4. TERMÍN – 14.2.2012

Používáte-li nějakou složitější větu, není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady. – Postup výpočtu komentujte; celkový výsledek a důležité mezivýsledky zvýrazňujte. – Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. [7b] Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\ln^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\exp(\frac{1}{x^4})-1}$$

---

2. [8b] (a) Najděte maximální *otevřené* intervaly, na nichž je definována funkce

$$f(x) = \frac{2\sqrt[3]{x+3}}{\sqrt[3]{(x+3)^2}-2\sqrt[3]{x+3}+2}$$

(b) Vypočítejte $\int f(x)dx$ pomocí standardní substituce. Kde výsledek platí?
(c) Lze platnost výsledku rozšířit na větší interval, například vhodným dodefinováním?

---

3. [7b] (a) Najděte Taylorův polynom uvedeného stupně o středu 0 pro funkce:

$$f(x) = \cos(x-\operatorname{tg} x), \qquad n=6$$
$$g(x) = (1+2x^2)^{1/2}, \qquad n=4$$
$$h(x) = (1-3x^2)^{1/3}, \qquad n=4$$

(b) Pomocí těchto Taylorových polynomů spočítejte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x^2(g(x)+h(x)-2)}$$

---

4. [10b] Je dána funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x=2 \\ 4\exp\left(-\left|\frac{x}{x-2}\right|\right), & x\neq 2 \end{cases}$$

Vyšetřete její průběh, tedy zejména:

- definiční obor, sudost, lichost, periodicitu a jiné symetrie, spojitost
- spočtěte limity (jednostranné) v krajních bodech definičního oboru a v $\pm\infty$
- derivace, včetně jednostranných, všude, kde existují; (nezapomeňte na body $x=0$, $x=2$); nulové body derivace
- najděte (maximální) intervaly, kde funkce roste či klesá
- určete lokální extrémy, globální extrémy; obor hodnot
- vyšetřete konvexitu/konkávnost, inflexní body

Načrtněte co nejpřesněji graf této funkce.

Nápomoc: počítejte s přibližnou hodnotou $e=3$.

1.příklad 7b

úprava čitatele	2
P1,P2,P3	3
P4	1
správný výsledek	1

„částečné limity“	−2
drobná num. chyba	−1 (kumulativně max −3b)
chybí předpoklad VoLSF	−1

2.příklad 8b

určení intervalů	1
substituce & úprava	2
dělení, int. rac. fce	4
ošetření x=−3	1

chybějící intervaly: −1
num. chyba, která nezlehčí příklad: −1 (max −3 celkem)
num. chyba, která příklad zlehčí: až −50%

3.příklad 7b

Taylor f	3
Taylor g,h	2
limita	2

4.příklad 10b

spojitost	1
limity	1
derivace x<>0,2	1.5
derivace x=0,2	1.5
intervaly monotonie	2
extrémy, obor hodnot	1
konvexita	2

neověřená spojitost	−1
numerické chyby	−1/−3
špatný obrázek	−1
nedostatečné zdůvod.	−1
nekonzistence	až −3

(1) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln^2(1+x^2)-\ln^2(1-x^2)}{\exp(x^4)-1}$. dle Lem. 2.3

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$: čitatel upravíme

$$= \left(\ln(1+x^2)+\ln(1-x^2)\right)\cdot\left(\ln(1+x^2)-\ln(1-x^2)\right)$$
$$= \ln(1+x^2)(1-x^2)\cdot \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$$
$$= \ln(1-x^4)\cdot\ln\left(1+\frac{2x^2}{1-x^2}\right) ;$$

$$h(x) = \frac{\ln(1-x^4)}{-x^4}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{2x^2}{1-x^2}\right)}{\frac{2x^2}{1-x^2}}\cdot\frac{-x^4}{\exp(x^4)-1}\cdot\frac{2x^2}{1-x^2}$$

$$= P_1\cdot P_2\cdot P_3\cdot P_4$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\ln(1+y)}{y}\to 0;\ y\to 0 \\ x^4\to 0;\ x\to 0 \\ \neq 0 \text{ na } P(0) \\ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{VoLSF: } P_1\to 1$$

podobně $P_2\to 1$

$P_3\to 1$

$$\frac{e^y-1}{y}\to 1;\ y\to 0$$

$P_4 \to \dfrac{2\cdot 0}{1-0} = 0$ dle VoAL; celkem $\boxed{0}$.

