13. Metrické prostory

Def.: Metrický prostor je dvojice (P, ρ); kde P je nějaká množina a ρ je metrika; zobrazení $(x,y) \mapsto \rho(x,y) \geq 0$ $\forall x,y,z \in P$

(i) $\rho(x,y) \geq 0$ a $\rho(x,y) = 0$ právě když $x = y$ $\forall x,y \in P$.

(ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ $\forall x,y \in P$

(iii) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ $\forall x,y,z \in P$

Příkl.: ① $\mathbb{R}$; $\rho(x,y) := |x-y|$.

obecné schéma: vzdálenost.

② diskrétní prostor P.. libovolné (množina; mnoho bodů.)

$$\rho(x,y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

?? $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

$$\rho(x,y) = |x-y|^{\frac{1}{2}}.$$

$$|x-z|^{\frac{1}{2}} \leq |x-y|^{\frac{1}{2}} + |y-z|^{\frac{1}{2}}.$$

$$|x-z|^{\frac{1}{2}} \leq \cancel{(x} \quad (a+b)^{\frac{1}{2}} \leq a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \quad \Big/ \ ^2$$

$$a+b \leq a+b+\underline{2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}.$$

(P,ρ) m.p.; $Q \subset P$ podm.

(Q,ρ) je m.p.

$\mathbb{Z}$ je m.p.

$\mathbb{N}$ je m.p...

Def.: Normovaný prostor je dvojice $(X, \|\cdot\|)$; kde X je lineární vektorový prostor, a $\|\cdot\|$ je norma; tj. zobrazení $x \mapsto \|x\|$, splňující $\forall x,y,z \in X$; $c \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$.

(i) $\|x\| \geq 0$; a $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(ii) $\|cx\| = |c|\,\|x\|$ $\forall c \in \mathbb{R}$

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ Δ-nerovnost

Pozorování: $\Rightarrow \hat{\rho}(x,y) := \|x-y\|$ je metrika.

(i) $\|x-y\| \geq 0$; $\|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y=0$; tj. $x=y$

(ii) $\|x-y\| = \|y-x\| = \|-(x-y)\| = |-1|\,\|x-y\| = \|x-y\|$

(iii) $\hat{\rho}(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \leq \underbrace{\|x-y\|}_{\hat{\rho}(x,y)} + \underbrace{\|y-z\|}_{\hat{\rho}(y,z)}$.

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ $\quad \|\underset{\sim}{x}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

$\|\underset{\sim}{x}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

$C([a,b])$ ... spojité fce $f(x): [a,b] \to \mathbb{R}$.

$\|f\| := \sup\{|f(x)|;\ x \in [a,b]\}$.

(P, ρ) ... metrický prostor: (i) $\rho(x,y) \geq 0$; $= 0 \iff x = y$

$\forall x,y,z \in P$: (ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

(iii) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

Def: (P,ρ) ... m.p. $x \in P$; $\delta > 0$

$$U(x,\delta) = \{y \in P;\ \rho(x,y) < \delta\}$$
$$P(x,\delta) = \{y \in P;\ 0 < \rho(x,y) < \delta\} = U(x,\delta) \setminus \{x\}$$

$G \subset P$ se nazve <u>otevřená</u>, pokud

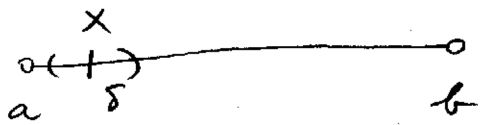
$$(\forall x \in G)(\exists \delta > 0)\left[U(x,\delta) \subset G\right]$$

$F \subset P$ se nazve <u>uzavřená</u>, pokud

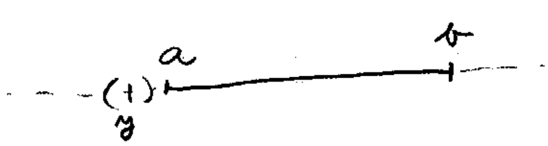
$F^c := P \setminus F$ je otevřená.

Příkl.: $\mathbb{R}$; $\rho(x,y) = |x-y|$. $U(x,\delta)$: $P(x,\delta)$ ... jako výše..

(a,b) ... otevřené množina:

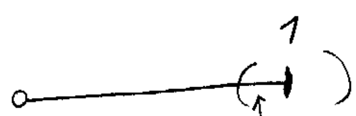


$[a,b]$ ... uzavřená: $[a,b]^c = (-\infty,a) \cup (b,+\infty)$



$(0,1]$ ani uzavřené, ani otevřené:

$U(1,\delta) \not\subset (0,1]$ pro žádné $\delta > 0$.



$(0,1]^c = (-\infty,0] \cup (0,+\infty)$

↑ není uzavřená u 0.

$\mathbb{R}, \emptyset$ ... otevřené i uzavřené.

Věta 13.1: (P,ρ) je m.z.

① $P, \emptyset$ jsou otevřené množiny

② G_α otevř. pro $\forall \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ je otevř.

