1. Vypočítejte $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$

(a)
$$\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

(b)
$$\frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$$

(c)
$$\frac{1}{x^2+y^4}$$

(d)
$$\frac{x^2}{x^2+y^2}$$

(e)
$$\frac{x^2y}{x^2+y^4}$$

(f)
$$(x^2+y^2)^{xy}$$

2. Vypočítejte $\lim_{(x,y)\to\infty}$

(a)
$$\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$$

(b)
$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$$

(c)
$$\frac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$$

(d)
$$\frac{1}{1+x^2}$$

3. Určete definiční obor, parciální derivace a totální diferenciál funkcí:

(a) $x^4+y^4+4xy^2$

(b) $x\sin(x+y)$

(c) $\ln(x^2+y^2)$

(d) x^y

(e) $\frac{x}{y}$

(f) $\frac{ax+by}{cx+dy}$ ($abcd$ jsou konstanty).

4. U všech funkcí sub 3 ověřte záměnnost druhých parciálních derivací.

5. Vyšetřete existenci a spojitost parciálních derivací a existenci totálního diferenciálu v bodě $(0,0)$ u funkcí

   (a)
   $$\sqrt{|xy|}$$

   (b)
   $$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

   (c)
   $$(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

   (d)
   $$\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

   (Funkce dodefinujte v počátku spojitě.)

6. Sestrojte funkci, která má derivace ve všech směrech 0, avšak nemá totální diferenciál.

7. Ukažte, že u funkce 5(d) nelze v počátku zaměnit pořadí parciálních derivací.

8. Pomocí totálního diferenciálu vypočítejte přibližně

   (a) $(1.02)^3(1.97)^2$

   (b) $\sqrt{(1.01)^4+(2.02)^3}$

   (c) $(0.97)^{1.05}$

   Porovnejte s výsledkem na kalkulačce.

Heineho věta: $\lim_{x\to a} f(x) = A$ právě když pro každou posloupnost $\{a_n\}$, splňující: $a_n \to a$, $a_n \neq a \ \forall n$ platí: $f(a_n) \to A$.

v příkladech $a = (0,0) \in \mathbb{R}^2$;

volíme $a_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right), \left(0, \frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ atd.

Fakt: každou posloupnost $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^2$; splňující

$$a_n \to (0,0)$$
$$a_n \neq (0,0) \ \forall n$$

lze psát ve tvaru $a_n = (r_n \cos \varphi_n, r_n \sin \varphi_n)$;

kde: $r_n > 0$; $r_n \to 0$

$\{\varphi_n\} \subset \mathbb{R}$ je libovolná.

(1a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$: $a_n = (r_n \cos \varphi_n, r_n \sin \varphi_n)$

$r_n \to 0$; $r_n > 0$

$\{\varphi_n\}$ libovolná.

$$f(a_n) = \frac{\sin r_n^2}{r_n^2} \to 1$$

$\boxed{\text{výsledek: } 1}$

(1b) $$f(a_n) = \frac{\ln(1+r_n^2)}{r_n^{2/3}} = \underbrace{\frac{\ln(1+r_n^2)}{r_n^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{r_n^{\frac{4}{3}}}_{\to 0} \to 0$$

$\boxed{\text{výsledek: } 0}$

(1c) $x^2+y^4 \to 0$; $(x,y)\to(0,0)$

$x^2+y^4>0 \quad \forall (x,y)\neq(0,0)$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+y^4} \to +\infty .$$

(1d) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$; $\ldots \to$ $\boxed{\underline{\text{výsledek}}:\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\ \nexists}$

$a_n=\left(\frac{1}{n},0\right)$: $f(a_n)=\dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+0}=1$

$a_n=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$: $f(a_n)=\dfrac{\frac{1}{n^2}}{2\cdot\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$

(1e) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^4}$.

$x=0$: $f(x,y)=0$

$x\neq 0$: $|f(x,y)|=\dfrac{x^2|y|}{x^2+y^4}\leq\dfrac{x^2|y|}{x^2}=|y|$;

$\rightsquigarrow \quad |f(x,y)|\leq|y|$ pro $\forall (x,y)\neq(0,0)$

$\rightsquigarrow \quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

(1f) $f(x,y)=(x^2+y^2)^{xy}=\exp\left(xy\cdot\ln(x^2+y^2)\right)=\exp\left(h(x,y)\right)$.

$a_n=r_n(\cos\varphi_n,\sin\varphi_n)$, $h(a_n)=r_n^2\cos\varphi_n\sin\varphi_n\ln r_n^2$

$|h(a_n)|\leq r_n^2\ln r_n^2\to 0$; $n\to\infty$ $(r_n\to 0;\ r_n>0)$.

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\exp(0)=1$.

Heine - varianta: $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = A$, právě když pro

každou posloupnost $\{a_n\}$, splňující $a_n \to \infty$, platí:

$$f(a_n) \to A.$$

$a_n \to \infty$: $\forall R>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: n \geq n_0 \Rightarrow \|a_n\| > R.$

v případě $\mathbb{R}^2$ lze každou posloupnost $a_n \to \infty$

psát ve tvaru $a_n = (r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)$

$r_n \to +\infty$

$\{\varphi_n\} \subset \mathbb{R}$ je libovolná!

