posloupnost: $a_1, a_2, \dots a_n$; $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$: $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\left[n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\right]$

$a_n \to a$

$a_n \to \infty$ $\quad (\forall K>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\left[n \geq n_0 \Rightarrow a_n > K\right]$.

<u>Věta</u>: (aritmetika limit): $a_n \to a$, $b_n \to a$ $\Rightarrow$ $a_n + b_n \to a+b$

$a_n \cdot b_n \to a \cdot b$.

<u>Definice</u>: Nechť $a_k \in \mathbb{R}$; $k = 1, 2, \dots$ Symbol $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ (1) se nazývá řada. Posloupnost $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kde

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

se nazývá posloupnost částečných součtů řady (1).

Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, pak číslo s nazveme součtem řady (1), píšeme $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = s$.

<u>Terminologie</u>: Pokud $s \in \mathbb{R}$, říkáme, že řada <u>konverguje</u>.

Pokud $s_n \to \pm\infty$, řekneme, že řada <u>diverguje do $\pm\infty$</u>.

Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, říkáme, že řada <u>osciluje</u>.

Příklady ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$; konv.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}}_{\sum_{l=2}^{n+1} \frac{1}{l}} = 1 - \frac{1}{1+n} \to 1 \text{ pro } n \to \infty$$

② !! $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ (geometrická řada)

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad (1+q+q^2+\dots+q^n)\cdot(1-q) = 1+q$$

$$q \cdot s_n = \underbrace{1+q+q^2+\dots+q^n}_{s_n} + q^{n+1} - 1 = s_n + q^{n+1} - 1$$

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}; \quad \underline{q \neq 1}. \qquad s_n \to \frac{1}{1-q}$$

$|q| < 1$ tvrdím: $q^{n+1} \to 0$ pro $n \to \infty$

$$|q^{n+1}| = |q|^{n+1} = \exp\Big(\underbrace{(n+1) \cdot \underbrace{\ln|q|}_{<0}}_{\to -\infty}\Big) \to 0$$

$$\lim_{y \to -\infty} e^y = 0.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}; \quad q \in (-1,1).$$

③ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$; DIV.

s_n ... neklesající:

$$1 + \underbrace{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}}_{\substack{> 2 \cdot \frac{1}{4} \\ = \frac{1}{2}}} + \underbrace{\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}}_{\substack{> 4 \cdot \frac{1}{8} \\ = \frac{1}{2}}} + \underbrace{\tfrac{1}{9} + \dots + \tfrac{1}{16}}_{\substack{> 8 \cdot \frac{1}{16} \\ = \frac{1}{2}}} + \underbrace{\tfrac{1}{17} + \dots + \tfrac{1}{32}}_{\substack{> 16 \cdot \frac{1}{32} \\ = \frac{1}{2}}}$$

$s_4 > 2 \cdot \frac{1}{2}$

$s_8 = s_{2^3} > 3 \cdot \frac{1}{2}$ Tedy $\{s_n\}$ je shora neomezená

$\vdots$ s_n je rostoucí $\Rightarrow s_n \to \infty$.

$s_{2^n} > n \cdot \frac{1}{2}$; (Věta..)

(4) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ .. osciluje.

Věta 10.1. (nutná podmínka konvergence) Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

Potom $a_k \to 0$ pro $k \to \infty$.

dk.: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ KONV. $\Rightarrow \exists s \in \mathbb{R}$ tak, že $s_n \to s$ pro $n \to \infty$

zřejmě $s_{n-1} \to s$ pro $n \to \infty$

$a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$ (aritmetika limit).

Věta 10.2. Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k$ konverguje a ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \quad (*)$$

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergují. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ konverguje

a platí
$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k. \quad (**)$$

---

dk.: (1) $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$; $t_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha \cdot a_k$; zjevně $t_n = \alpha \cdot s_n$

předpoklad: $\exists s \in \mathbb{R}$; tak, že $s_n \to s$.

tedy $t_n \to \alpha \cdot s$; platí $(*)$.

(2) $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$; $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$; $u_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$.

$u_n = s_n + t_n$; předpoklad: $s_n \to s$, $t_n \to t$, $s, t \in \mathbb{R}$.

tedy $u_n \to s + t$; plati (**).

Lemma 10.1 Nechť řady (1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, (2) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ se liší jen v konečně členech. Potom řada (1) konverguje, právě když řada (2) konverguje.

dk.: předpoklad: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: takže $a_k = b_k$ pro $\forall k \geq n_0$.

nechť s_n, t_n – částečné součty řad (1), (2). ; $n \geq n_0$:

$$s_n - t_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - b_k = \sum_{k=1}^{n_0-1} (a_k - b_k) = C$$

nezávisí na n.

tj. $s_n = C + t_n$; $\forall n \geq n_0$.

tj: s_n má konečnou limitu $\iff$ t_n má konečnou limitu.

Pozn.: $\{s_n\}$ neklesající posloupnost.

Věta 8.: $\lim_{n\to\infty} s_n$ vždy existuje. — je konečná, pokud $\{s_n\}$ je omezená; $= \infty$ jinak.

$\{s_n\}$ je omezená: $(\exists C>0)(\forall n \in \mathbb{N})\,[|s_n| \le C]$.

Lemma 10.2.

