12. Diferenciální rovnice.

Úmluva. V celé kapitole jsou I, J otevřené intervaly.

Definice. Nechť $F(x, y, z_1, \dots, z_n)$ je reálná funkce $(n+2)$ proměnných, která není konstantní vůči z_n. Potom výraz

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

nazveme obyčejnou diferenciální rovnicí řádu n pro neznámou funkci y proměnné x.
Řešením rovnice (1) rozumíme funkci $y(x) : I \to \mathbb{R}$, která má vlastní derivace až do řádu n všude v I, a

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

pro každé $x \in I$.

Definice. Nechť $y : I \to \mathbb{R}$, $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ jsou dvě řešení, přičemž interval $\tilde{I}$ je striktně větší než I, a $y(x) = \tilde{y}(x)$ pro $\forall x \in I$.
Potom $\tilde{y}$ se nazve prodloužením y, a naopak y se nazve restrikcí $\tilde{y}$.

Příklad. Funkce $y_1(x) = 0$, $x \in (-\infty, 0)$, $y_2(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ a

$$y_3(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

jsou všechny řešení rovnice $y' = 2\sqrt{y}$. Vidíme, že y_2, y_3 jsou dvě různá prodloužení řešení y_1. V bodě $x = 0$ nastává větvení (nejednoznačnost).

Definice. Obyčejnou diferenciální rovicí 1. řádu rozumíme výraz

$$F(x, y, y') = 0\,, \tag{2}$$

kde $F = F(x, y, z)$ je nekonstatní vůči z. Řešením rovnice (2) je funkce $y(x) : I \to \mathbb{R}$, přičemž $y'(x)$ existuje vlastní všude v I a $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ pro $\forall x \in I$.

Poznámka. Připomeňme z minulého semestru:
<u>Věta.</u> Nechť $f(x) : I \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak existuje $F(x) : I \to \mathbb{R}$ primitivní funkce (zkratka p.f.) k $f(x)$, tj. $F'(x) = f(x)$ pro $\forall x \in I$. Značíme též $F(x) = \int f(x)\,dx$.
<u>Věta.</u> Nechť $F(x)$, $G(x)$ mají vlastní derivace v intervalu I. Potom je ekvivalentní

(i) $F'(x) = G'(x)$ pro $\forall x \in I$
(ii) $\exists c \in \mathbb{R}$ tak, že $F(x) = G(x) + c$ pro $\forall x \in I$

Definice. Lineární ODR 1. řádu rozumíme

$$y' + a(x)y = b(x)\,. \tag{3}$$

Věta 12.1. [Řešení lineární ODR 1. řádu.] Je dána rovnice (3). Nechť $a(x)$, $b(x)$ jsou spojité v I, nechť $A(x) = \int a(x)\,dx$, $B(x) = \int b(x) \exp A(x)\,dx$ v I. Nechť $c \in \mathbb{R}$ je libovolné. Potom

$$y(x) = \exp(-A(x))\big[B(x) + c\big]$$

je řešení rovnice (3) v I. Naopak: všechna řešení rovnice (3) mají tento tvar.

Poznámka. Výraz $\exp A(x)$ se nazývá integrační faktor.

Příklad. rovnice: $y' + y\cos x = \exp(-\sin x)$, i.f.: $\exp \sin x$, obecné řešení: $y(x) = [x + c]\exp(-\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Definice. Rovnice

$$y' = g(y)f(x) \tag{4}$$

se nazývá rovnice se separovanými proměnnými.

Věta 12.2. [Řešení rce se sep. prom.] Je dána rovnice (4). Nechť $f(x)$ je spojitá v I, nechť $g(y)$ je spojitá a nenulová v J. Nechť $F(x)$ resp. $G(y)$ jsou p.f. k $f(x)$ resp. $1/g(y)$ v I resp. v J.
Označ $G_{-1}(z)$ funkci inverzní ke $G(y)$. Nechť $\tilde{I} \subset I$ a $c \in \mathbb{R}$ jsou zvoleny tak, že $F(x) + c$ leží v definičním oboru $G_{-1}(z)$ (tj. v $G(J)$) pro $\forall x \in \tilde{I}$.
Potom funkce

$$y(x) = G_{-1}(F(x) + c)\,, \quad x \in \tilde{I}$$

je řešení rovnice (4).