(2) $\displaystyle\int \frac{2\sqrt[3]{x+3}}{\sqrt[3]{(x+3)^2}-2\sqrt[3]{x+3}+2}\,dx$; $t=\sqrt[3]{x+3}$ $x\in\mathbb{R}$

$t^2-2t+2=(t-1)^2+1\neq 0$

$I=\mathbb{R}$.

subst.: $t^3=x+3$

$x=t^3-3=\varphi(t)$

$dx=3t^2\,dt$

2. VoS požaduje $\varphi'(t)\neq 0$

tj: $x\neq -3$ $(t\neq 0)$.

$$\int \frac{2t\cdot 3t^2}{t^2-2t+2}\,dt=\int g(t)\,dt\ ;$$

$$g(t)=\frac{6t^3}{t^2-2t+2}=6t+\frac{12t^2-12t}{t^2-2t+2}=6t+12+\underbrace{\frac{12t-24}{t^2-2t+2}}_{g_1(t)}$$

$$\int g_1(t)\,dt=6\int\frac{2t-2}{t^2-2t+2}+\int\frac{-12\,dt}{(t-1)^2+1}$$

$$=6\ln(t^2-2t+2)-12\operatorname{arctg}(t-1);\quad t\in\mathbb{R}.$$

$$\int f(x)\,dx=3\sqrt[3]{(x+3)^2}+12\sqrt[3]{x+3}+6\ln\left(\sqrt[3]{(x+3)^2}-2\sqrt[3]{x+3}+2\right)$$
$$-12\operatorname{arctg}\left(\sqrt[3]{x+3}-1\right)\,dx$$

substituce $\Rightarrow$ $x\in(-\infty,-3),\ (-3,+\infty)$.

spojitost integrandu & výsledku

& Lemma 6.3 : platí pro $x\in\mathbb{R}$

(3) $\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$

$$x - \operatorname{tg} x = x - \left(x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \sim x^3;\ x \to 0.$$

$$\cos(x - \operatorname{tg} x) = 1 - \frac{1}{2}\underbrace{\left(-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)^2}_{\frac{1}{9}x^6 + o(x^6)} + \underbrace{o\left(\left(-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)^2\right)}_{o(x^6)}$$

$$= 1 - \frac{1}{18}x^6 + o(x^6).$$

$$(1+y)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2)$$

$$(1+2x^2)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(2x^2) - \frac{1}{8}(2x^2)^2 + o\left((2x^2)^2\right)$$

$$= 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

$$(1+y)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}y - \frac{1}{9}y^2 + o(y^2)$$

$$(1-3x^2)^{1/3} = 1 - x^2 - x^4 + o(x^4)$$

$$\text{celkem} = \frac{1 - \frac{1}{18}x^6 + o(x^6) - 1}{x^2\left(-\frac{1}{2}x^4 - x^4 + o(x^4)\right)} = \frac{-\frac{1}{18}x^6 + o(x^6)}{-3/2\, x^6 + o(x^6)}$$

$$= \frac{-1/18 + o(1)}{-3/2 + o(1)} \to \frac{2}{3 \cdot 18} = \underline{\underline{\frac{1}{27}}}$$

(4) $f(x) = 4 \cdot \exp\left(-\left|\frac{x}{x-2}\right|\right)$; $x \neq 2$

$\quad 0$; $x = 2$

$D(f) = \mathbb{R}$; spojitost : $x \neq 2$ zřejmé (složení spojitých; jmenovatel $\neq 0$)

spojitost v bodě $x_0 = 0$? $\Leftrightarrow$ $f(x) \to f(2)$; $x \to 2$.

$-\left|\frac{x}{x-2}\right| = \frac{-|x|}{|x-2|} \to \frac{-2}{0+} = -\infty$;

$\exp(y) \to 0$; $y \to -\infty$. $\underline{\text{O.K.}}$ spojité v $\mathbb{R}$

$x \to +\infty$: $\left|\frac{x}{x-2}\right| = \frac{x}{x-2} = \frac{1}{1-\frac{2}{x}} \to 1$; $f \to \frac{4}{e} \doteq 4/3$

$x \to -\infty$: " $-$ $\to +1$; $f \to \frac{4}{e} \doteq 4/3$

---

derivace: $x \neq 2, 0$.

$f'(x) = -4 \cdot \exp\left(-\left|\frac{x}{x-2}\right|\right) \cdot \left|\frac{x}{x-2}\right|'$;

$\left|\frac{x}{x-2}\right|' = \operatorname{sgn}\left(\frac{x}{x-2}\right) \cdot \left(\frac{x}{x-2}\right)' = \operatorname{sgn}\left(\frac{x}{x-2}\right) \cdot \frac{-2}{(x-2)^2}$.

---

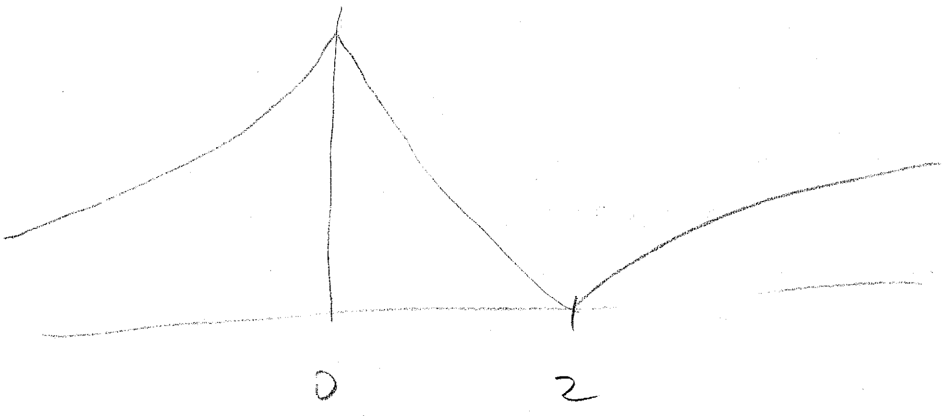
celkem $f'(x) = 8 \cdot \exp\left(-\left|\frac{x}{x-2}\right|\right) \cdot \frac{1}{(x-2)^2} \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{x}{x-2}\right)$.

