(-1) $f = \sin x \cos y$;

$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \cos y = 0$: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ nebo $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin x \sin y = 0$: $x = l\pi$ nebo $y = l\pi$.

podezřelé body: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$: $A_{kl} = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, l\pi\right)$

$B_{kl} = \left(l\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} f_{xx}, & f_{xy} \\ f_{yx}, & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x \cos y, & -\cos x \sin y \\ -\cos x \sin y, & -\sin x \cos y \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(A_{kl}) = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1}(-1)^l, & 0 \\ 0, & (-1)^{k+1}(-1)^l \end{pmatrix} = (-1)^{k+l+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$k+l$ .. liché: $\nabla^2 f(A_{kl}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .. lokální minimum

sudé: maximum.

$$\nabla^2 f(B_{kl}) = \begin{pmatrix} 0, & (-1)^{l+1}(-1)^k \\ (-1)^{l+1}(-1)^k, & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{k+l+1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma = \{-1, 1\}$ .. indefinitní : sedlový bod (není extrém).

---

f je 2π-periodická v obou proměnných... $A_{00} = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

$M = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ .. kompaktní;

$\exists$ extrémy f na M: globální

$f(A_{00}) = 1$

i jsou to extrémy na $\mathbb{R}^2$: A_{kl}; maxima pro $k+l$ sudé / min pro $k+l$ liché!

[pohled shora]

(0) $f = \cosh x \sin y$

$f_x = \sinh x \sin y = 0$: $x = 0$ nebo $y = k\pi$

$f_y = \cosh x \cos y$ $\qquad\qquad y = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

podezřelé body: $f_x = f_y = 0$: $\left(0, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) =: A_k$

$$D^2 f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh x \sin y, & \sinh x \cos y \\ \sinh x \cos y, & -\cosh x \sin y \end{pmatrix}$$

$$D^2 f(A_k) = \begin{pmatrix} (-1)^k, & 0 \\ 0, & (-1)^{k+1} \end{pmatrix}$$ ... sedlový bod.

→ neexistují (ani lokální) extrémy.

Pozn: f je shora i zdola neomezená!:

$f(n, \frac{\pi}{2}) = \cosh n \to +\infty$

$\qquad ; \; n \to +\infty.$

$f(n, -\frac{\pi}{2}) = -\cosh n \to -\infty$

① $f(x,y) = x^3 - 9x^2 + 15x - y^2 + 2y$

$Df = 0$: $A = (1,1)$ $\quad D^2 f = \begin{pmatrix} 6x-18, & 0 \\ 0, & -2 \end{pmatrix}$

$B = (5,1)$

$D^2 f(A) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; $\sigma = \{-2, -12\}$ .. lok. max.

$D^2 f(B) = \begin{pmatrix} 12, & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; $\sigma = \{12, -2\}$ .. sedlový bod.

? globální: $\varphi(t) := f(t,0) = t^3 - 9t^2 + 15t$

$\to \pm\infty$ pro $t \to \pm\infty$, $\quad = t^3\left(1 - \frac{9}{t} + \frac{15}{t^2}\right)$

$\Rightarrow$ f zdola i shora neomezené

$\nexists$ globální extrémy.

② $f(x,y) = y^3 + \frac{3}{2}y^2 - 18y + x - x^2$

$Df = 0$: $A = (\frac{1}{2}, -3)$ $\quad D^2 f = \begin{pmatrix} -2, & 0 \\ 0, & 6y+3 \end{pmatrix}$

$B = (\frac{1}{2}, 2)$

$D^2 f(A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -15 \end{pmatrix}$: lok. max.

$D^2 f(B) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$: sedlový bod

globální extrémy $\nexists$

$\varphi(t) = f(0,t) = t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 18t$

je neomezené shora i zdola...

③ $f(x,y) = xy + x^2 + y^2 - 3x - 4y$

$Df = 0$: $A = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$; $D^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$D^2 f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\sigma = \{3, 1\}$ .. lok. min.