Poznámka. Předpoklad "F(x)+c leží oboru hodnot G" je potřeba hlídat – formální výpočet totiž může vést k řešení, které řešením není.

Příklad. Rovnice $y' = 2\sqrt{|y|}$. Aplikací předchozí věty nacházíme dva typy řešení:
1. typ: $I = \mathbb{R}$, $J = (-\infty, 0)$, $G(y) = -\sqrt{-y}$, $F(x) = x$. Tedy $G(J) = (-\infty, 0)$, $\tilde{I} = (-\infty, -c)$. nalezené řešení $y(x) = -(x + c)^2$, $x \in (-\infty, -c)$.
Pozor: pro $x > -c$ daná funkce NENÍ řešení rovnice.
2. typ: podobně - $J = (0, \infty)$, $G(y) = \sqrt{y}$, $G(J) = (0, \infty)$. Nalezené řešení $y(x) = (x + c)^2$, $x \in (-c, \infty)$. (Opět není řešení pro $x < -c$).
3. typ: zjevně $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ je řešení.

Poznámka. V dalším se zaměříme na rovnici tvaru

$$y' = f(x, y)\,, \tag{5}$$

- tzv. rovnice vyřešená vzhledem k derivaci - která je z hlediska teorie "šikovnější" než obecný tvar (2).

Lemma 12.1. [O napojování.] Nechť $y_1(x) : (a, x_0) \to \mathbb{R}$, $y_2(x) : (x_0, b) \to \mathbb{R}$ jsou řešení rovnice (5) $y' = f(x, y)$. Nechť $\lim_{x \to x_0-} y_1(x) = y_0 = \lim_{x \to x_0+} y_2(x)$. Nechť $f(x, y)$ je spojitá v bodě $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Potom funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, x_0) \\ y_2(x), & x \in (x_0, b) \\ y_0, & x = x_0 \end{cases}$$

je řešením rovnice (5) v celém (a, b).

Příklad. Funkce

$$y(x) = \begin{cases} -(x + c)^2, & x < -c \\ 0, \ x \geq -c \end{cases}$$

(tj. napojení řešení typu 1 a 3) je řešení rovnice $y' = 2\sqrt{|y|}$ v $\mathbb{R}$.
Lemma 12.1 řeší vlastně jedinou věc: že rovnice je splněna v bodě napojení (jinde je to jasné) a říká, že to je zaručeno, napojím-li spojitě. Srovnej s Lemmatem 6.3 v minulém semestru.

Poznámka. Obecný postup řešení rovnice se separovnými proměnnými (4):

- pokud $y_0 \in \mathbb{R}$ je takové, že $g(y_0) = 0$, pak $y(x) = y_0$ je tzv. singulární (stacionární) řešení. Platí na každém intervalu, na němž je definována $f(x)$.
- pomocí Věty 12.2 hledám řešení $y(x) : I \to J$, kde $f(x)$ je spojitá I, $g(y)$ je spojitá, nenulová v J.
- pomocí Lemmatu 12.1 nalezená řešení napojuji.

Definice. Řekneme, že řešení $y(x)$ rovnice (5) prochází bodem $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, jestliže (i) definiční obor $y(x)$ obsahuje bod x_0 a (ii) $y(x_0) = y_0$.
V bodě (x_0, y_0) nastává větvení, jestliže exitují dvě řešení $y_1(x)$, $y_2(x)$, která tímto bodem procházejí, avšak která se neshodují na žádném okolí x_0. Tj. $\forall \delta > 0 \ \exists \tilde{x} \in U(x_0, \delta)$ tak, že $y_1(\tilde{x}) \neq y_2(\tilde{x})$.