Nechť $a_k \ge 0$. Potom nastane právě jedna ze dvou možností:

Má-li řada omezené částečné součty, pak konverguje.

V opačném případě diverguje.

Dk.: $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ je neklesající

a vše plyne z předchozí poznámky.

Věta 10.3. [Srovnávací verze 1.] Jsou dány řady (1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, (2) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$; kde $a_k, b_k \ge 0$. Nechť existuje $C>0$; $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_k \le C b_k$ pro $\forall k \ge k_0$. Potom

1. Pokud (2) konverguje, tak (1) konverguje.
2. Pokud (1) diverguje, tak (2) diverguje.

Dk.: s_n, t_n – částečné součty (1), (2). BÚNO $k_0 = 1$. Lemma 10.1.

$$0 \le s_n \le C \cdot t_n.$$

1. (2) konv. $\Rightarrow \{t_n\}$ omezená $\Rightarrow \{s_n\}$ omezená $\Rightarrow$ (1) konv.
2. (1) div $\Rightarrow s_n \to \infty \Rightarrow t_n \to \infty \Rightarrow$ (2) div.

Příkl.: ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ div

② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k\, 2^k}$ konv.

Věta 10.4. [Podílové kritérium] Je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Nechť $a_k > 0$; nechť $\lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q$.

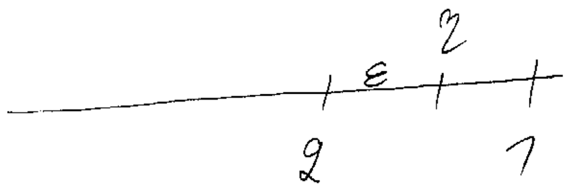
Potom: 1. Je-li $q < 1$, řada konverguje.

2. Je-li $q > 1$, řada diverguje.

Příklady: (1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konv.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ konv.

Dk.: 1. $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to q$; kde $q < 1$



zvol $\varepsilon > 0$ tak, že $q + \varepsilon = \eta < 1$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \ k \geq n_0 \quad \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} - q \right| < \varepsilon$

tedy $\frac{a_{k+1}}{a_k} < q + \varepsilon = \eta$

$\boxed{a_{k+1} < \eta\, a_k}$ pro $\forall k \geq n_0$.

BÚNO: platí pro $\forall k \in \mathbb{N}$ (změním členy s $k < n_0$)

$$a_k < \eta\, a_{k-1} < \eta^2 a_{k-2} < \dots < \eta^{k-1} a_1 = \underbrace{\frac{a_1}{\eta}}_{c} \cdot \eta^k$$

$\sum_{k=1}^{n} \eta^{n}$ konverguje.

Věta 10.3. $\Rightarrow \sum a_k$ konv.;

2. $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to q > 1$: $\exists n_0$ tak, že $\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$ pro $k \geq n_0$.

$a_{k+1} > a_k$; tj.: $a_k \geq \underbrace{a_{n_0}}$ pro $\forall k \geq n_0$

$\uparrow$ pevné kladné číslo

tedy nutně neplatí $a_k \to 0$.

V. 10.1.: $\sum a_k$ diverguje.

Poznámka. Co když $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to 1$? nelze nic říci.

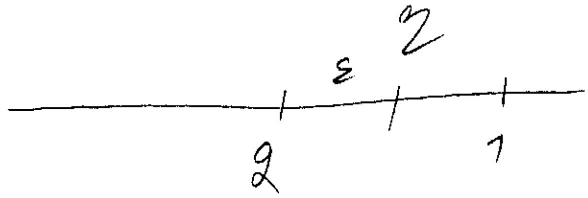
$$\left.\begin{array}{l} \sum \frac{1}{k} \text{ div;} \\ \sum \frac{1}{k(k+1)} \text{ konv.} \end{array}\right\} \text{ v obou } \frac{a_{k+1}}{a_k} \to 1.$$

Věta 10.5. [Odmocninové kritérium.] Je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$; nechť $a_k > 0$ a nechť $\sqrt[k]{a_k} \to q$.

Potom: 1. Je-li $q < 1$, řada konverguje.

2. Je-li $q > 1$, řada diverguje.

dk: 1. $\sqrt[k]{a_k} \to q < 1$:



$\exists n_0 \in \mathbb{N}$.. $k \geq n_0$: $\sqrt[k]{a_k} < q + \varepsilon = \eta$;

kde $\eta < 1$.

$\sqrt[k]{a_k} < \eta$

$\underbrace{a_k < \eta^k}$ pro $k \geq n_0$: BÚNO: pro $\forall k \in \mathbb{N}$

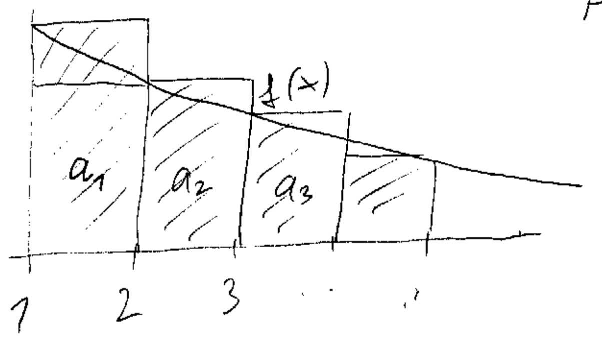
$\sum \eta^k$ konv. $\Rightarrow \sum a_k$ konv.

