(t)) \to F(b-)$; $t \to \alpha+$

$$\left[G(t)\right]_\alpha^\beta = F(a+) - F(b-).$$

$\varphi(t)$ rostoucí: podobně.

(ii) P.S. mé mozl: $g(t) := f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt$.

$\theta = \theta(x)$; $\theta := \varphi_{-1}$

~~rd.~~ $\theta(x) : (a,b) \to (\alpha,\beta)$ má jen jedn.

$$\theta'(x) = \frac{1}{\varphi'(\theta(x))} \quad \forall x \in (a,b)$$

konečné, nenulové.

dle (i): $\int_\alpha^\beta g(t)\,dt = \int_a^b g(\theta(x)) \cdot |\theta'(x)|\,dx =$

obecně: P.S. má smysl: $g(t) := f(\varphi(t))|\varphi'(t)|$

$$\int_\alpha^\beta g(t)\,dt \quad ; \qquad \text{pomocné funkce } \theta(x) := [\varphi_{\ldots}(t)]_{-1}$$

$$\theta'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi_{-1}(x))} = \frac{1}{\varphi'(\theta(x))}.$$

$$\int_\alpha^\beta g(t)\,dt = \int_a^b g(\theta(x))|\theta'(x)|\,dx$$

$$= \int_a^b f(\varphi(\theta(x)))\cdot|\varphi'(\theta(x))|\cdot\frac{1}{|\varphi'(\theta(x))|}\,dx$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx.$$