1. TERMÍN – 17.1.2012

Používáte-li nějakou složitější větu, není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady. – Postup výpočtu komentujte; celkový výsledek a důležité mezivýsledky zvýrazňujte. – Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. [7b] Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+x^2\right)^{\sin(1-x^2)\cdot\sin\frac{1}{x+\sqrt{x}}}$$

---

2. [8b] Pomocí vhodné substituce vypočtěte $\int f(x)dx$, kde

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 2}$$

Na jakých intervalech výsledek platí? – Dodefinujte funkci $f(x)$ *spojitě* v bodě $x = -\pi/2$. Najděte primitivní funkci na nějakém (otevřeném) intervalu, obsahujícím tento bod.

---

3. [6b] Najděte Taylorův polynom čtvrtého stupně o středu 0 následujících funkcí:

$$f(x) = \sqrt[3]{\cosh x}$$
$$g(x) = \exp(x^2/6)$$
$$h(x) = (1-\cos x)^2$$

Pomocí těchto Taylorových polynomů vypočtěte limitu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cosh x} - \exp(x^2/6)}{(1-\cos x)^2}$$

---

4. [11b] Je dána funkce

$$f(x) = (x+2)\exp(1/x)\,.$$

Vyšetřete její průběh, tedy zejména:

- definiční obor, sudost, lichost, periodicitu a jiné symetrie, spojitost
- limity (jednostranné) v krajních bodech definičního oboru a v $\pm\infty$
- derivace, včetně jednostranných, všude, kde existují
- dále: dodefinujte $f(0)$ tak, aby funkce zde byla alespoň jednostranně spojitá; spočítejte příslušnou jednostrannou derivaci
- (maximální) intervaly, kde funkce roste, klesá
- body extrémů a lokálních extrémů; obor hodnot
- (maximální) intervaly, kde je funkce konvexní, konkávní; inflexní body

Načrtněte co nejpřesněji graf této funkce.

```
1.příklad                         7b
---------

rozšíření & limita sinu           2
použití omezenosti P_3            2
limita s logaritmem               3

        VoLSF bez klíčového předkladu: vždy -1
============================================================

2.příklad                         8b
---------

převod na rac. fci                1
parciální zlomky                  3
integrace                         2
napojování                        2

        chybějící intervaly: -1
        num. chyba, která nezlehčí příklad: -1 (max -2 celkem)
        num. chyba, která příklad zlehčí: až -50%
============================================================

3.příklad                         6b
---------

Taylor f                          3
Taylor h                          1
limita                            2

============================================================
4.příklad                         11b
---------

D(f), spojitost                   1
limity                            2
derivace                          1
monotonie                         2
0 zleva                           2
extrémy, obor hodnot              1
2. derivace, inflexe              3

        špatný obrázek            -1
        nedostatečné zdůvod.      -1
```

(1) $f(x) = e^{h(x)}$, $h(x) = \ln(1+x^2) \cdot \sin(1-x^2) \cdot \sin \frac{1}{x+\sqrt{x}}$

$x + \sqrt{x} = x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \to +\infty \cdot 1 = +\infty$;

$1 + x^2 \to +\infty$

$1 - x^2 \to -\infty$.

$\ln(1+x^2) = \ln x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 2\ln x + \ln(1 + x^{-2})$.

$$h(x) = \frac{\sin \frac{1}{x+\sqrt{x}}}{\frac{1}{x+\sqrt{x}}} \cdot \frac{\ln(1+x^2)}{x+\sqrt{x}} \cdot \sin(1-x^2) = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$$

$P_1 \to 1$; neboť $\frac{\sin y}{y} \to 1$; $y \to 0$ dle VoLSF.

$\frac{1}{x+\sqrt{x}} \to 0$; $x \to +\infty$

$\neq 0$; $x \in P(+\infty)$

P_3 .. omezené na $P(+\infty)$; $|P_3| \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$P_2 = \frac{2\ln x + \ln(1+x^{-2})}{x(1+x^{-\frac{1}{2}})} = \frac{1}{1+x^{-\frac{1}{2}}} \cdot \left(2\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln(1+x^{-2})}{x}\right)$$

$$\to 1 \cdot \left(2 \cdot 0 + \frac{\ln 1}{+\infty}\right) = 0$$

dle VoAL;

a základní limity: $\frac{\ln x}{x} \to 0$, $x \to +\infty$.

celkem tedy: $P_1 \cdot P_2 \to 0$; P_3 omezené na $P(+\infty)$

$\Rightarrow h(x) \to 0$; $\Rightarrow f(x) = 1$, $x \to +\infty$.