2. $\sqrt[k]{a_k} \to q > 1$: $\Rightarrow \sqrt[k]{a_k} \geq 1$ pro $k \geq n_0$

$a_k \geq 1$ pro $k \geq n_0$; $\Rightarrow \sum a_k = \infty$.

<u>Věta 10.6.</u> [Integrální kritérium]. Nechť $f(x)$ je spojitá, nezáporná, nerostoucí funkce v $[1, \infty)$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje, právě když $\int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty$.

<u>dk.:</u>



$F(x)$ je P.F. k $f(x)$ v $(1, \infty)$.

$$s_n \geq \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \left[F(n+1) - F(1)\right].$$

$$a_2 + a_3 + \dots + a_n = s_n - 1 \leq \int_1^{n} f(x)\,dx = F(n) - F(1).$$

$$F(n) - F(1) \leq s_n \leq 1 + F(n+1) - F(1) \quad \Big/\ n \to \infty$$

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq 1 + F(\infty-) - F(1) = 1 + \int_1^{\infty} f(x)\,dx.$$

tj.: $\int$ konečný $\iff$ $\sum$ konečná. ✓

<u>Pozn.:</u> $\int_a^b f(x)\,dx := \left[F(x)\right]_a^b = F(b-) - F(a+)$

<u>Příklady:</u> (1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$; $a \in \mathbb{R}$.

(i) $a = 1$: (harmonická řada.) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \left[\ln x\right]_1^{\infty} = \infty - 0 = \infty.$

$f(x) = \frac{1}{x}$

diverguje; $s_n \geq \ln n$.

(ii) $a \neq 1$: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^a} = \left[\frac{x^{1-a}}{1-a}\right]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-a+1}}{-a+1} - \frac{1}{a+1}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{-a+1}}{-a+1}$: 0 ; $-a+1<0$, $\underline{a>1}$; ∞ $-a+1>0$, $\underline{\underline{a<1}}$.

řešení: $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^a} \text{ konv.} \Leftrightarrow a>1}$

$$\lim_{y\to\infty} y^b = \begin{cases} 0 & b<0 \\ \infty & b>0. \end{cases}$$

Definice. Řekneme, že a_k je řádově rovno b_k, píšeme $a_k \sim b_k$, jestliže $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$ je konečná a nenulová.

Věta 10.7. [Srovnávací verze 2.] Nechť $a_k, b_k > 0$, nechť $a_k \sim b_k$. Potom řada $\sum a_k$ konverguje, právě když $\sum b_k$ konverguje.

dk.: $\underline{a_k} = \frac{a_k}{b_k} \cdot b_k \le \underline{C \cdot b_k}$

označ $c_k = \frac{a_k}{b_k}$;

$c_k \to \gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\frac{1}{c_k} \to \frac{1}{\gamma} \in \mathbb{R}$

c_k má konečnou limitu $\Rightarrow$ je omezené (Věta)

$c_k \le C$

$\frac{1}{c_k} \le \tilde{C}$ pro $\forall k$.

Věta 10.3. $\sum b_k$ konv. $\Rightarrow \sum a_k$ konv.

označ: $b_k = \frac{b_k}{a_k} \cdot a_k = \frac{1}{(a_k/b_k)} a_k$

$$= \frac{1}{c_k} a_k \le \tilde{C} \cdot a_k$$

$\sum a_k$ konverguje $\Rightarrow \sum b_k$ konverguje.

Příklady. (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{1+\sqrt{k}}}_{a_k}$ divg. ; $a_k \sim \frac{1}{\sqrt{k}}$

$$? \ \frac{a_k}{1/\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{k}}+1} \to 1$$

$$\sum \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum \frac{1}{k^{1/2}} \ \text{diver.}$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{1}{k}$;

Pozn. $a_k > 0$; $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to 1$ ¿ a_k konv. ??

Veta 10.8 [Raabeho kritérium]. Nech $a_k > 0$; nech $k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) \to p$. Potom (i) je-li $p > 1$, tak $\sum a_k$ konv.
(ii) je-li $p < 1$, tak $\sum a_k$ div.

dk. (i): $k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) \to p > 1$:

$\exists n_0, \exists \eta > 1$: $k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) > \eta \quad \forall k \geq n_0$

BÚNO: platí pre $\forall k \in \mathbb{N}$.

$$k a_k - k a_{k+1} > \eta a_{k+1} \quad \Big/ - a_{k+1}$$

$$k a_k - (k+1) a_{k+1} > (\eta - 1) a_{k+1} \quad \Big/ \sum_{k=1}^{n-1}$$

(LS) $(1 \cdot a_1 - \cancel{2a_2}) + (\cancel{2a_2} - \cancel{3a_3}) + \cancel{\cdots} + (\cancel{n a_n} - (n+1) a_{n+1})$

$= a_1 - (n+1) a_{n+1}$;

(PS) $(\eta - 1) \cdot \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} = (\eta - 1)\left[s_n - a_1\right]$

teda: $(\eta - 1) \cdot (s_n - a_1) < a_1 - \underbrace{(n+1) a_{n+1}}_{\geq 0} \leq a_1$