③ $G_1, \dots G_N$ otevřené $\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{N} G_n$ je otevř.

---

dk.: ① zřejmé.

② $g := \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \; \dots \; x \in g$ dáno ? $\exists \delta > 0;\ \mathcal{U}(x,\delta) \subset g$.

$x \in g \iff \exists \tilde{\alpha} \in A;\ x \in G_{\tilde{\alpha}}$

$G_{\tilde{\alpha}}$ otevř. $\Rightarrow \exists \delta > 0;\ \underline{\mathcal{U}(x,\delta)} \subset G_{\tilde{\alpha}} \subset \underline{g}$.

③ $\mathcal{H} := \bigcap_{n=1}^{N} G_n \; \dots \; x \in \mathcal{H}$? $\exists \delta > 0 \dots \mathcal{U}(x,\delta) \subset \mathcal{H}$.

$x \in \mathcal{H} :\iff x \in G_n \quad \forall n = 1, \dots N$

↑otevř.: $\exists \delta_n > 0 \dots \mathcal{U}(x,\delta_n) \subset G_n$.

polož $\delta := \min\{\delta_1, \dots \delta_N\} \underline{\underline{> 0}}$.

$\mathcal{U}(x,\delta) \subset \mathcal{U}(x,\delta_n) \subset G_n \quad \forall n = 1, \dots N$

$\mathcal{U}(x,\delta) \subset \mathcal{H}$.

Pozn.: konečnost v ③ podstatná!:

$$\{0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

↑ není otevř. ↑ otevř.

Věta 13.7. (P,ρ) m. p.

① P, ϕ jsou uzav.

② F_α uzav. pro $\forall \alpha \in A \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ uzav.

③ $F_1, \dots F_N$ uzav $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{N} F_n$ uzav.

Dk.: ① $P = \phi^c$; $\phi = P^c$

② $\mathcal{F} := \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$; $\mathcal{F}$ uzav. $\Leftrightarrow \mathcal{F}^c$ otev.

de Morgan: $\mathcal{F}^c = \underbrace{\bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha^c}_{\text{otev. V. 13.1. (2)}}$ ← otev.

③ $\mathcal{J} = \bigcup_{n=1}^{N} F_n$; $\mathcal{J}$ uzav. $\Leftrightarrow \mathcal{J}^c$ otev.

de Morgan: $\mathcal{J}^c = \underbrace{\bigcap_{n=1}^{N} F_n^c}_{\text{otev. V. 13.1. ③}}$ ← otev.

Def. (P,ρ) .. m.p. ; $\{x_n\} \subset P$ posloupnost bodů.

Řekneme, že $\{x_n\}$ má limitu x_0 (konverguje k x_0) v (P,ρ);

jestliže: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})[n \geq n_0 \Rightarrow \underbrace{x_n \in U(x_0,\varepsilon)}_{\rho(x_n,x_0) < \varepsilon}]$.

Značení: $x_n \to x_0$; $n \to \infty$; $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

ekvivalentně: $\rho(x_n,x_0) \to 0$ pro $n \to \infty$.

Věta 13.2. (P,ρ) je m.p.; $F \subset P$. Potom je ekvivalentní:

(1) F je uzavřená?

(2) Je-li $x_n \in F$ pro $\forall n$ a $x_n \to x_0$ pro $n \to \infty$, $\Rightarrow x_0 \in F$.

Dk.: (1) $\Rightarrow$ (2): sporem: $x_n \in F$;

$x_n \to x_0 \in F^c$.

F uzav. $\Rightarrow F^c$ otev.

$\exists \delta > 0$ .. $U(x_0,\delta) \subset F^c$

$U(x_0,\delta) \cap F = \emptyset$.

leč: $x_n \to x_0$: $\underset{\substack{\cap \\ F}}{x_n} \in U(x_0,\delta)$ pro $n \geq n_0$ spor.

(2) $\Rightarrow$ (1): obrazem: $\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$.

F není uzav.: $\Rightarrow F^c$ není otev.

$\exists x_0 \in F^c$; $U(x_0,\delta) \not\subset F^c$ pro $\forall \delta > 0$

$U(x_0,\delta) \cap F \neq \emptyset$ $\forall \delta > 0$.

$\delta = \frac{1}{n}$: $\exists x_n \in U(x_0,\frac{1}{n}) \cap F$.

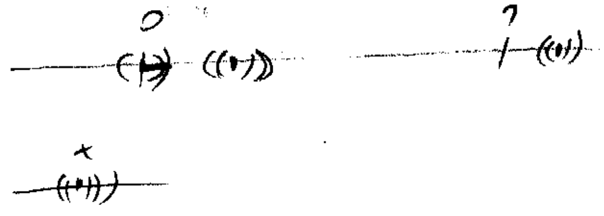
$x_n \in F$; $x_n \to x_0$ (neboť $\rho(x_n,x_0) < \frac{1}{n}$)

leč $x_0 \notin F$: (2) neplatí.