Příklad. Pro rovnici $y' = 2\sqrt{|y|}$ nastává v bodě $(0, 0)$ větvení: $y_1(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$ a $y_2(x) = x^2$ pro $x > 0$ a $= 0$ pro $x \leq 0$.

Poznámka. Jestliže $y(x)$ řešení rovnice (5) prochází bodem (x_0, y_0), pak nutně $y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0)$. Důsledek: pokud stejným bodem prochází více řešení, mají zde stejnou tečnu - jejich grafy se "dotýkají", nemohou se "křížit".

*** Věta 12.3.** Nechť $f(x, y)$ je spojitá na okolí bodu (x_0, y_0). Potom bodem (x_0, y_0) prochází alespoň jedno řešení rovnice (5).
Podrobně: existuje $\delta > 0$ a funkce $y(x) : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$, která řeší (5) a splňuje $y(x_0) = y_0$.

*** Věta 12.4.** Nechť funkce $f(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ jsou spojité na okolí bodu (x_0, y_0). Potom bodem (x_0, y_0) prochází řešení (5), které je lokálně jednoznačné.
Podrobně: existuje $y(x)$ řešení (5) procházející (x_0, y_0), a je-li $\tilde{y}(x)$ jiné řešení, procházející (x_0, y_0), tak existuje $\delta > 0$ tak, že $y(x) = \tilde{y}(x)$ pro $\forall x \in U(x_0, \delta)$.
Jinak řečeno: v bodě (x_0, y_0) nenastává větvení.

Příklad. Pro rovnici $y' = 2\sqrt{|y|}$ zaručují výše uvedené věty, že (i) každým bodem $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ prochází alespoň jedno řešení a (ii) větvení může nastat jen v bodech $(x_0, 0)$.

Definice. Řešení $y(x) : I \to \mathbb{R}$ dané ODR se nazve maximální, jestliže ho nelze prodloužit, tj. neexistuje $\tilde{y}(x) : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ takové řešení, že $I \subset \tilde{I}$ a $y(x) = \tilde{y}(x)$ pro $\forall x \in I$.

Definice. Náš cíl: najít všechna maximální řešení.
Řešení $y(x) : (a, b) \to \mathbb{R}$ rovnice (5) určitě nejde prodloužit za bod $x = b$, jestliže (i) $b = +\infty$ nebo (ii) $y(x) \to \infty$ pro $x \to b-$ a nebo (iii) $y(x) \to y_0$ pro $x \to b-$, avšak bod (b, y_0) neleží v definičním oboru funkce $f(x, y)$.
Jak poznám, že mám všechna řešení? Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená a funkce $f(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ jsou spojité v Ω. Jestliže najdu nějaká řešení $\{y_c(x)\}_{c \in \mathbb{R}}$ taková, že jejich grafy vyplní celou Ω, pak díky Větě 12.4. jsou to zároveň všechna řešení, která se v Ω mohou vyskytnout.

Definice. Rovnice $y' = f(x, y)$ se nazve homogenní, jestliže funkce $f(x, y)$ splňuje $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ pro $\forall \lambda \neq 0$.
Postup řešení: položíme $y(x) = xz(x)$ – rovnice přejde na rovnici se separovnými proměnnými (pro novou neznámou funkci $z(x)$.) Pozor na bod $x = 0$.

Příklad. $x^2 y' + xy = 2y^2$.

Definice. Rovnice $y' + a(x)y = b(x)y^\alpha$, kde $\alpha \neq 0$, 1, se nazývá Bernoulliho rovnice.
Postup řešení: substitucí $z(x) = \big[y(x)\big]^{1-\alpha}$ převedeme na lineární rovnici (pro novou neznámou funkci $z = z(x)$).

Příklad. $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$, tj. $\alpha = 1/2$, $z = \sqrt{y}$ vede na $z' - 2z/x = x/2$.