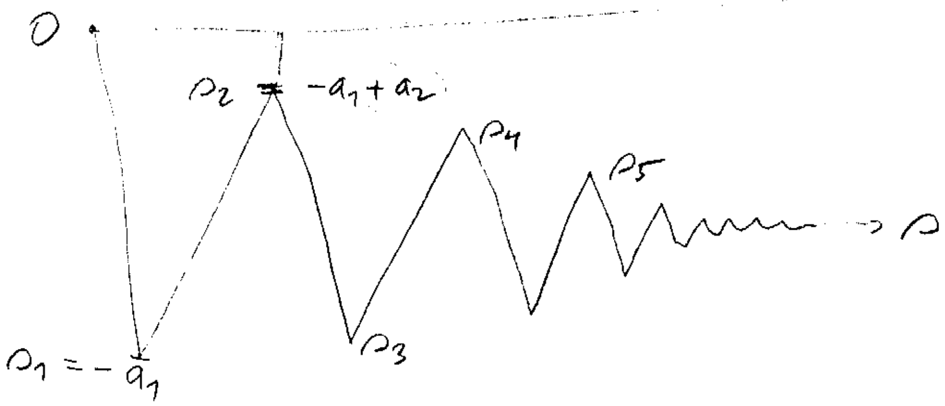
$$(\eta - 1) \cdot s_n < a_1 + (\eta - 1) a_1 \quad \Big/ : (\eta - 1) > 0$$

$$s_n < \frac{\eta}{\eta - 1} a_1$$

tj: $\{s_n\}$ je ohraničená! Lemma 10.2. $\Rightarrow$ rada konverguje.

Věta 10.9. (Leibnizovo kritérium) Nechť $a_k \geq 0$; $a_k \to 0$; ... a nechť $\underbrace{a_k \overset{(*)}{\geq} a_{k+1}}$ pro $\forall k$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ konverguje.

dk.: $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$;



1. krok: $\{s_{2n}\}$ má limitu:

(a) s_{2n} nerostoucí: $s_{2(n+1)} = s_{2n+2} = s_{2n} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2}$

$$= s_{2n} \underbrace{- a_{2n+1} + a_{2n+2}}_{\leq 0 \text{ dle } (*)} \leq s_{2n}$$

(b) analogicky: s_{2n+1} je neklesající. (d.cv.)

zjevně: $s_{2n+1} = s_{2n} + \underbrace{(-1)^{2n+1}}_{(-1)} a_{2n+1} \leq s_{2n}$;

$s_{2n+1} \geq s_1$; neboli $\{s_{2n}\}$ je zdola omezená, nerostoucí

Věta 7.2. $\Rightarrow \exists s \in \mathbb{R}$; $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$.

2. krok. Ukážeme: $s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$. ; $\varepsilon > 0$ dáno.

$\exists n_0 \; \forall n \geq n_0$, n sudé: $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$

BÚNO n_0 takové, že $|a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $\forall k \geq n_0$.

(ii) $k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right)\to p<1$

Tedy, $k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right)\leq 1$ $\quad k \geq n_0$; BÚNO: pro $\forall k\in\mathbb{N}$

$$k a_k-(k+1)a_{k+1}\leq 0 \quad \Big|\sum_{k=1}^{n-1}$$

$$1\cdot a_1-n a_n\leq 0$$

$$a_n\geq \boxed{a_1}\,\frac{1}{n}$$

kladná konstanta;

$$\sum\frac{1}{k}\ \text{div}\ \overset{V.\,10.3.}{\Longrightarrow}\ \sum a_k\ \text{div}.$$

Poznámky: (1) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$; podílové krit.: $\frac{a_{k+1}}{a_k}=\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\to 1$
neříká nic.

Raabe: $k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right)=k\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^2-1\right)=k\left(\cancel{1}+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}\cancel{-1}\right)$

jemnější než podílové; $\quad =2+\frac{1}{k}\to 2>1$: řada konv.

- pokud $k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right)\to 1$, nelze obecně nic říci
- platí: $\frac{a_{k+1}}{a_k}\to q$, pak též $\sqrt[k]{a_k}\to q$

Tj: podílové slabší: [illegible] s odmocninovým.

neděl $n \geq n_0$ libovolné!

(a) n sudé: $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

(b) n liché: $|s_n - s| \leq \underbrace{|s_n - s_{n+1}|}_{\substack{|a_{n+1}| \\ < \frac{\varepsilon}{2}}} + \underbrace{|s_{n+1} - s|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$.

__Poznámka:__ Závěr (tj. řada konv.) platí, i když předpoklady $a_k \geq 0$, $a_{k+1} \leq a_k$ platí jen pro $k \geq n_0$. (Lemma 10.1.).

__Příklady.__ 1 $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{k}}{100+k}}_{a_k} (-1)^k$

$a_k > 0$; $a_k \to 0$. ?? $\{a_k\}$ monotónní

$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{100+x}$; $f'(x) = \frac{1}{(100+x)^2} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} (100+x) - \sqrt{x} \right)$

$x > 0$:

$= \frac{1}{(100+x)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{100+x}{2} - x \right)$

$\left(50 - \frac{x}{2}\right) < 0$

$f(x)$ klesá na $(100, \infty)$.

pokud $x > 100$.

$a_k = f(k)$.. $\{a_k\}$ klesá pro $k \geq 100$.

řada konv. dle Leibnize.