---

varianta: l'Hospital:

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x+\sqrt{x}} \quad ; \text{ typ } \frac{\infty}{+\infty} \; ;$$

$$\Rightarrow \frac{(\ln(1+x^2))'}{(x+\sqrt{x})'} = \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{2}{\frac{1}{x}+2x} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$\to \frac{2}{0+\infty} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{+\infty}} = 0 \cdot 1 = 0 \text{ ; dle VoAL}$$

② $\displaystyle\int \frac{dx}{\underbrace{tg^2x - tg\,x + 2}_{f(x)}}$; $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi$.

$t = tg\,x$

$x = arctg\,t$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ $\displaystyle\int \frac{dt}{\underbrace{(t^2-t+2)(t^2+1)}_{g(t)}}$

$dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$

$$g(t) = \frac{At+B}{t^2-t+2} + \frac{Ct+D}{t^2+1} = \frac{t+1}{2(t^2+1)} - \frac{t}{2(t^2-t+2)}$$

Tj.: $-A = D = \frac{1}{2}$

$B = 0,\ C = \frac{1}{2}$

$$\int \frac{t+1}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + arctg\,t$$

$$\int \frac{t}{t^2-t+2} = \frac{1}{2}\int \frac{2t-1}{t^2-t+2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-t+2} = \frac{1}{2}\ln(t^2-t+2) + \frac{1}{2}I$$

$$I = \int \frac{dt}{t^2-t+2} = \frac{4}{7}\cdot\int \frac{dt}{\left(\frac{2t-1}{\sqrt{7}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{7}}\, arctg\left(\frac{2t-1}{\sqrt{7}}\right)$$

$$t^2-t+2 = \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = \frac{7}{4}\left[\left(\frac{2t-1}{\sqrt{7}}\right)^2+1\right]$$

$$\int g(t) = \frac{1}{4}\ln\frac{t^2+1}{t^2-t+2} + \frac{1}{2}\, arctg\,t - \frac{1}{2\sqrt{7}}\, arctg\left(\frac{2t-1}{\sqrt{7}}\right)$$

$t \in (-\infty, +\infty)$.

$$\int f(x)\,dx = F(x) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{tg^2x+1}{tg^2x - tg\,x + 2}\right) + \frac{1}{2}x$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2\,tg\,x - 1}{\sqrt{7}}\right); \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

obecněji na $\left((2k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$.

---

možné dodefinování: $x = -\frac{\pi}{2}$:

$$f(x) = \frac{1}{tg^2x}\cdot\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{tg\,x} + \frac{2}{tg^2x}}\right) \to \frac{1}{+\infty}\cdot\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\pm\infty} + \frac{2}{+\infty}}\right)$$

$x \to -\frac{\pi}{2}\pm$; neboť $tg\,x \to \mp\infty$. $\qquad = 0$

---

tedy: $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x); & x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0; & x = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$ — spojitá v $\left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

podobně: $\frac{tg^2x+1}{tg^2x - tg\,x+2} \to 1$; $x \to -\frac{\pi}{2}$;

$$\Rightarrow F(x) \to -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2\sqrt{7}}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{7}} - 1\right); x \to -\frac{\pi}{2}+$$

$$\to -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2\sqrt{7}}\cdot\left(+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{7}} - 1\right); x \to -\frac{\pi}{2}-$$

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x); & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{7}} - 1\right); & x = -\frac{\pi}{2} \\ F(x) + \frac{\pi}{2\sqrt{7}}; & x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

$\tilde{F}' = \tilde{f} \quad x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

& spojitost v bodě $x = -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \tilde{F}' = \tilde{f}$ v $\left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Pozn.: též lze psát $f(x) = f(x) \cdot \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x - \sin x \cos x + 2\cos^2 x}$

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$= \frac{\cos^2 x}{1 + \cos^2 x - \sin x \cos x}$; ... spojitá v $\mathbb{R}$; neboť jmenovatel

$\geq 1 - \sin x \cos x = 1 - \frac{1}{2}\underbrace{\sin 2x}_{\leq 1} \geq \frac{1}{2}$.

③ $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$

$(1+y)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}y - \frac{1}{9}y^2 + o(y^2)$;

$$(\cosh x)^{\frac{1}{3}} = \Big(1 + \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{x^4}{24} + o(x^4)\right)}_{y}\Big)^{1/3}$$

$$= 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2$$

$$+ o\Big(\qquad \Big)^2 .$$

$$\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 = \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$$

$o\big((\qquad)^2\big) = o(x^4)$; neboť $\frac{1}{2}x^2 + \dots \sim x^2$.