Definice. Systémem n ODR prvního řádu rozumíme

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{y}), \tag{6}$$

tj. rovnice $y_i'(x) = F_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$, $i = 1, \dots, n$, kde $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n) : I \to \mathbb{R}^n$ jsou neznámé funkce, a $\boldsymbol{F} = (F_1, \dots, F_n) : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou dány. Přirozená počáteční podmínka je

$$\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{\eta}, \tag{7}$$

neboli $y_i(x_0) = \eta_i$, $i = 1, \dots, n$, kde $x_0 \in I$ a $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$ jsou předepsány.

Poznámka. Platí věta analogická V.12.4: pokud $\boldsymbol{F}$ má rozumné vlastnosti, pak pro libovolně zvolenou počáteční podmínku (7) existuje (jediné) řešení (6), definované na jistém okolí bodu x_0.

Definice. Rovnicí n-tého řádu, vyřešenou vůči nejvyšší derivaci, rozumíme

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{8}$$

Věta 12.5. Funkce $y(x) : I \to \mathbb{R}$ je řešením rovnice (8), právě když funkce $\boldsymbol{z}(x) : I \to \mathbb{R}^n$, kde

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y'(x) \\ &\vdots \\ z_n(x) &= y^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

řeší systém

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= z_3 \\ &\vdots \\ z_{n-1}' &= z_n \\ z_n' &= f(x, z_1, \dots, z_n). \end{aligned}$$

Počáteční podmínka $\boldsymbol{z}(x_0) = \boldsymbol{\eta}$ odpovídá počáteční podmínce pro y tvaru $y(x_0) = \eta_1$, $y'(x_0) = \eta_2$, $\dots$ $y^{(n-1)}(x_0) = \eta_n$.

Poznámka. Přirozená počáteční podmínka (tj. taková, pro níž existuje právě jedno řešení) pro rovnici 1. řádu je určená hodnotou řešení v jednom bodě.

Pro rovnici n-tého řádu je přirozená počáteční podmínka předepsat hodnotu a první až (n-1)-tou derivaci v jednom bodě.

Definice. Lineární diferenciální rovnicí řádu n rozumíme

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)\,. \tag{9}$$

Terminologie: $a_i(x)$ ... koeficienty rovnice, $f(x)$ ... pravá strana.
Značení $C(I)$ ... funkce $y(x) : I \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, které jsou spojité; $C^k(I)$ ... funkce $y(x)$, které jsou spojité a jejichž derivace až do řádu k včetně jsou také spojité na I.
Řešením rovnice (9) rozumíme funkce $y(x) \in C^n(I)$, která splňuje (9) pro $\forall x \in I$.

Klíčový předpoklad (P). O rovnici (9) budeme předpokládat, že $a_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$ a $f(x)$ jsou spojité na I (otevřený interval), navíc $a_0(x) \neq 0$ pro $\forall x \in I$.

*** Věta 12.6.** Je dána rovnice (9) a platí předpoklad (P). Nechť $x_0 \in I$ a $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$ jsou libovolné. Potom existuje jediná funkce $y(x) \in C^n(I)$, která řeší (9) na celém I, a splňuje počáteční podmínky

$$\begin{aligned} y(x_0) &= \eta_1 \\ y'(x_0) &= \eta_2 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= \eta_n \end{aligned}$$

Poznámka. Rovnice řádu n ... n počátečních podmínek. Existence řešení je zaručena na celém I (obor spojitosti a_i, f) – to je typické pro lineární rovnice.
Pro nelineární rovnice můžeme obecně čekat jenom lokální existenci řešení.

Značení. Při značení $\mathscr{L}[y] = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(n-k)}$ můžeme rovnici (9) přepsat jako $\mathscr{L}[y] = f$.
Speciální případ $f = 0$ je tzv. homogenní úloha

$$\mathscr{L}[y] = 0\,. \tag{10}$$

Věta 12.7. Nechť platí (P). Potom množina $\mathscr{H}$ všech řešení homogenní úlohy (10) tvoří lineární podprostor dimenze n v prostoru $C^n(I)$.

Definice. Fundamentálním systémem (F.S.) rovnice (9) rozumíme libovolnou bázi prostoru $\mathscr{H}$.