~~2~~ $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1} + (-1)^k}}_{(-1)^k b_k}$; $b_k = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{k+1}}_{\geq \sqrt{2}} + (-1)^k} > 0$; $b_k \to 0$

ale ne monotónně!

$$\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1} + (-1)^k} - \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = \frac{(-1)^k \cdot (-1)^k}{(\sqrt{k+1})(\sqrt{k+1} + (-1)^k)} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{k+1}\,(\sqrt{k+1} + (-1)^k)}}_{d_k}$$

$d_k > 0$; $\quad d_k \sim \frac{1}{k}$; $\quad \frac{d_k}{1/k} = \frac{k}{\sqrt{k+1}\left(\sqrt{k+1}+(-1)^k\right)} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{k}}+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)} \to 1.$$

tedy $\sum d_k$ div

$\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ konv. (Leibniz)

tedy: původní diverguje. (aritmetika řad).

- předpoklad $\{a_k\}$ monotónní ve Větě 10.9. – podstatný?
- předpoklad $a_k, b_k > 0$ ve Větě 10.7 (srovnávací) – podstatný?

$$\underbrace{\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}+(-1)^k}}_{a_k} \sim \underbrace{\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}}_{c_k}$$

; leč. $\sum a_k$ div; $\sum c_k$ konv.

Poznámky k $\mathbb{C}$.

$z \in \mathbb{C}$ $\quad z = x + iy; \quad i^2 = -1; \quad x, y \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} x = \operatorname{Re} z \ \text{ ... reálná} \\ y = \operatorname{Im} z \ \text{ imaginární} \end{array}\right\} \text{část}$$

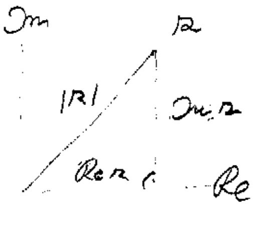
$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2};$$

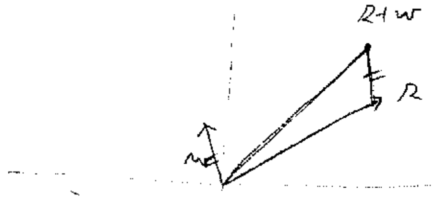
$$\bar{z} = x + iy \ \text{ .. komplexně sdružené}$$

platí: $\forall z, w \in \mathbb{C}: \quad |z+w| \le |z| + |w|$

$\forall z \in \mathbb{C}: \quad |\operatorname{Re} z| \le |z|; \quad |\operatorname{Im} z| \le |z|$

$\quad |z| \le |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$





$z_n \in \mathbb{C}: \quad \lim\limits_{n \to \infty} z_n = z \quad \text{.. pokud} \quad \lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$

platí: $z_n \to z$ právě když $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$

$$\left.\begin{array}{l} |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \\ \\ |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \end{array}\right\} \le |z_n - z| \le |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z|$$

řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$; $a_k \in \mathbb{C}$ konverguje ... $\exists s \in \mathbb{C}$ tak, že $s_n \to s$;

↑ částečné součty.

platí: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konv., právě když $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$ konvergují

a platí vzorec: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + i \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$.

Definice Řekneme, že posloupnost $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku konvergence (je cauchyovská), jestliže

$$(BC) \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) \left[m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon \right].$$

Věta 10.10. Nechť $a_n \in \mathbb{C}$. Potom je ekvivalentní

(1) posloupnost $\{a_n\}$ konverguje; tj. $\exists a \in \mathbb{C}$ t.ž. $a_n \to a$

(2) $\{a_n\}$ je cauchyovská, tj. splní (BC).

dk.: Věta 7.5. ($a_n \in \mathbb{R}$); obecně viz MAF041.

Definice Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$; $a_k \in \mathbb{C}$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku konvergence řady, jestliže

$$(BC\text{-}\check{r}) \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N}) \left[\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \right].$$

Věta 10.11. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$. Potom je ekvivalentní:

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje

(2) řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ splňuje $(BC\text{-}\check{r})$.

---

dk.: (z věty 10.): $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$;

$\sum a_k$ konv. $\Leftrightarrow \{s_n\}$ konverguje

Věta 10. $\Leftrightarrow \{s_n\}$ splní BC. $\quad s_m - s_n = \sum_{k=n+1}^{m} a_k$; tj.

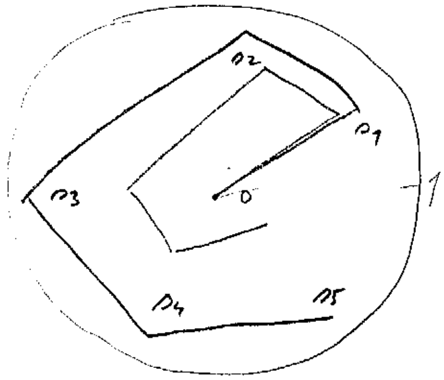
označ $m = n + p$ (BÚNO $m \geq n$)

zřejmé pozorování:

$\{s_n\}$ splní BC. $\Leftrightarrow$ a_k splní BC ř.