... rozhoduje znaménko $\frac{x}{x-2}$.

$x \in (-\infty, 0)$: $f'(x) > 0$: $\Rightarrow$ f roste v $(-\infty, 0]$

$x \in (0, 2)$: $f'(x) < 0$ klesá v $[0, 2]$

$x \in (2, +\infty)$: $f'(x) > 0$ roste v $[2, +\infty)$.



$f(0) = 4$ .. glob. max.

$f(2) = 0$ glob. min

$\mathcal{H}(f) = [0, 4]$.

? konvexita:

(a) $x \in (-\infty, 0)$: $f(x) = 4 \cdot \exp\left(-\frac{x}{x-2}\right)$

$$f'(x) = 8 \exp\left(-\frac{x}{x-2}\right) \cdot \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$f''(x) = \underbrace{8 \cdot \exp\left(-\frac{x}{x-2}\right)}_{>0} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{(x-2)^2}\right)' + \frac{1}{(x-2)^2} \cdot \left(-\frac{x}{x-2}\right)' \right\};$$

$$\{\dots\} = \frac{-2}{(x-2)^3} + \frac{2}{(x-2)^4} = \frac{2}{(x-2)^4} \cdot \left(-(x-2) + 1\right)$$

$$= \frac{-2(x-3)}{(x-2)^4} > 0; \quad x < 0:$$

$\Rightarrow$ f ryze konvexní pro $x \in (-\infty, 0]$.

(b) $x \in (0,2)$: $f(t) = 8 \exp\left(\frac{x}{x-2}\right)$

$$f'(t) = 8 \exp\left(\frac{x}{x-2}\right) \cdot \frac{-2}{(x-2)^2}$$

$$f''(t) = -16 \exp\left(\frac{x}{x-2}\right) \cdot \left\{ \left(\frac{1}{(x-2)^2}\right)' + \frac{1}{(x-2)^2} \left(\frac{x}{x-2}\right)' \right\}$$

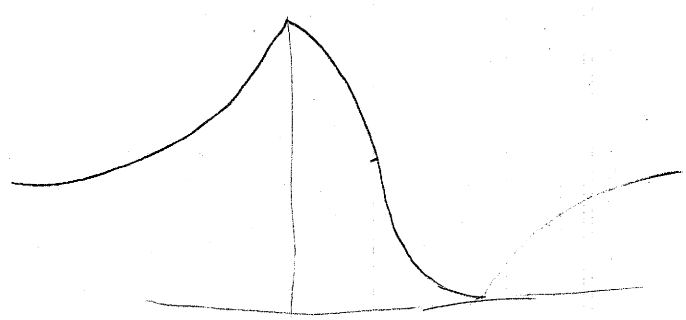
$$\{\dots\} = \frac{-2}{(x-2)^3} + \frac{-2}{(x-2)^4} = \frac{-2}{(x-2)^4} \cdot (1 + x - 2) = \frac{-2(x-1)}{(x-2)^4}$$

$x \in (0,1)$: $f''(t) < 0$: f ryze konkávní v $[0,1]$

konvexní v $[1,2]$

$x \in (1,2)$: $f''(t) > 0$

$x = 1$: inflexní bod



(c) podobně jako (a) $f(t) = 8 \exp\left(-\frac{x}{x-2}\right)$

$$f''(t) = f(t) \cdot \frac{-2(x-3)}{(x-2)^4} \quad \begin{matrix} > 0 & x \in (2,3) \\ < 0 & x \in (3,+\infty) \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ ryze konvexní v $[2,3]$

konkávní v $[3,+\infty)$

$x = 3$: inflexní bod.

derivace v $x=0$: díky znaménku je

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0-} f'(x)=\lim_{x\to 0-} 8\cdot \exp\left(-\left|\frac{x}{x-2}\right|\right)\frac{1}{(x-2)^2}\cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0-} 8\cdot \exp\left(\frac{x}{2-x}\right)\cdot\frac{1}{(x-2)^2}=2$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+} f'(x)= -2$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2+} 8\cdot \exp\Big(\underbrace{\frac{x}{2-x}}_{\downarrow\, -\infty}\Big)\cdot\underbrace{\frac{1}{(x-2)^2}}_{\downarrow\, +\infty} = 0$$

$\to 0$; „exp silnější"

podobně $f'_-(2)=0$; tedy $f'(2)=0$.