(2a) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$; a_n ... jako výše.

$$f(a_n) = \frac{r_n^2}{r_n^4(\cos^4\varphi_n + \sin^4\varphi_n)} = \frac{1}{r_n^2} \cdot G(\varphi_n);$$

$$G(\varphi) = \frac{1}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}$$ ... stačí ukázat, že $G(\varphi)$ je shora omezené v $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow |f(a_n)| \leq \dfrac{1}{r_n^2} \cdot C \to 0;\ n \to \infty\ (r_n \to +\infty).$

$G(\varphi)$ je 2π-periodická: stačí omezenost na $[0, 2\pi]$;

→ plyne ze spojitosti (čitatel vždy > 0)

$\boxed{\text{Výsledek: } 0}$

(2b) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$; a_n ... jako výše.

$$f(a_n) = \frac{r_n(\cos\varphi_n + \sin\varphi_n)}{r_n^2(1-\cos\varphi_n \sin\varphi_n)};$$

protože: $|\cos\varphi| \leq 1$

$|\sin\varphi| \leq 1$

$|\cos\varphi \sin\varphi| = \left|\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right| \leq \frac{1}{2}$

$$|f(a_n)| = \frac{1}{r_n} \cdot \frac{|\cos\varphi_n| + |\sin\varphi_n|}{1 - |\cos\varphi_n \sin\varphi_n|} \leq \frac{1}{r_n} \cdot \frac{2}{1-\frac{1}{2}} \to 0.$$

$\boxed{\text{výsledek: } 0.}$

(2c) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$;

$a_n = (n, 0)$: $f(a_n) = \dfrac{n^2}{n^4} = \dfrac{1}{n^2} \to 0$

$a_n = (0, n)$: $f(a_n) = \dfrac{n^4}{n^2} = n^2 \to +\infty.$

$\boxed{\text{výsledek: } \lim \nexists}$

(2d) $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2}$; $a_n = (n, 0)$: $f(a_n) \to 0$

$a_n = (0, n)$: $f(a_n) \equiv 1.$

$\to \boxed{\lim \nexists}.$

Tento příklad ukazuje, že $(x,y) \to \infty$ obecně neimplikuje $x \to \infty$ (ani $y \to \infty$).

5a $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ ... $f(x,y)=0$ na osách ($x=0$ nebo $y=0$)

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

$w=(1,1)$; $\quad \frac{\partial f}{\partial w}(0,0)=\lim_{t\to 0}\underbrace{\frac{1}{t}\left[f(t,t)-f(0,0)\right]}_{\varphi(t)}$

$\varphi(t)=\frac{1}{t}\sqrt{|t^2|}=\frac{|t|}{t}=\operatorname{sgn}(t)$; $\quad \lim_{t\to 0}\ \nexists$;

tedy $\frac{\partial f}{\partial w}(0,0)\ \nexists$, tím spíše $df(0,0)\ \nexists$.

5b $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; ? existence dodefinování $f(0,0)$.

užitečný odhad: $\frac{|2xy|}{x^2+y^2}\le 1$; $(x,y)\neq(0,0)$.

(důkaz: $(x\pm y)^2\ge 0$; rozepsat); odtud máme

$$|f(x,y)|=\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}=2\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{|2xy|}{x^2+y^2}\le 2\sqrt{x^2+y^2}\to 0,\quad (x,y)\to(0,0).$$

Položme $f(0,0)=0$; opět $f=0$ na osách, odtud

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

kandidát na tot. dif.: $L:(u,v)\longmapsto 0$

nutno ověřit $\frac{f(u,v)-f(0,0)-L(u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}}\to 0,\quad (u,v)\to(0,0)$

úprava $\dfrac{uv}{u^2+v^2}$; leč toto $\not\to 0$;

např. $u = \frac{1}{n} = v$: $\dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \not\to 0$; $n \to \infty$.

(Heine!)

(5c) $f(x,y) = (x^2+y^2)\cdot \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$; $(x,y) \neq (0,0)$.

$|f(x,y)| \leq x^2+y^2 \to 0$; $(x,y) \to (0,0)$;

$\Rightarrow$ možné dodefinování $f(0,0)=0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left[f(x,0)-f(0,0)\right] = \lim_{x \to 0} \varphi(x) ;$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}(x^2+0^2)\cdot \sin\frac{1}{x^2+0} = x \cdot \underbrace{\sin\frac{1}{x^2}}_{\text{omezené}} \to 0 .$$

---

podobně: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$; kandidát na $df(0,0)$: nulové zobrazení.

$L = 0$

ověření: $\underbrace{\dfrac{f(u,v)-f(0,0)-L(u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}}}_{} \to 0$, $(u,v) \to (0,0)$

$= \sqrt{u^2+v^2}\cdot \sin\dfrac{1}{u^2+v^2} \to 0$; (omezené × jde do nuly).

Závěr: $df(0,0) = 0$.

(5d) odhad $\left(\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\right) \leq \frac{1}{2}$; viz (5b) ;

odtud $|f(x,y)| \leq x^2+y^2$; tedy $f(0,0)=0$ je možné dodefinování

a jde lehce $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$; $df(0,0) = 0$.