__Lemma 10.2.__ [Abelovo sumační lemma] Nechť $a_k \in \mathbb{C}$, nechť $\exists K>0$ takové, že $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le K$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$. Nechť $b_k \ge 0$, $b_k \ge b_{k+1}$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$. Potom $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le K \cdot b_1$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

$K = 1;\ b_1 = 1$



$s_0 = 0.$

dk.: $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$; tj. $|s_n| \le K$;

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=1}^{n} s_{k-1} b_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k b_{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1})$$

$$+ s_n b_n - \underbrace{s_0 b_1}_{=0}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1})$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le \underbrace{|s_n|}_{\le K} \cdot \underbrace{|b_n|}_{= b_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{|s_k|}_{\le K} \cdot \underbrace{|b_k - b_{k+1}|}_{= b_k - b_{k-1}}$$

$$= K \cdot b_n + \sum_{k=1}^{n-1} K \cdot (b_k - b_{k+1})$$

$$= K \cdot \left(\cancel{b_n} + (b_1 - \cancel{b_2}) + (\cancel{b_2} - \cancel{b_3}) \cancel{+} \cdots \cancel{+} (\cancel{b_{n-1}} - \cancel{b_n})\right)$$

$$= K \cdot b_1.$$

Shrnutí

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le b_1 \cdot \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| ;\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

Věta 10.12. [Dirichletovo kritérium] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $(a_k \in \mathbb{C})$ má omezené částečné součty. Nechť $b_k \geq 0$; $b_k \to 0$ a nechť $b_k \geq b_{k+1}$ pro $\forall k$. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje.

---

dk.: 1. krok. $\quad s_m = \sum_{k=1}^{m} a_k$ ... předpoklad: $\exists K>0 .. |s_m| \leq K \ \forall m$

$$\left| \sum_{k=m+1}^{m+p} a_k \right| = |s_{m+p} - s_m| \leq |s_{m+p}| + |s_m| \leq 2K \quad \forall m, p \in \mathbb{N}$$

2. krok (BC-ř) pro $\sum a_k b_k$.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m_0 \in \mathbb{N})(\forall m \geq m_0)(\forall p \in \mathbb{N}) \left[\left| \sum_{k=m+1}^{m+p} a_k b_k \right| < \varepsilon \right].$$

$\varepsilon > 0$ dáno: předpoklad: $b_k \to 0$: $\exists m_0 \in \mathbb{N} .. \ b_k < \frac{\varepsilon}{2K} \ \forall k \geq m_0$.

$m \geq m_0$, $p \in \mathbb{N}$ libovolné:

$$\left| \sum_{k=m+1}^{m+p} a_k b_k \right| \leq b_{m+1} \cdot 2K < \frac{\varepsilon}{2K} \cdot 2K = \varepsilon .$$

Lemma 10.3.
(sčítáme od $m+1$ místo od $k=1$)

Lemma 10.4. Nechť $x \neq 2k\pi$. Potom

$$(1)\quad \sum_{k=0}^{n} \sin kx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$(2)\quad \sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \cos\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Dk.: $\qquad e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx \quad \Big/ \sum_{k=0}^{n}$

$$\sum_{k=0}^{n} [e^{ix}]^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}\cdot\left(e^{-i\frac{n+1}{2}x} - e^{i\frac{n+1}{2}x}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}\right)}$$

$q = e^{ix} \neq 1 \iff x \neq 2k\pi$

$$= e^{i\frac{n}{2}x}\cdot \frac{\frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{n+1}{2}x} - e^{-i\frac{n+1}{2}x}\right)}{\frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right)} = \underbrace{e^{i\frac{n}{2}x}}_{\cos\frac{n}{2}x + i\sin\frac{n}{2}x}\cdot\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

porovnám Re, Im -- závěr.

Důsledek. $\sum_{k=1}^{n} \sin kx$, $\sum_{k=1}^{n} \cos kx$ mají $(x \neq 2k\pi)$ omezené částečné součty.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} \cos kx - \cos 0\right| \le \left|\sum_{k=0}^{n} \cos kx\right| + 1$$

$$\text{L. 10.4.} \le \frac{\left|\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\cos\frac{n}{2}x\right|}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} + 1 \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} + 1$$

≤ 1

konstanta nezávislá na n.

Podobně pro $\sum \sin kx$

Věta 10.13. [Abelovo kritérium] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $(a_k \in \mathbb{C})$ konverguje, nechť $\{b_k\} \subset \mathbb{R}$ je omezená, monotónní. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje.

Dk.: 1. krok: $\{b_k\}$ om., mon. .. V. 7.2.: $\exists b \in \mathbb{R}$; .. $b_k \to b$.

2. krok: $a_k b_k = \underbrace{a_k (b_k - b)}_{(i)} + \underbrace{a_k b}_{(ii)}$.

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje $\Rightarrow$ má omezené částečné součty.

$(b_k - b) \to 0$; monotónně.

V. 10.12. (Dirichlet) $\Rightarrow$ $\sum a_k (b_k - b)$ konv.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} b \cdot a_k$ konv.

(i) + (ii) $\Rightarrow$ $\sum a_k b_k$ konv. (aritmetika řad.)

Lemma 10.5. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$; nechť $\{c_k\} \subset \mathbb{R}$ je monotónní a $c_k \to c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom je ekvivalentní

(1) $\sum a_k$ konverguje

(2) $\sum a_k c_k$ konverguje.

Dk.: (1) $\Rightarrow$ (2). V. 10.13 ; $b_k = c_k$

$\{c_k\}$ má konečnou limitu $\Rightarrow$ je omezená.