Def.: (P,ρ) ... m.p. Pro $A\subset P$ definujeme uzávěr A jako

$$\overline{A} := \{y\in P;\ (\forall\delta>0)\ \mathcal{U}(y,\delta)\cap A\neq\emptyset\}.$$

Příkl.: ① $\overline{(0,1)} = [0,1]$



② $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Věta 13.3 [Vlastnosti uzávěru.] (P,ρ) ... m.p.; $A,B\subset P$. Potom

(1) $A\subset B \Rightarrow \overline{A}\subset\overline{B}$; $\overline{\emptyset}=\emptyset$

(2) $\overline{A}$ je uzavřená množina

(3) $A\subset\overline{A}$, přičemž $A=\overline{A} \Leftrightarrow A$ je uzavřená.

(4) $y\in\overline{A} \Leftrightarrow \exists\, x_n\in A;\ x_n\to y$ pro $n\to\infty$.

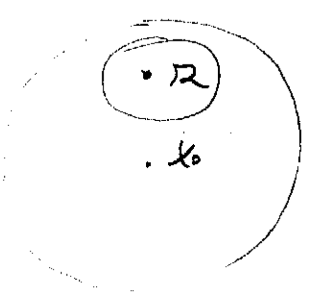
Dk.: (1) d.cv.

(2) $\overline{A}$ uzavř. $\Leftrightarrow (\overline{A})^c$ otevř. ... $x_0\notin\overline{A}$ libovol.

? $\exists\delta>0$ - $\mathcal{U}(x_0,\delta)\cap\overline{A}=\emptyset$.

$x_0\notin\overline{A}$: $\exists\delta>0$ $\mathcal{U}(x_0,\delta)\cap A=\emptyset$.

tvrdím: $\mathcal{U}(x_0,\delta)\cap\overline{A}=\emptyset$.



$z\in\mathcal{U}(x_0,\delta)$ libovolné.

$\rho(x_0,z)<\delta$ ... vol $\eta>0$ tak, že

$\rho(x_0,z)+\eta<\delta$.

pak $\mathcal{U}(z,\eta)\cap A=\emptyset$. $[\mathcal{U}(z,\eta)\subset\mathcal{U}(x_0,\delta)]$.

$y\in\mathcal{U}(z,\eta)$: $\rho(z,y)<\eta$

$$\rho(x_0,y)\le\underbrace{\rho(x_0,z)}_{<\delta}+\underbrace{\rho(y,z)}_{<\eta}<\rho(x_0,z)+\eta<\delta.$$

(3) $A \subset \overline{A}$ .. zřejmé: $y \in \mathcal{U}(y,\delta)$ $\forall \delta > 0$

$y \in A \Rightarrow y \in \mathcal{U}(y,\delta) \cap A$ $\forall \delta > 0$.

$\overline{A} = A \Rightarrow A$ uzavř. ($\overline{A}$ uzavř. dle (2)).

opačně: A uzavř. $\Rightarrow A = \overline{A}$; „$\subset$" víme

? $\overline{A} \subset A$.

sporem: $\overline{A} \not\subset A \Rightarrow A$ není uzavř.

nechť $x_0 \in \overline{A} \setminus A = \overline{A} \cap A^c$.

$\mathcal{U}(x_0,\delta) \cap A \neq \emptyset$ pro $\forall \delta > 0$

$\mathcal{U}(x_0,\delta) \not\subset A^c$ pro $\forall \delta > 0$, $\Big\}$ A^c není otevř.

leč $x_0 \in A^c$ ..

$\Downarrow$

A není uzavř.

(4) $y \in \overline{A} \iff \exists x_n \in A$; $x_n \to y$ pro $n \to \infty$.

„$\Leftarrow$": $x_n \in A \overset{(3)}{\Rightarrow} x_n \in \overline{A}$; $x_n \to y \Rightarrow y \in \overline{A}$;

(Věta 13.2)

neboť $\overline{A}$ je uzavřená (2).

„$\Rightarrow$": nechť $y \in \overline{A}$: $\mathcal{U}(y,\delta) \cap A \neq \emptyset$ pro $\forall \delta > 0$

užijí $\delta = \frac{1}{n}$; $n = 1, 2, \ldots$

$\exists x_n \in \mathcal{U}(y, \frac{1}{n}) \cap A$.

$x_n \to y$; neboť $\rho(y, x_n) < \frac{1}{n}$.

Věta 13.4 [vlastnosti hranice]

(1) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$; $\partial A = \partial(A^c)$.

(2) ∂A je uzavřené ; $\overline{A} = A \cup \partial A$.

(3) A je uzavřené $\Leftrightarrow \partial A \subset A$.

A je otevřené $\Leftrightarrow \partial A \cap A = \emptyset$.

Dk.: (1) $\overline{A} = \{ y \in P ;\ \forall \delta > 0 \quad \mathcal{U}(y,\delta) \cap A \neq \emptyset \}$

$\overline{A^c} = \{ y \in P ;\ \forall \delta > 0 \quad \mathcal{U}(y,\delta) \cap A^c \neq \emptyset \}$.