Tj. F.S. je n-tice funkcí $\{y_1, \ldots, y_0\} \subset \mathscr{H}$ taková, že je-li $\tilde{y}(x)$ libovolné řešení úlohy (10), tak existují (jednoznačně určené) konstanty $c_1, \ldots, c_n$ takové, že $\tilde{y}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(x)$.

Příklad. Funkce $\{\frac{\cos x}{x}, \frac{\sin x}{x}\}$ tvoří F.S. pro úlohu $y'' - \frac{2}{x}y' + y = 0$.

Věta 12.8. Nechť platí (P). Potom pro množinu $\mathscr{N}_f$ všech řešení úlohy (9) platí

$$\mathscr{N}_f = \left\{y_p + y;\ y \in \mathscr{H}\right\},$$

kde y_p je jedno libovolně, pevně zvolené (tzv. partikulární) řešení úlohy (9).

Dodatek. Je-li y_p libovolné řešení úlohy (9), a $\{y_1, \ldots, y_0\} \subset \mathscr{H}$ je fundamentální systém, pak obecné řešení úlohy (9) má tvar

$$y_o(x) = y_p(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(x),$$

kde $c_j \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Poznámka. Obecný návod, jak nalézt fundamentální systém nebo partikulární řešení, neexistuje. Následující věta ale ukazuje, že můžeme nalézt řešení nehomogenní úlohy, pokud už máme fundamentální systém.

Lemma 12.2. Nechť platí (P) a nechť $\{y_1, \ldots, y_0\}$ je fundamentální systém úlohy (9). Pro $x \in I$ definuji matici $U(x) = \{U_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n}$ jako $U_{ij}(x) = y_j^{(i-1)}(x)$.
Potom pro každé $x \in I$ je $U(x)$ regulární matice.

Věta 12.9. [Variace konstant.] Je dána rovnice (9) $\mathscr{L}[y] = f$ a platí (P). Nechť $\{y_1, \ldots, y_0\}$ je fundamentální systém. Nechť $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ splňují pro $\forall x \in I$ soustavu

$$\begin{aligned}
c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + \ldots c_n'(x)y_n(x) &= 0\\
c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \ldots c_n'(x)y_n'(x) &= 0\\
&\ \vdots\\
c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \ldots c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) &= 0\\
c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) &= \frac{f(x)}{a_0(x)}.
\end{aligned}$$

Potom funkce $y(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x)y_j(x)$ je řešením úlohy (9).

Poznámka. Soustava ve Větě 12.9. má tvar $U(x)C(x) = B(x)$, kde $U(x)$ je regulární matice (Lemma 12.2.), $C(x) = (c_1'(x), \ldots c_n'(x))$ je neznámý vektor a $B(x) = (0, \ldots, 0, \frac{f(x)}{a_0(x)})$. Můžeme tedy spočíst $c_j'(x)$ a integrací získat $c_j(x)$.

Definice. Rovnice

$$b_0 y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \dots + b_n y = f(x)\,, \tag{11}$$

kde $b_j \in \mathbb{C}$ jsou konstanty ($b_0 \neq 0$), se nazývá lineární ODR řádu n s konstantními koeficienty. Značíme $\mathscr{K}[y] = \sum_{k=0}^{n} b_k y^{(n-k)}$. Rovnice

$$\mathscr{K}[y] = 0 \tag{12}$$

je odpovídající homogenní úloha.

Poznámka. Hlavní myšlenka teorie rovnic s konstantními koeficienty: hledejme řešení tvaru $y(x) = \exp(\lambda x)$. Pozoruji, že $\mathscr{K}[\exp(\lambda x)] = p(\lambda)\exp(\lambda x)$, kde

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} b_k \lambda^{n-k}\,. \tag{13}$$

Tedy: je-li λ_0 kořenem polynomu $p(\lambda)$, tak funkce $\exp(\lambda_0 x)$ je řešením homogenní úlohy.

Definice. Polynom (13) se nazývá charakteristický polynom rovnice (11).