(2) $\Rightarrow$ (1): $a_k = a_k c_k \cdot \frac{1}{c_k}$

$\sum a_k c_k$ konv; $\frac{1}{c_k}$ .. monotónní, $\to \frac{1}{c} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ je omezená...

$a_k = \boxed{a_k \cdot c_k} \cdot \frac{1}{c_k}$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $(a_k \in \mathbb{C})$ konverguje : $\exists s \in \mathbb{C}$ .. $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \to s$; $n \to \infty$

$\Leftrightarrow$ (B.C.-ř) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})\left[\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon\right]$ (*)

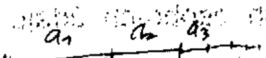
Věta 10.14 [O absolutní konvergenci] Nechť $a_k \in \mathbb{C}$, nechť $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje. Potom také $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

Dk.: cíl: (BC-ř) pro $\sum a_k$, tj. (*)

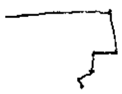
$\varepsilon > 0$ dáno: — víme: $\sum |a_k|$ konv; tj. splní BC-ř;

$$\exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|\right| < \varepsilon$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \underbrace{\leq}_{\Delta \text{ nerovnost}} \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|\right| < \varepsilon$$

Názorně:  $\sum |a_k| < \infty$

$\to \sum a_k$ konv.



Definice. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$, nechť $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (která konverguje, viz předchozí věta) se nazve absolutně konvergentní.

Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \infty$, ale $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, nazveme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ neabsolutně konvergentní.

Příklady: ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{2^k}$; $|a_k| \leq \frac{1}{2^k}$, $\sum \frac{1}{2^k}$ konv.

$\Rightarrow \sum |a_k|$ konv. (Věta ...)

$\to$ řada konv. absolutně.

② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$; konverguje neabsolutně..

Definice. Nechť $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, nechť $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je vzájemně jednoznačné zobrazení takové, že $a_k = b_{\varphi(k)}$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ se nazve přerovnáním řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Věta 10.15 Nechť $a_k \in \mathbb{C}$; nechť (1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutně konverguje. Nechť (2) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ je libovolné přerovnání řady (1). Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ absolutně konverguje a

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \quad (*)$$

---

1. krok. $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$; $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$;

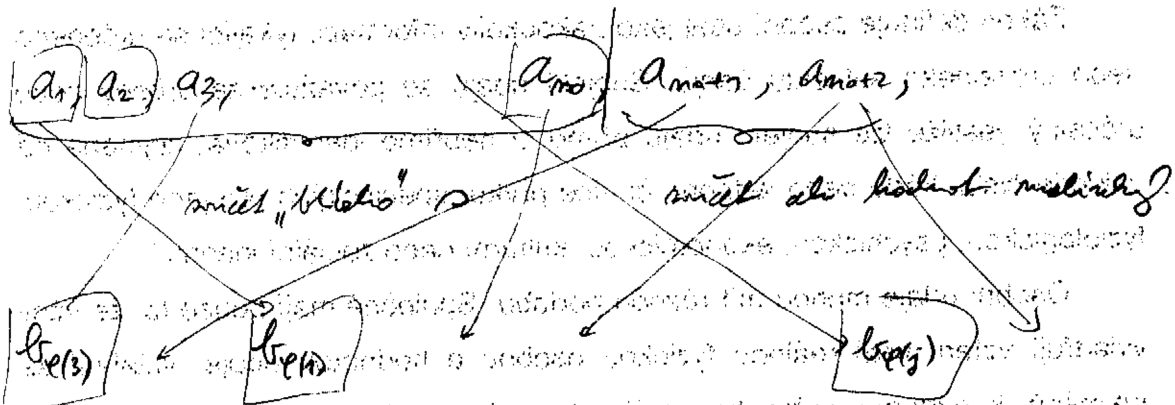
víme: $s_n \to s \in \mathbb{C}$, cíl: $t_n \to s$,

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)\ |t_n - s| < \varepsilon$.

$\varepsilon > 0$ dáno: $\exists n_1 \ldots |s_{n_1} - s| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro

$\sum a_k$ abs. konv.: $\exists n_0$, $\forall p \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ (+)

BÚNO: n_0 tak velké, že $|s_{n_0} - s| < \frac{\varepsilon}{2}$ (++)



označ: $m_0 = \max\{\varphi(k),\ k = 1, \ldots, n_0\}$

tam nejdéle se schovají $a_1, a_2, \ldots a_{n_0}$ po přemíchání

$n \geq m_0$ libovolné:
$$t_n = \sum_{l=1}^{n} b_l = \sum_{\substack{\varphi^{-1}(l) \leq n_0 \\ l \leq n}} b_l + \sum_{\substack{\varphi^{-1}(l) > n_0 \\ l \leq n}} b_l = t_n^{(1)} + t_n^{(2)}$$

položme $n \geq n_0$; $t_n^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k = s_n$

$$(2) = \sum_{\substack{k > n_0 \\ \varphi(k) \leq n_0}} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tedy: $|t_m - s| = |(1) + (2) - s| \leq |(1) - s| + |(2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \underline{\varepsilon}$.