$x \in \overline{A}$ & $x \in \overline{A^c} \Leftrightarrow x \in \partial A$.

$$\partial A^c = \overline{A^c} \cap \overline{\underbrace{(A^c)^c}_{A}} = \partial A$$

---

(2) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$ uzavřené : V. 13.3.

uzav. V.13.1

$\overline{A} = A \cup \partial A$

$\supset$: $A \subset \overline{A}$ (V.13.3)

$\partial A \subset \overline{A}$ (bod (1))

$\subset$"

---

(3) A je uzav. $\overset{V.13.3}{\Longleftrightarrow} A = \overline{A} \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} A = A \cup \partial A$

$\Longleftrightarrow \partial A \subset A$

$y \in \overline{A} \Rightarrow y \in A \vee y \in \partial A$

$y \in \overline{A}$ & $y \notin A \Rightarrow y \in \partial A$.

$y \in A^c$ bod (1).

$\Downarrow$ $y \in \overline{A^c}$ V.13.3.

A je otev. $\Longleftrightarrow A^c$ uzav. $\Leftrightarrow \underset{\partial A}{\underset{\parallel}{\partial(A^c)}} \subset A^c \Leftrightarrow \partial A \cap A = \emptyset$.

Další pojmy:

vnitřek množiny $\quad \operatorname{int} A = \{ y \in A;\ \exists \delta > 0\ \ \mathcal{U}(y,\delta) \subset A \}$

vnějšek množiny $\quad \operatorname{ext} A = \{ y \in X;\ \exists \delta > 0\ \ \mathcal{U}(y,\delta) \cap A = \emptyset \}$.

<u>Pozn.</u>: $\operatorname{ext} A = \operatorname{int} A^c$

$\operatorname{int} A$ je otevřená; $\operatorname{int} A \subseteq A$; přičemž rovnost právě když A je otevřená.

$\overline{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A$ (disjunktně)

$X = \operatorname{int} A \cup \partial A \cup \operatorname{ext} A$ (disjunktně)

<u>Def.</u>: $(X,\rho), (Y,\sigma)$ m.p.; $f: X \to Y$ funkce. Řekneme, že f je spojitá, jestliže

$$(\forall x_0 \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[x \in \mathcal{U}_X(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_Y(f(x_0),\varepsilon) \right].$$

<u>Věta 13.5</u>. Je ekvivalentní:

(1) $f: X \to Y$ je spojité

(2) pro $\forall G \subset Y$ otevřenou je $f^{-1}(G) \subset X$ otevřené

(3) pro $\forall F \subset Y$ uzavřenou je $f^{-1}(F) \subset Y$ uzavřené.

<u>Pozn.</u>: $f^{-1}(A) = \{ x \in X;\ f(x) \in A \}$

tzv. <u>vzor</u> množiny; nikoliv inverzní zobrazení (f obecně není prosté.)

<u>Dk.</u>: $(1) \Rightarrow (2)$: $G \subset Y$ otev. ... ? $A := f^{-1}(G)$ otev.

$x_0 \in A$ libovolné; $y_0 := f(x_0) \in G$ ...

$\exists \varepsilon > 0;\ \mathcal{U}(y_0,\varepsilon) \subset G$

díky otevřenosti G.

spojitost f: $\exists\, \delta > 0;\ f(\mathcal{U}_X(x_0,\delta)) \subset \mathcal{U}_Y(\underbrace{f(x_0)}_{=y_0}, \varepsilon)$;

tj.: $\mathcal{U}_X(x_0,\delta) \subset A$; i.e. A je otevřené.

$(2) \Rightarrow (1)$: $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ dáno: ? $\exists\, \delta > 0$. $f(\mathcal{U}_X(x_0,\delta)) \subset \mathcal{U}_Y(f(x_0),\varepsilon))$.

$G := \mathcal{U}_Y(f(x_0),\varepsilon)$ je otevřené;

tedy $A := f^{-1}(G)$ je otevř...

později: $x_0 \in A$; tedy $\exists\, \delta > 0$; $\mathcal{U}_X(x_0,\delta) \subset f^{-1}(G)$

$\Leftrightarrow f(\mathcal{U}_X(x_0,\delta)) \subset G$; q.e.d.

$(2) \Leftrightarrow (3)$ G otevř. $\Leftrightarrow$ G^c uzavř.;

leč $f^{-1}(G^c) = [f^{-1}(G)]^c$,

„$\Rightarrow$": tedy F uzavř. $\Rightarrow$ F^c otevř.

$\Rightarrow f^{-1}(F^c)$ otevř.

$\parallel$

$(f^{-1}(F))^c$ otevř.

$\Leftrightarrow f^{-1}(F)$ uzavř.

„$\Leftarrow$" podobně.

Věta 13.6. [Heineho charakterizace spojitosti:]

Je ekvivalentní:

(1) $f: X \to Y$ je spojité;

(2) pro každý $x_0 \in X$ a pro libovolnou posloupnost $\{x_n\} \subset X$; splňující $x_n \to x_0$; $n \to \infty$, platí:

$f(x_n) \to f(x_0)$, $n \to \infty$.