Poznámky. Každý polynom $p = p(\lambda)$ lze napsat jako

$$p(\lambda) = a(\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

kde $\lambda_1, \dots \lambda_s \in \mathbb{C}$ jsou navzájem různé kořeny, a $n_1, \dots n_s$ jsou jejich násobnosti.
Platí: $n_1 + \dots + n_s$ rovná se stupeň polynomu.
Dále: λ_0 je kořen polynomu $p(\lambda)$ násobnosti k, právě když $0 = p(\lambda_0) = p'(\lambda_0) = \dots = p^{(k-1)}(\lambda_0)$, avšak $p^{(k)}(\lambda_0) \neq 0$.
Ke stupni polynomu: $a\lambda + b$, kde $a \neq 0$, je polynom stupně 1. Nenulová konstanta je polynom stupně 0. Identicky nulová funkce se považuje za polynom záporného stupně.

Lemma 12.3. Je dán operátor $\mathscr{K}[y]$ a $p(\lambda)$ je jeho charakteristický polynom. Potom pro $\forall l \geq 0$ celé

$$\mathscr{K}[x^l \exp(\lambda x)] = \exp(\lambda x) \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} p^{(j)}(\lambda) x^{l-j}\,.$$

Důsledek. Je-li λ_0 kořen char. polynomu násobnosti k, pak funkce $\exp(\lambda_0 x)$, $x\exp(\lambda_0 x)$, …, $x^{k-1}\exp(\lambda_0 x)$ řeší homogenní úlohu (12).

Poznámka. Připomeňme tvrzení (které plyne např. jako speciální případ Věty 11.6): je-li $q(x)$ polynom a $q(x) \equiv 0$, tak nutně $q(x)$ je triviální (tj. má všechny koeficienty nulové.)
Totéž řečeno jinak: funkce $1, x, x^2, \dots x^k, \dots$ jsou lineárně nezávislé.
Následující lemma můžeme chápat jako zobecnění tohoto faktu.

Lemma 12.4. Nechť $\lambda_j \in \mathbb{C}$ jsou vzájemně různá čísla, nechť $q_j(x)$ jsou polynomy. Jestliže $\sum_{j=1}^m q_j(x)\exp(\lambda_j x) \equiv 0$, pak nutně $q_j(x) \equiv 0$ pro $\forall j$.

Věta 12.10. [F.S. pro $\mathscr{K}[y] = 0$.] Je dán operátor $\mathscr{K}[y]$ a $p(\lambda)$ je jeho charakteristický polynom. Nechť λ_j, $j = 1, \dots, s$, jsou jeho kořeny, a n_j, $j = 1, \dots s$, jsou odpovídající násobnosti. Potom funkce

$$x^l \exp(\lambda_j x) \qquad j = 1, \dots s,\ l = 0, \dots n_j - 1$$

tvoří fundamentální systém homogenní úlohy (12).

Příklad. $y^{(5)} - y^{(4)} - 5y^{(3)} + y'' + 8y' + 4y = 0$, charakteristický polynom:

$$p(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 - 5\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda + 4 = (\lambda+1)^3(\lambda-2)^2$$

-1 je 3-násobný, 2 je 2-násobný kořen, $\implies$ fundamentální systém:

$$\big\{ \exp(-x), x\exp(-x), x^2\exp(-x), \exp(2x), x\exp(2x) \big\}$$

obecné řešení:

