

11. MOCNINNÉ ŘADY.

Definice. Mocninnou řadou rozumíme

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad (1).$$

kde z_0 je střed řady, c_k jsou koeficienty řady; řadu chápeme jako funkci proměnné z . Předpokládáme $c_k, z_0, z \in \mathbb{C}$. Platí úmluva $a^0 = 1$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$, tj. řada vypadá $c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$

Poznámky.

- mocninná řada ... zobecněný polynom
- mnoho funkcí se dá napsat jako součet mocninné řady, např. $\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ pro $z \in \mathbb{C}$, $\ln(1+z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{k+1}}{k+1}$ pro $|z| < 1$.

Věta 11.1. [Poloměr konvergence.] Je dána mocninná řada (1). Potom existuje $R \in [0, +\infty]$ takové, že

- (i) pokud $|z - z_0| < R$, tak (1) konverguje absolutně;
- (ii) pokud $|z - z_0| > R$, tak (1) diverguje.

Terminologie. Číslo R z předchozí věty se nazývá poloměr konvergence řady. Množina $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < R\}$ resp. $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = R\}$ se nazývá kruh resp. kružnice konvergence. Zjevně může existovat jen jedno číslo R , které splní obě vlastnosti (i), (ii) - tj. poloměr konvergence je určen jednoznačně.

Věta 11.2. Je dána řada (1). Nechť $c_k \neq 0$ a nechť $|\frac{c_{k+1}}{c_k}| \rightarrow r$. Potom $R = \frac{1}{r}$ (s úmluvou $\frac{1}{+\infty} = 0, \frac{1}{0} = +\infty$) je poloměr konvergence řady.

Příklady. ① $\sum_{k=0}^{\infty} z^k \dots R = 1$, na kružnici konvergence řada diverguje
 ② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \dots R = 1$, na kružnici konvergence řada konverguje absolutně

Věta 11.3. Je dána řada (1). Nechť $\sqrt[k]{|c_k|} \rightarrow r$. Potom $R = \frac{1}{r}$ (s úmluvou $\frac{1}{+\infty} = 0, \frac{1}{0} = +\infty$) je poloměr konvergence řady.

Poznámka. Hlavním cílem kapitoly je dokázat rovnost:

$$\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \right\}' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - z_0)^{k-1}.$$

Formálně jde o "derivování řady člen po členu", neboli o záměnu \sum a $'$.

Řada vpravo je také mocninná řada - můžeme ji přepsat jako

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k (z - z_0)^k, \quad \tilde{c}_k = (k + 1)c_{k+1}.$$

Lemma 11.1. Řady (1) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ a (2) $\sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - z_0)^{k-1}$ mají stejný poloměr konvergence.

Důsledek. Také řady (3) $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k (z - z_0)^{k-2}$, (4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}$ mají stejný poloměr konvergence jako (1).

Heslo: formálním derivováním/integrovaním člen po členu se nemění poloměr konvergence.

Věta 11.4. Nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ má poloměr konvergence $R > 0$. Označme

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - z_0)^{k-1}.$$

Potom $F'(z) = f(z)$ pro $\forall z \in U$, kde $U = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < R\}$.

Poznámky.

- funkce $F(z)$, $f(z)$ jsou pro $z \in U$ korektně definovány, neboť dané řady konvergují absolutně (Lemma 11.1.)
- tvrzení platí ve smyslu derivace podle komplexní proměnné, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \left[0 < |h| < \delta, h \in \mathbb{C} \implies \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| < \varepsilon \right],$$

kde $z \in U$ je libovolné.

- speciální případ je i derivace podle reálné proměnné, tj. $F'(x) = f(x)$, pro každé x z intervalu $(-R, R)$, neboli

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \left[0 \neq h \in (\delta, \delta) \implies \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| < \varepsilon \right].$$

Důsledky. (Věty 11.4.)

- funkce $F(z)$ je v množině U nekonečně diferencovatelná a platí $F''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k (z - z_0)^{k-2}$, $F^{(3)}(z) = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)c_k (z - z_0)^{k-3}$ atd.
- funkce $\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}$ je primitivní funkce k $F(z)$ v množině U , tj. $\Phi'(z) = F(z)$ pro $\forall z \in U$.

Příklad. $E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. Potom $E'(z) = E(z)$ pro $\forall z \in \mathbb{C}$.

Věta 11.5. Nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ má kladný poloměr konvergence. Označme $F(z)$ její součet. Potom $F^{(k)}(z_0) = k! c_k$ pro $\forall k = 0, 1, \dots$

Důsledek. Nechť řada (1) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ má kladný poloměr konvergence, a $F(z)$ je její součet. Potom n -tý Taylorův polynom funkce $F(z)$ o středu z_0 je roven n -tému částečnému součtu řady (1).

Věta 11.6. Nechť řady (1) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ a (2) $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k(z - z_0)^k$ mají kladný poloměr konvergence. Označme $F(z)$, $\tilde{F}(z)$ jejich součty. Nechť $F(z) = \tilde{F}(z)$ na jistém $U(z_0)$. Potom $c_k = \tilde{c}_k$ pro $\forall k = 0, 1, \dots$

Důsledek. Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k = 0$ pro $\forall z$ z nějakého $U(z_0)$. Potom $c_k = 0$ pro $\forall k = 0, 1, \dots$

Poznámka. Srovnej s příbuznou větou: nechť p , \tilde{p} jsou polynomy, nechť $p(x) = \tilde{p}(x)$ pro nekonečně x . Potom p , \tilde{p} jsou identické, tj. mají stejné koeficienty.

Věta E. Existuje funkce $\exp x : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, splňující:

1. $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ pro $\forall x, y \in \mathbb{R}$;
2. $\exp x$ je rostoucí a spojitá v \mathbb{R} ;
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$.

Funkce $\exp x$ je těmito vlastnostmi určena jednoznačně.

Poznámka. V důkaze předchozí věty se ukáže, že

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!};$$

podobně platí

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Lemma 11.3. Pro $\forall x, y \in \mathbb{C}$ platí

$$\begin{aligned} \exp(x + iy) &= \exp(x) [\cos y + i \sin y], \\ \sin x &= \frac{1}{2i} [\exp(ix) - \exp(-ix)] = \frac{1}{i} \sinh(ix), \\ \cos x &= \frac{1}{2} [\exp(ix) + \exp(-ix)] = \cosh(ix). \end{aligned}$$

Definice. Funkce $F(z)$ se nazve analytická v bodě z_0 , jestliže existují $c_k \in \mathbb{C}$ tak, že $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ na jistém $U(z_0)$.

Funkce se nazve analytická v množině Ω , je-li analytická v každém bodě Ω .

Příklad. Funkce $\exp(z)$ je analytická v \mathbb{C} , neboť pro každé $z_0 \in \mathbb{C}$ platí $\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp z_0}{k!} (z - z_0)^k$.