Dk.: (1) $\Rightarrow$ (2). nechť $\{x_n\}$, x_0 splňují premisu (2).

? $f(x_n) \to f(x_0)$; tj.:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\left[n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) \in \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)\right]$.

$\varepsilon > 0$ dáno .. spojitost f:

$\exists \delta > 0$; $x \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)$.

leč: $x_n \to x_0$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $n \geq n_0$: $x_n \in \mathcal{U}(x_0, \delta)$.

celkem: $n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) \in \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)$; q.e.d.

(2) $\Rightarrow$ (1): nepřímo; tj.: $\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$.

$\neg(1)$: $(\exists x_0)(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)\left[\exists x \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \;\&\; f(x) \notin \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)\right]$

tato x_0, ε fixuji; užiji ozdrojení s $\delta = \frac{1}{n}$; $n = 1, 2, \ldots$

$\rightarrow \exists x_n \in \mathcal{U}(x_0, \frac{1}{n})$; leč $f(x_n) \notin \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)$

tedy: $\{x_n\}$ splní premisu (2); ale ne závěr.

... (2) neplatí.

$(X,\rho), (Y,\sigma)$ m.p.; $f: X \to Y$ je spojité: | mp-0

$(\forall x_0 \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta)\left[x \in \mathcal{U}_X(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_Y(f(x_0),\varepsilon)\right]$.

Věta 13.6. (Heine): $f: X \to Y$ spojité právě když
$\forall \{x_n\} \subset X;\ x_n \to x_0 \in X$ platí $f(x_n) \to f(x_0)$.
$(n \to \infty)$ $(n \to \infty)$.

Věta 13.8:

(1) nechť $(X,\rho), (Y,\sigma), (Z,\tau)$ jsou m.p.,
$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ spojité. Potom $g \circ f: X \to Z$ je spojité.

(2) Je-li (X,ρ) m.p., $f: X \to \mathbb{R}$, $g: X \to \mathbb{R}$ spojité,
potom $f \pm g$, $f \cdot g$ jsou spojité;
je-li $g(x) \neq 0$ pro $\forall x \in X$, je též $\frac{f}{g}: X \to \mathbb{R}$ spojité.

---

dk.: (1) cíl: $(\forall x_0 \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[x \in \mathcal{U}_X(x_0,\delta) \Rightarrow g(f(x)) \in \mathcal{U}_Z(g(f(x_0)),\varepsilon)\right]$

$\Uparrow$

$x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ dáno: označ $y_0 = f(x_0)$

$g: Y \to Z$ spojité: $\exists \eta > 0 \left[y \in \mathcal{U}_Y(y_0,\eta) \Rightarrow g(y) \in \mathcal{U}_Z(g(y_0),\varepsilon)\right]$

$f: X \to Z$ spojité $\exists \delta > 0 \left[x \in \mathcal{U}_X(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_Y(\underbrace{f(x_0)}_{= y_0},\eta)\right]$

$\to$ závěr.

(2) $(f+g): X \to \mathbb{R}$ spojité?

dle V. 13.6. stačí: $\left.\begin{matrix} x_n \to x_0, \\ x_n, x_0 \in X \end{matrix}\right\} \Rightarrow (f+g)(x_n) \to (f+g)(x_0)$.

leč: $(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0)$.

spojitost f, g V. 13.6 & aritmetika limit v $\mathbb{R}$

∴ $\left(\frac{f}{g}\right): X \to \mathbb{R}$ spojité:

$(f/g)(x_n) \to (f/g)(x_0)$; pokud $x_n \to x_0$, $x_n, x_0 \in X$ libovolné.

$(f/g)(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ V. 13.6 & aritm. lim & $g(x_0) \neq 0$..

Def.: (X,ρ) m.p.; (Y,σ) m.p. $f: X \to Y$; $x_0 \in X$ řekneme, že $b \in Y$ je limita funkce f pro $x \to x_0$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$, jestliže:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[x \in P_X(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in U_Y(b,\varepsilon)\right].$$

$P_X(x_0,\delta) = U(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}$.

pozn.: $f(x)$ nemusí být definována pro $x = x_0$.

Věta 13.9. (Heine).

(1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$

(2) pro libovolné $x_n \in X$; $x_n \to x_0 \in X$, $x_n \neq x_0$ $\forall n$ $\Big\}$ platí $f(x_n) \to b$.

dk.: (1) ⇒ (2): cíl: $\{x_n\}$ splní předpoklady (2) $\overset{?}{\Rightarrow} f(x_n) \to b$.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\left[n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) \in U(b,\varepsilon)\right]$$

$\varepsilon > 0$ dáno: (1): $\exists \delta > 0$; $x \in P_X(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in U(b,\varepsilon)$.

$x_n \to x_0$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U(x_0,\delta)$

leč: $x_n \neq x_0 \Rightarrow x_n \in P(x_0,\delta)$

$f(x_n) \in U(b,\varepsilon)$ q.e.d.