$$K_1\exp(-x) + K_2 x\exp(-x) + K_3 x^2\exp(-x) + K_4\exp(2x) + K_5 x\exp(2x)$$

kde $K_i \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Poznámka. V případě, že $p(\lambda)$ má komplexní kořeny:
1. možnost: celou teorii uvažujeme "komplexní", tj. hledáme řešení $y(x) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, počáteční podmínka $y^{(j-1)}(x_0) = \eta_j$, $j = 1, \dots, n$, kde $\eta_j \in \mathbb{C}$. Takto to funguje a nevadí mi komplexní b_k, ani komplexní kořeny.
2. možnost: chceme "reálnou" variantu, tj. hledáme jen řešení $y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a předpokládáme $b_k \in \mathbb{R}$ (reálné koeficienty v rovnici.)
Z reálnosti b_k plynou dvě věci:
(i) $\lambda \in \mathbb{C}$ je kořen $p(\lambda)$ násobnosti $k \implies \overline{\lambda}$ je kořen násobnosti k
(ii) funkce $y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ řeší $\mathscr{K}[y] = 0 \implies$ funkce $\operatorname{Re} y(x)$, $\operatorname{Im} y(x)$ řeší $\mathscr{K}[y] = 0$.
Je-li $\lambda = \alpha + i\beta$ kořen násobnosti k, získáme dle V.12.10 funkce

$$\begin{aligned} &\exp(\lambda x),\ x\exp(\lambda x),\ \dots, x^{k-1}\exp(\lambda x) \\ &\exp(\overline{\lambda} x),\ x\exp(\overline{\lambda} x),\ \dots, x^{k-1}\exp(\overline{\lambda} x) \end{aligned}$$

místo nich ale vezmeme jejich reálné a imaginární části (s užitím $\exp(\lambda x) = \exp(\alpha x)[\cos\beta x + i\sin\beta x]$)

$$\exp(\alpha x)\cos\beta x,\ x\exp(\alpha x)\cos\beta x,\ \dots, x^{k-1}\exp(\alpha x)\cos\beta x$$
$$\exp(\alpha x)\sin\beta x,\ x\exp(\alpha x)\sin\beta x,\ \dots, x^{k-1}\exp(\alpha x)\sin\beta x$$

- tak dojdeme k "reálné" verzi fundamentálního systému.

Příklad. $y'' + y = 0$, $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, kořeny $\pm i$. F.S.=$\{\exp(ix), \exp(-ix)\}$. Reálná verze F.S.: $\{\cos x, \sin x\}$.

Definice. Rovnice
$$\mathscr{K}[y] = q(x)\exp(\lambda_0 x)\,, \tag{14}$$
kde $q(x)$ je polynom, se nazývá rovnice se speciální pravou stranou.
Pravá strana je ten typ funkce, kterým se zabývá Lemma 12.3., a ze kterých umíme sestavit fundamentální systém (Věta 12.10.) Uvidíme, že v této situaci lze řešení uhodnout jako funkci předepsaného tvaru.

Poznámka. Nechť $q_s(x)$, $s = 0, \dots m$ jsou polynomy, kde stupeň q_s je s. Potom pro libovolný polynom $q(x)$ stupně m existují (jednoznačně určené) konstanty c_s, $s = 0, \dots m$ takové, že $q(x) = \sum_{s=0}^{m} c_s q_s(x)$.

Věta 12.11. Je dána úloha (14), kde $q(x)$ je polynom stupně m. Nechť $k \geq 0$ vyjadřuje násobnost λ_0 coby kořene charakteristického polynomu ($k = 0$ pokud λ_0 není kořen.)
Potom existuje $r(x)$ polynom stupně m takový, že $y(x) = x^k r(x)\exp(\lambda_0 x)$ je řešení (14).

Příklad. $y'' - y' - 2y = (x+1)\exp(2x)$. $\lambda_0 = 2$ je jednoduchý kořen char. polynomu, stupeň $q(x) = x + 1$ je 1. Hledám řešení ve tvaru $y(x) = xr(x)\exp(2x)$, kde $r(x) = Ax + B$ je polynom stupně 1.
Dosazením do rovnice $A = 1/6$, $B = 2/9$.

Věta 12.11.' Je dána úloha

$$\mathscr{K}[y] = \exp(\alpha x)\big[q_1(x)\cos\beta x + q_2(x)\sin\beta x\big]\,, \tag{15}$$

kde q_1, q_2 jsou polynomy stupně $\leq m$. Nechť $k \geq 0$ vyjadřuje násobnost čísla $\lambda = \alpha + \beta i$ coby kořene charakteristického polynomu.
Potom existují polynomy r_1, r_2 stupně $\leq m$ takové, že

$$y(x) = x^k \exp(\alpha x)[r_1(x)\cos\beta x + r_2(x)\sin\beta x]$$

je řešení (15).