---

celkem: $(\cosh x)^{\frac{1}{3}} = 1 + x^2\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) + x^4\left(\frac{1}{3\cdot 24} - \frac{1}{9\cdot 4}\right) + o(x^4)$

$$= 1 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{72}x^4 + o(x^4)$$

$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$

$\exp\left(\frac{1}{6}x^2\right) = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{72}x^4 + o(x^4)$

$(1-\cos x)^2 = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)^2 = \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$.

$$f(x) = \frac{1 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{72}x^4 + o(x^4) - \left(1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{72}x^4 + o(x^4)\right)}{\frac{1}{4}x^4 + o(x^4)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{36}x^4 + o(x^4)}{\frac{1}{4}x^4 + o(x^4)} = \frac{-\frac{1}{36} + o(1)}{\frac{1}{4} + o(1)} \to \frac{-\frac{1}{36}}{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{9}$$

$x \to 0.$

(4) $f(x) = (x+2)\cdot \exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; spojitá, není sudá, lichá, periodická.

$x \to +\infty$: $f(x) \to +\infty \cdot \exp(0) = +\infty$

$\quad -\infty$: $\qquad -\infty$

$x \to 0+$: $\frac{1}{x} \to +\infty$; $f(x) \to +\infty$

$\quad 0-$: $\frac{1}{x} \to -\infty$; $f(x) \to 0$.

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + (x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \frac{(x-2)(x+1)}{x^2}.$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ nebo $x = 1$.

$x \in (-\infty, -1)$: $f' > 0$: f roste v $(-\infty, -1]$

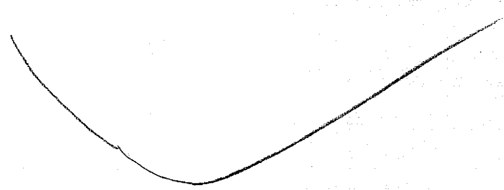
$(-1, 0)$: $f' < 0$: klesá v $[-1, 0)$

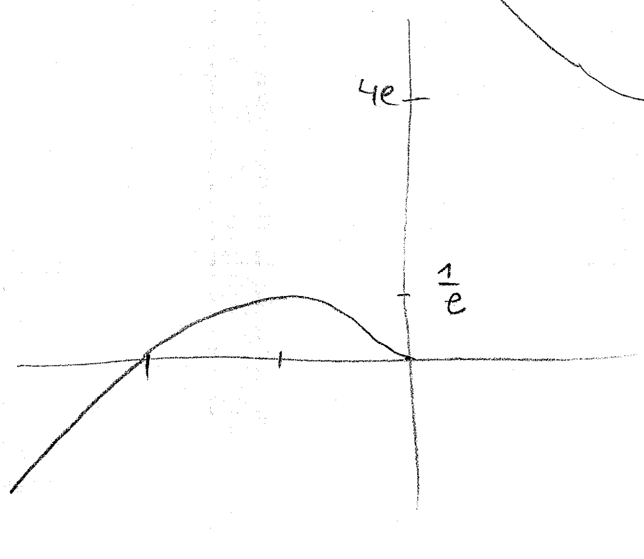
$(0, 2)$: $f' < 0$ klesá v $(0, 2]$

$(2, +\infty)$: $f' > 0$ roste v $[2, +\infty)$.

$f(-1) = \frac{1}{e}$ ... lok. maximum

$f(2) = 4e$ ... lok. minimum





$H(f) = (-\infty, \frac{1}{e}] \cup [4e, +\infty)$.

$f(0)=0$: spojité zleva

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{e^{\frac{1}{x}}} \cdot \underbrace{\frac{(x-2)(x+1)}{x^2}}_{\to -\infty} = 0.$$

„silnější"

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left\{ \left[\frac{(x-2)(x+1)}{x^2} \right]' - \frac{1}{x^2} \right\} = \dots \; e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{5x+2}{x^4}.$$

$x\in(0,+\infty)$: $f''>0$: f ryze konvexní v $(0,+\infty)$

$x\in(-\infty,-\frac{2}{5})$: $f''<0$: f ryze konkávní v $(-\infty,-\frac{2}{5}]$

$x\in(-\frac{2}{5},0)$: $f''>0$: f ryze konvexní v $[-\frac{2}{5},0]$.

$x=-\frac{2}{5}$: inflexní bod.