Definice. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme $a^+ = \begin{cases} a; & \text{je-li } a > 0 \\ 0, & a \leq 0 \end{cases}$

$a^- = \begin{cases} 0; & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$ tzv. kladnou a zápornou část čísla a.

Platí: $a = a^+ - a^-$; $a^+, a^- \geq 0$.
$|a| = a^+ + a^-$; $0 \leq a^+, a^- \leq |a|$.

Lemma 10.6. Nechť $a_k \in \mathbb{R}$, nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje neabsolutně. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$.

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$; $\quad u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^+$; $\quad v_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^-$;

tedy: $s_n = u_n - v_n$.

$a_k^+, a_k^- \geq 0 \Rightarrow \{u_n\}, \{v_n\}$ .. neklesající

	$\sum a_k^+$	$\sum a_k^-$	$\sum a_k$
(1)	$<+\infty$	$<+\infty$	konv. abs.
(2)	$=+\infty$	$<+\infty$	$=+\infty$
(3)	$<+\infty$	$=+\infty$	$-\infty$
(4)	$=+\infty$	$=+\infty$	

$0 \leq |a_k| \leq a_k^+ + a_k^-$;

(1) $\Rightarrow \sum |a_k| < \infty$.

(2): $s_n = \underbrace{u_n}_{\downarrow\ +\infty} - \underbrace{v_n}_{\text{má konečnou limitu}} \longrightarrow +\infty$

Poznámka. Úvaha: sečtu kladné, pak záporné a dám to dohromady,

tj:
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- .$$

platí pro abs. konv.: $\sum |a_k^+|$, $\sum a_k^-$ konv.

neplatí pro neabs. konv.: vyjde „$\infty - \infty$".

Věta 10.16. Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ je libovolná posloupnost taková, že $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$. Nechť $s \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo. Potom existuje $\{b_k\}$ přerovnání $\{a_k\}$ takové, že
$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = s .$$

1. krok: beru kladné členy, dokud součet nepřesáhne s.

2. krok: beru záporné členy, dokud součet neklesne pod s.

opakuji:

díky $\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+}$ $= \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ se celý algoritmus opakuje nekonečněkrát.

? $s_n \to s$: $\varepsilon > 0$ dáno: $|a_k| \geq \varepsilon$ jen pro konečně členů

(neboť $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$).

– od nějakého indexu přidáváme jen čísla $|a_k| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ s_n leží v $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$.

nemohu přelézt s více než o ε

klesnout pod $s - \varepsilon$.

Věta 10.17 [Cauchyův součin řad] Nechť řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergují absolutně. Označme $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$; pro $k = 0, 1, \dots$ Potom

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

[illegible]

---

dk.: $(a_0 + a_1 + a_2 + \dots) \cdot (b_0 + b_1 + b_2 + \dots) = a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_0 b_2 +$
$+ a_1 b_0 + a_1 b_1 + a_1 b_2 + \dots$

$$\begin{array}{cccc}
a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & \dots \\
a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots \\
a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

← srovnám do řady

$$\begin{array}{ccc}
1 & 4 & 9 \\
2 & 3 & 8 \\
5 & 6 & 7 \\
10 & &
\end{array}$$

25, 36, m^2

$\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$: $a_0 b_0, a_1 b_0, a_1 b_1, a_0 b_1, a_2 b_0, a_2 b_1 \dots$

1. krok: $\sum d_k$ konv. abs.

$$\sum_{k=1}^{m^2} |d_k| = \sum_{i,j=0}^{m-1} |a_i||b_j| = \left(\sum_{i=0}^{m-1} |a_i|\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m-1} |b_j|\right)$$

$$\leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|\right)$$

konečná čísla ($\sum |a_k|$, $\sum |b_k|$ konv.)

$\Rightarrow \sum |d_k| \dots$ omezené částečné součty

L.10.2 $\Rightarrow \sum |d_k|$ konv.

$\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ konv. absolutně.

2. krok: $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$; $t_n = \sum_{j=0}^{n} b_j$; $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} d_k$.

víme: $s_n \to s$ (součet (1))

$t_n \to t$ součet (2);

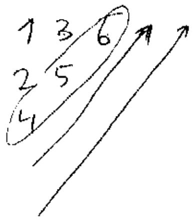
$\sigma_n \to \sigma$ sudělu: $\sigma = t \cdot s$.

jako výše: $$\sigma_{n^2} = \sum_{k=1}^{n^2} d_k = \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j\right) \quad \Big/ \; n \to \infty$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\sigma \qquad\qquad s \qquad\qquad t.$$

3. krok: $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.. přerovnání řady $\{d_k\}$.



e_k: $a_0 b_0$, ... $\to$ sčítám: c_0

$a_1 b_0, a_0 b_1$ ... c_1

$a_2 b_0, a_1 b_1, a_0 b_2$ ... c_2

V. 10.15.: $$\sum_{k=1}^{\infty} d_k = \sum_{k=1}^{\infty} e_k = \sigma.$$

pozoruji: $\sum_{k=0}^{n-1} c_k =$ prvních $(1+2+3+\dots n)$ členů e_k

$$= \sum_{k=1}^{n\frac{(n+1)}{2}} e_k \quad \Big/ \; n \to \infty$$

$$\downarrow$$

$$\sigma$$

tedy $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konv. a má součet $\sigma = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$.

~~4. krok:~~ $\sum c_k$ abs. konv.