9. Určitý integrál – dokončení.

Definice. Je-li dána $f(x) : (a, b) \to \mathbb{R}$, pak $F(x)$ se nazývá primitivní funkce (zkratka PF) k $f(x)$ v (a, b), pokud $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$.

Definice. Nechť $F(x)$ je definována v (a, b). Má-li výraz

$$F(b-) - F(a+) = \lim_{x \to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x)$$

smysl, nazýváme ho zobecněným přírustkem funkce $F(x)$ od a do b. Značíme $\big[F(x)\big]_a^b$ nebo $\big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b}$.

Poznámky.

• je-li $F(x)$ spojitá v $[a, b]$, je $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$.

• situace, kdy $\big[F(x)\big]_a^b$ nemá smysl: 1. některá z limit $F(b-)$, $F(b+)$ neexistuje, 2. tyto limity sice existují, ale výraz $F(b-) - F(a+)$ je typu $\infty - \infty$.

Definice. Nechť $f(x)$ je definována v (a, b), a nechť $F(x)$ je PF k $f(x)$ v (a, b). Potom Newtonův integrál funkce $f(x)$ od a do b definujeme jako

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b,$$

má-li pravá strana smysl. Je-li $b < a$, definujeme $(\mathcal{N})\int_a^b f = -(\mathcal{N})\int_b^a f$, a dále klademe $(\mathcal{N})\int_a^a f = 0$.

Příklady. ① $(\mathcal{N})\int_0^\infty \frac{dx}{x} = \infty$

② $(\mathcal{N})\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3$

③ $(\mathcal{N})\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ neexistuje

Terminologie a značení. Množinu těch funkcí, pro které Newtonův integrál od a do b existuje a je konečný, značíme $\mathcal{N}(a, b)$. Množinu těch funkcí, pro které integrál existuje (a může být konečný nebo nekonečný), značíme $\mathcal{N}^*(a, b)$.

Lemma 9.1. (1) Nechť $\phi(x)$ je spojitá v intervalu I, nechť $\phi'(x) = 0$ pro $\forall x$ vnitřní bod I. Potom $\exists c \in \mathbb{R}$ tak, že $\phi(x) = c$ pro $\forall x \in I$.
(2) Nechť $F(x)$, $G(x)$ jsou spojité v intervalu I, nechť $F'(x)$, $G'(x)$ existují, jsou konečné a rovnají se pro $\forall x$ vnitřní bod I. Potom $\exists c \in \mathbb{R}$ tak, že $F(x) = G(x) + c$ pro $\forall x \in I$.

Důsledek. Definice Newtonova integrálu je korektní.

Věta 9.8. [Základní vlastnosti N.i.] Nechť $f(x)$, $g(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$. Potom
① [linearita]

$$(\mathcal{N})\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\, dx + \beta(\mathcal{N})\int_a^b g(x)\, dx\,,$$

má-li pravá strana smysl.
② [intervalová aditivita] Nechť $f(x)$ je spojitá v bodě $c \in (a,b)$. Potom

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\, dx = (\mathcal{N})\int_a^c f(x)\, dx + (\mathcal{N})\int_c^b f(x)\, dx\,,$$

má-li pravá strana smysl.
③ [monotonie] (a) Je-li $f \geq 0$, pak

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\, dx \geq 0\,.$$

(b) Obecněji, je-li $f(x) \geq g(x)$ pro $x \in (a,b)$, je

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\, dx \geq (\mathcal{N})\int_a^b g(x)\, dx\,.$$

(c)

$$\left|(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq (\mathcal{N})\int_a^b |f(x)|\, dx\,.$$

Věta 9.9. [Per-partes]

$$(\mathcal{N})\int_a^b u'(x)v(x)\, dx = [u(x)v(x)]_a^b - (\mathcal{N})\int_a^b u(x)v'(x)\, dx\,,$$

má-li pravá strana smysl.

Věta 9.10. [Substituce pro N.i.] Nechť $f(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$, nechť $\varphi(t) : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ je ryze monotónní, vzájemně jednoznačná funkce, a nechť $\varphi'(t)$ existuje konečná a nenulová všude v (α,β). Potom

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\, dx = (\mathcal{N})\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\, dt\,,$$

v tom smyslu, že má-li smysl jedna strana, má ho i druhá a rovnají se.