<u>Tvrdíme:</u> $\lim\limits_{x^2+y^2 \to \infty} f(x,y) = +\infty$.

polární souřadnice: $x = r_n \cos \varphi_n$; $r_n \to +\infty$
$y = r_n \sin \varphi_n$ $\{\varphi_n\}$ libovolné.

$$f = r_n^2 \left(1 + \cos\varphi_n \sin\varphi_n\right) - 3 r_n \cos\varphi_n - 4 r_n \sin\varphi_n$$

$$= r_n^2 \Big(1 + \underbrace{\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi_n}_{> -\frac{1}{2}} \underbrace{- \tfrac{3}{r_n}\cos\varphi_n - \tfrac{4}{r_n}\sin\varphi_n}_{\to 0} \Big)$$

$$\geq r_n^2 \left(\tfrac{1}{2} + o(1) \right) \to +\infty \; ; \; n \to \infty.$$

Věta z přednášky: $\exists$ globální minimum

A jediný podezřelý bod;

ergo: A je glob. min.

④ $f(x,y) = -x^2 - 2y^2 + 2xy - x - 2y$

$Df = 0$: $A = \left(-2, -\frac{3}{2}\right)$; $D^2 f = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$;

$\sigma(D^2 f(A)) = -3 \pm \sqrt{5} > 0$ .. lok. max.

$\lim\limits_{(x,y) \to \infty} f(x,y) = -\infty$

$\Rightarrow$ A je glob. max. (podobně jako výše.)

⑤ $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 + xy - yz + xz$

$\nabla f = 0$: $A = (0,0,0)$; $\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2, 1, 1 \\ 1, 2, -1 \\ 1, -1, -2 \end{pmatrix}$

$\sigma(\nabla^2 f(A)) = \{3, \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}\}$ ..

sedlový bod : ∴ funkce nemá žádné extrémy.

⑥ $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2xz$

$\nabla f = 0 \iff x + y - z = 0$ (nadrovina dimenze 2)

$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2, 2, -2 \\ 2, 2, -2 \\ -2, -2, 2 \end{pmatrix}$; $\sigma = \{0, 6\}$ .. indefinitní

?! pozorují: $f = (x+y-z)^2 \geq 0$

$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \; x+y-z=0\}$

jsou všechno globální minima.

⑦ $f(x,y) = (2x+y)\exp(x-y)$

$\nabla f = 0$: $(y+2x) + 2 = 0$ nemá řešení.

$-(y+2x) + 1 = 0$ ∄ extrémy

⑧ $f(x,y) = (2+x-y)\exp(-x^2-y^2)$

$\nabla f = 0$: $(2+x-y)\cdot(-2x) + 1 = 0$

$(2+x-y)\cdot(-2y) - 1 = 0$

sečtením: $(2+x-y)\cdot(x+y) = 0$

(a) $2+x-y=0$: nevyhoví původní rci

(b) $x = -y$:

1. rce: $(2+2x)(-2x)+1=0$

$$x=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{2}).$$

$\longrightarrow$ podezřelé body: $A=\left(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{2}),\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})\right)$

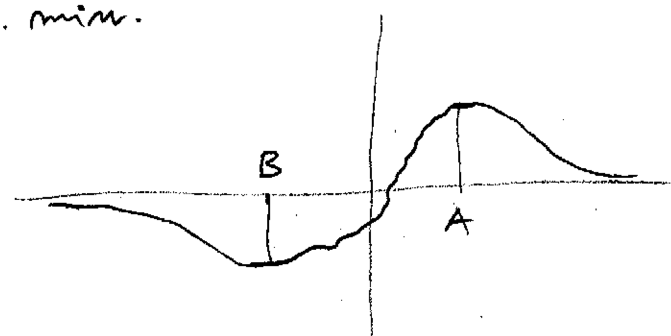
$B=\left(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{2}),\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\right).$

$\nabla^2 f = \dots$

ale: $x^2+y^2\to\infty$: $\underbrace{(2+x-y)}_{\text{polynom}}\cdot\underbrace{\exp(-x^2-y^2)}_{\to 0 \text{ velmi rychle}}\to 0$

$f(A)>0$: glob. max.

$f(B)<0$: glob. min.



(9) $f(x,y)=(x+y)\cdot\exp(x^2+2y^2)$

$\nabla f=0$: $(x+y)\cdot 2x+1=0$

$(x+y)\cdot 4y+1=0$

odečtu: $(x+y)(x-2y)=0$.

(a): $x=-y$: neřeší 1. rci

(b): $x=2y$: $\underbrace{3y\cdot 4y}_{\geq 0}+1=0$ nemá řešení!

$\nexists$ extrémy.