(2) $\Rightarrow$ (1) obrazem: $\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$:

$\neg(1)$: $(\exists \varepsilon>0)(\forall \delta>0)(\exists x \in P(x_0,\delta))\left[f(x) \notin \mathcal{U}(b,\varepsilon) \right]$

$\varepsilon>0$ fixuji, zbytek užiji s $\delta = \frac{1}{n}$; $n = 1,2,\dots$

$$\exists x_n \in P(x_0, \tfrac{1}{n}) \; ; \; f(x_n) \notin \mathcal{U}(b,\varepsilon)$$

$\left.\begin{array}{l} x_n \to x_0 \text{; leč} \\ x_n \neq x_0 \end{array}\right\}$ předpoklady (2) $\qquad$ $f(x_n) \not\to b$ závěr (2) neplatí.

Def.: (X,ρ) m.z., (Y,σ); $f: X \to Y$; $x_0 \in X$ zvol.

Řekneme, že f je spojité v bodě x_0, jestliže

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left[x \in \mathcal{U}_X(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_Y(f(x_0),\varepsilon) \right]$$

Pozn.: 1. $f: X \to Y$ je spojité $\Leftrightarrow$ f je spojité v každém bodě

2. f je spojité v bodě x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

3. relativita pojmů: (metrický prostor!!) $\quad f: [a,b] \to \mathbb{R}$

je spojitá v a $(X = [a,b])$

$\Updownarrow$

spojité zprava (viz min. semestr)

(X,ρ) … m. p.; $\{x_n\} \subset X$ … posloupnost

$\{y_n\}$ se nazve podposloupnost (vybrané posloupnost), pokud $\exists$ rostoucí posl. $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ tak, že $y_n = x_{k_n}$.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$k_1 = 2$
	$\shortparallel$		$\shortparallel$	$\shortparallel$	$k_2 = 4$
	y_1		y_2	y_3	$k_3 = 5$
					$\vdots$

---

x_0 je <u>hromadný bod</u> $\{x_n\}$:

$\exists$ podposloupnost $\{x_{k_n}\}$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x_0$

(ekvivalentně:)

x_0 je hromadný bod $\{x_n\} \iff (\forall \varepsilon > 0)\big[x_n \in U(x_0,\varepsilon)$ pro nekonečně indexů $n\big]$.

(věta 7. ZS).

<u>Platí:</u> $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow x_0$ je <u>jediný</u> hromadný bod

$\not\Leftarrow$ obecně <u>ne</u>..

$A \subset X$ je kompaktní : ← jaksi konečné <u>mn</u>..

$\{x_n\} \subset A$ libovolné $\Rightarrow \exists$ podposl. $\{x_{k_n}\}$ a $\exists\, x_0 \in A$ tak, že $x_{k_n} \to x_0$, $n \to \infty$.

ekvivalentně:

$\{x_n\} \subset A$ libovolné $\Rightarrow$ má v A aspoň jeden hromadný bod…

Věta 13.7: A komp $\Rightarrow$ omez. & uzavř.

Def.: (X, ρ) .. m. p. Množina $A \subset X$ se nazve kompaktní, jestliže pro libovolnou posloupnost $\{x_n\} \subset A$ existuje podposloupnost $\{x_{k_n}\}$ a bod $x_0 \in A$ tak, že $x_{k_n} \to x_0$ pro $x_0 \in A$.

Def.: $A \subset X$ se nazve omezená, jestliže
$$(\exists x_0 \in X)(\exists R>0)\left[A \subset U(x_0, R)\right].$$
ekvivalentně $(\forall x_0 \in X)$

Věta 13.7. (1) kompaktní množina je omezená a uzavřená.
(2) je-li A kompaktní, $B \subset A$ uzavřená, je též B kompaktní.

dk.: (1) A kompaktní;

sporem: A neomezená: $(\exists x_0)(\forall R>0)\left[A \not\subset U(x_0, R)\right]$

i.e. $\exists x \in A;\ \rho(x_0, x) > R$.

fixuji; zvolme užiji s $R = n$

– $x_n \in A;\ \rho(x_0, x_n) > n$.

zjevně $\{x_n\}$ nemá žádný hromadný bod.

uzavřená: Vzhledem V. 13.2 stačí: $\{x_n\} \subset A;\ x_n \to x_0 \Rightarrow x_0 \in A$.

leč: $\{x_n\} \subset A \Rightarrow \{x_n\}$ má hromadný bod v A;

$x_n \to x_0$ – musí x_0 je jediný hromadný bod;

tedy $x_0 \in A$.

(2): $\{x_n\} \subset B$. Tím spíše $\{x_n\} \subset A$;

tedy $\exists$ podposl. $\{x_{k_n}\}$;

$x_{k_n} \to x_0 \in A$.

leč: B uzavřené; $x_{k_n} \in B$

$\Rightarrow x_0 \in B$.; q.e.d.