Příklad. $y'' + y' - y = \cos x$. Typ (15), $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, tj. $m = 0$, číslo $\lambda = i$ není kořen char. polynomu.
Hledám řešení ve tvaru $y(x) = A\cos x + B\sin x$, dosazením do rovnice vyjde $A = -2/5$, $B = 1/5$.

Poznámka. Příklad ukazuje, že Větu 12.11.' nelze zjednodušit v tom smyslu, že pokud pravá strana obsahuje jenom cos, pak najdu řešení, obsahující také jenom cos.

Poznámka. Soustavu n-rovnic lineárních rovnic 1. řádu $X' = AX$, kde $X = X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ jsou neznámé funkce, matice $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ lze řešit postupným převedením na 1 rovnici vyššího řádu.
Stručně: z první rovnice $x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$ vyjádříme např. $x_2 = L(x_1', x_1, x_3, \dots x_n)$, derivací $x_2' = L(x_1'', x_1', x_3', \dots x_n')$, kde $L(\dots)$ je nějaká lineární kombinace.
Dosazením do zbylých $n-1$ rovnic dostaneme soustavu, která neobsahuje x_2, je však řádu 2 (obsahuje x_1''). Atd.

Příklad. Soustava

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y \\ y' &= -6x + y \end{aligned}$$

Z první rovnice: $y = 2x - x'$, $y' = 2x' - x''$, dosazením do druhé rovnice

$$\begin{aligned} 2x' - x'' &= 2x - (2x - x') \\ x'' - 3x' - 4x &= 0 \\ \text{charakteristický polynom:} \quad p(\lambda) &= (\lambda - 4)(\lambda + 1) \\ \text{obecné řešení:} \quad x(t) &= K\exp(4t) + L\exp(-t) \end{aligned}$$

a protože $y = 2x - x'$, je $y(t) = -2K\exp(4t) + 2L\exp(-t)$.

Definice. Rovnice

$$\mathscr{E}[y] = f(x)\,, \qquad \mathscr{E}[y] = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{n-k} y^{(n-k)}\,, \tag{16}$$

$b_k \in \mathbb{C}$, $b_0 \neq 0$, se nazývá Eulerova rovnice.
Jde o speciální případ rovnice (9), kde $a_k(x) = b_k x^{n-k}$. Předpoklad (P) je splněn v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$, kde také rovnici uvažujeme.

Postup řešení. Substitucí $y(x) = z(\ln|x|)$, kde $z = z(t)$ je nová neznámá funkce, předjdeme k rovnici s konstantními koeficienty.

Příklad. Uvažujeme rovnici $x^2y'' + y = 0$. Výše naznačená substituce dává

$$y'(x) = z'(\ln|x|) \cdot \frac{1}{x}$$

a tedy

$$y''(x) = \big(z'(\ln|x|)\big)' \cdot \frac{1}{x} + z'(\ln|x|) \cdot \big(\frac{1}{x}\big)' = z''(\ln|x|)\frac{1}{x^2} - z'(\ln|x|)\frac{1}{x^2}$$

Po dosazení

$$\begin{aligned} z''(\ln|x|) - z'(\ln|x|) + z(\ln|x|) &= 0 \\ z''(t) - z'(t) + z(t) &= 0 \end{aligned}$$

Posledně uvedená rovnice má konstantní koeficienty, charakteristický polynom $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, obecné řešení

$$z(t) = c_1 \exp(t/2)\cos(\sqrt{3}t/2) + c_2 \exp(t/2)\sin(\sqrt{3}t/2)\,.$$

Obecné řešení původní rovnice je tedy

$$y(x) = c_1\sqrt{|x|}\cos(\ln|x|^{\sqrt{3}/2}) + c_2\sqrt{|x|}\sin(\ln|x|^{\sqrt{3}/2})$$

– v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.