Příklady: ① konečná množina je vždy kompaktní

② interval $[a,b]$ je kompaktní

Věta 13.10. (X,ρ), (Y,σ) m. p.;

(1) $f: X \to Y$ spojité; $A \subset X$ kompaktní $\Rightarrow$ $f(A)$ je kompaktní

(2) $f: A \to \mathbb{R}$ spojité; A kompaktní $\Rightarrow$ f je v A omezené; a nabývá maxima a minima.

Dk.: (1) $f(A)$ kompaktní: $\{y_n\} \subset f(A)$ libovolná

$\Rightarrow \exists$ podposl. y_{k_n} $\exists\, y_0 \in f(A)$

$y_{k_n} \to y_0$, $n \to \infty$.

$\{y_n\} \subset f(A)$; $f(A) = \{f(x);\ x \in A\}$

$\exists \{x_n\} \subset A$; $y_n = f(x_n)$.

A kompaktní: $\exists$ podposl. x_{k_n}, $\exists\, x_0 \in A$

$x_{k_n} \to x_0$, $n \to \infty$.

spojitost f & Heine: $f(x_{k_n}) \to f(x_0)$

$$\underbrace{f(x_{k_n})}_{= y_{k_n}} \to \underbrace{f(x_0)}_{= y_0 \in f(A)}.$$

(2) omezenost: $(\exists C > 0)(\forall x \in A)\left[\,|f(x)| < C\,\right]$.

označ. $H = f(A) = \{f(x);\ x \in A\}$.

bod (1): H je kompaktní

V. H je omezené: $(\exists C > 0)(\forall y \in H)(|y| < C)$.

---

bod maxima: $H \neq \emptyset$, omezené: $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$; $\alpha = \sup H$.

jinak: $f(x) \leq \alpha$ pro $\forall x \in A$.

pokud $f(x_0) = \alpha$, je to bod maxima.

sporem: ?? $f(x) < \alpha \quad \forall x \in A$

položme $\varphi(x) := \dfrac{1}{\alpha - f(x)}$. spojité v A (Věta)

$\Rightarrow \varphi(x)$ omezená : $\exists K > 0 \quad \dfrac{1}{\alpha - f(x)} < K \quad \forall x \in A$

$\dfrac{1}{K} < \alpha - f(x)$

$f(x) < \underbrace{\alpha - \dfrac{1}{K}}_{} \quad \forall x \in A$

horní odhad H

spor.

spor s vlastností suprema

$\underbrace{\alpha - \dfrac{1}{K}}_{} < \alpha$

je horní odhad H spor.

Def. (X,ρ)... m.p. Posloupnost $\{x_n\} \subset X$ se nazve cauchyovská, jestliže $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,[m,n \geq n_0 \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon]$.

Pozn.: Je-li $\{x_n\}$ konvergentní, je nutně cauchyovská.

Dk.: $\varepsilon>0$ dáno; $\{x_n\}$ konverguje: tj. $\exists x_0 \in X$; $x_n \to x_0$

$\exists n_0 \dots n \geq n_0 : \rho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Δ-nerovnost: $m,n \geq n_0$:

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, x_m) < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Def.: Metrický prostor (X,ρ) se nazve úplný, jestliže každá cauchyovská posloupnost $\{x_n\}$ je konvergentní, tj.: $\exists x_0 \in X$ tak, že $x_n \to x_0$.

Příklady: ① $\mathbb{R}$ je úplný (viz minulý semestr)

② $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$ jsou úplné (dořešené zčásti)

③ $C([a,b])$ je úplný vůči $\|\cdot\|$ supremové.

Def.: (X,ρ), (Y,σ) m.p.; $f: X \to Y$ se nazve lipschitzovské, jestliže $\sigma(f(x), f(y)) \leq L\,\rho(x,y)$ pro $\forall x,y \in X$.

Pokud navíc $L<1$, jde o tzv. kontrakci.

Věta 13.11. [Banachova věta o kontrakci.]

Nechť (X,ρ) je úplný metrický prostor; nechť $f: X\to X$ je kontrakce. Potom $\exists!\ x_0\in X$ tak, že $f(x_0)=x_0$.

(tzv. pevný bod.)

Dk.: (jednoznačnost)

$f(x_0)=x_0$, $f(y_0)=y_0$. víme: $\rho(f(x),f(y))\le L\rho(x,y)$

tedy: $\rho(\underset{x_0}{\underset{\shortparallel}{f(x_0)}},\underset{y_0}{\underset{\shortparallel}{f(y_0)}})\le L\rho(x_0,y_0)$

musí $\rho(x_0,y_0)=0$ $\Longleftarrow$ $\underbrace{(1-L)}_{>0}\cdot\underbrace{\rho(x_0,y_0)}_{\ge 0}\le 0$

i.e. $x_0=y_0$

(existence): zvol $x_1\in X$ libovolně;

$x_{n+1}:=f(x_n)$.

ukážeme, že $\{x_n\}$ je cauchyovská:

označ $c:=\rho(x_1,x_2)=\rho(x_1,f(x_1))$.

tedy: $\rho(x_2,x_3)=\rho(f(x_1),f(x_2))\le L\rho(x_1,x_2)=Lc$

$\rho(x_3,x_4)\le\rho(f(x_2),f(x_3))\le L\rho(x_2,x_3)\le L^2c$

$\vdots$

obecně (indukce): $\rho(x_n,x_{n+1})\le L^{n-1}c$.

je-li $m\ge n$; tak (díky $\triangle$-nerovnosti)

$\rho(x_m,x_n)\le\rho(x_{n+1},x_n)+\rho(x_{n+2},x_{n+1})+\dots+\rho(x_m,x_{m-1})$

$\le cL^{n-1}+cL^{n}+\dots\ cL^{m-1}$

$\le cL^{n-1}(1+L+L^2+\dots)=c\,\dfrac{L^{n-1}}{1-L}$.

odtud: $\varepsilon > 0$ dáno; vol n_0 tak velké,

že $\frac{C}{1-L} \cdot L^{n_0-1} < \varepsilon$; zde se plně využívá $\underline{L<1}$.

potom pro $m, n \geq n_0$: $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$; q.e.d.

úplnost (X,ρ): $\exists\, x_0 \in X$; $x_n \to x_0$; $n \to +\infty$.

tedy též $x_{n+1} \to x_0$

$f(x_n) \to f(x_0)$ (spojitost & Heine)

celkem: $x_{n+1} = f(x_n)$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$x_0 = f(x_0)$; tj. x_0 je hledaný pevný bod.

Zbytek kapitoly je věnován situaci speciálně v $\mathbb{R}^N$.

- m.p.; metrika $\rho(x,y) = \|x-y\|$

norma: $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

skalární součin: $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$

$x = (x_1, \dots x_N)$

$y = (y_1, \dots y_N)$

Věta 13.12.

Cauchy–Schwartz: $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

Pozn.: $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ $\quad z \mapsto (\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z) = (x,y)$

$z \quad (x,y)$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$.

Lemma 13.1 Nechť $\{x^n\} \subset \mathbb{R}^N$; $x^0 \in \mathbb{R}^N$. Potom

$x^n \to x^0$ (konvergence v $\mathbb{R}^N$), právě když $x_i^n \to x_i^0$

pro každé $i = 1, \dots N$.

dk: klíčový ohled: $x = (x_1, \dots x_N) \in \mathbb{R}^N$

$\forall j.: |x_j| \le \|x\| \le |x_1| + \dots + |x_N|$

a tedy: $\|x^n - x^0\| \to 0$ právě když

$x_i^n - x_i^0 \to 0$ pro každé $i = 1, \dots N$.

značení: $x^n = (x_1^n, \dots x_N^n)$

$x^0 = (x_1^0, \dots x_N^0)$.

Věta 13.13. Množina $A \subset \mathbb{R}^N$ je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená.

dk: $\Rightarrow$" máme obecně (Věta 13.7)

$\Leftarrow$ $\{x^n\} \subset A$; ? $\exists x^0 \in A$; $x^n \to x^0$.

omezenost A: $\exists K > 0$; $\|x^n\| \le K$ $\forall n$

a tedy $|x_j^n| \le \|x^n\| \le K$ $\forall n$; $\forall j = 1, \dots N$.

neboli $\{x_j^n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, pro $\forall j$.

Bolzano-Weierstrassova věta (viz ZS, Věta 7.4): $\exists$ podposloupnost $\{x^{n_k}\}$ tak, že

$x_1^{n_k} \to x_1^0 \in \mathbb{R}$.

týž argument pro $\{x_2^{n_k}\}$ ...

$\exists$ další výběr tak, že $x_2^{n_k} \to x_2^0$
(značený stejně)

vyberu N-krát: $x_j^{n_k} \to x_j^0$; $j = 1, \dots N$.

Lemma 13.1.: $x^{n_k} \to x^0$ v $\mathbb{R}^N$

$$x^0 = (x_1^0, \dots x_N^0).$$

protože $x^{n_k} \in A$; A je uzavřené

V. 13.2. $\Rightarrow$ $x^0 \in A$; q.e.d

<u>Věta 13.14.</u> Prostor $\mathbb{R}^N$ je úplný.

<u>dk.:</u> nechť $\{x^n\} \subset \mathbb{R}^N$ je cauchyovské. $x^n = (x_1^n, \dots x_N^n)$

L. 13.1.: $|x_j^n - x_j^m| \le \| x^n - x^m \|$

tedy $\{x_j^n\}_n$ je cauchyovská pro $\forall j$ zvlášť.

úplnost $\mathbb{R}$ (Věta 7.5 ZS) $\Rightarrow$ $\exists\, x_j^0 \in \mathbb{R}$; $x_j^n \to x_j^0$.

opět dle L. 13.1.:

$x^n \to x^0$ v $\mathbb{R}^N$

$$x^0 = (x_1^0, \dots x_N^0)$$

q.e.d.