

4. DERIVACE

Definice. Nechť $f(x)$ je definována na jistém $U(x_0)$. Pokud existuje limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

nazveme ji derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0 .

Značíme $f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$ nebo $(f(x))'|_{x=x_0}$.

Terminologie: pokud $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, jde o derivaci vlastní (konečnou), pro $f'(x_0) = \pm\infty$ je derivace nevlastní.

Poznámky. • ekvivalentní definice derivace:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- $f(x) = g(x)$ na jistém $U(x_0)$ implikuje $f'(x_0) = g'(x_0)$
- geometrický význam: směrnice tečny grafu funkce
- derivováním vznikne z funkce $f(x)$ nová funkce $f'(x)$, která má dovoleno nabývat i hodnot $\pm\infty$

Příklady. ① $c' = 0$

② $(x^n)' = nx^{n-1}$ pro $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

③ $(1/x^n)' = -n/x^{n+1}$ pro $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$

④ $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$

⑤ $(\ln x)' = 1/x$ pro $x > 0$

⑥ $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$

⑦ $\operatorname{sgn}'(0) = \infty$

Definice. Nechť $f(x)$ je definována na jistém $U_+(x_0)$ (respektive $U_-(x_0)$).

Pokud existuje limita

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

respektive

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

nazveme ji derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0 zprava (resp. zleva.)

Značíme $f'_+(x_0)$ nebo $(f(x))'_+|_{x=x_0}$ respektive $f'_-(x_0)$ nebo $(f(x))'_-|_{x=x_0}$

Opět rozlišujeme vlastní a nevlastní derivaci.

Poznámky. • ekvivalentní definice jednostranných derivací:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{respektive} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

• z Věty 2.2 plyne ekvivalence následujících tvrzení:

- (1) $f'(x_0)$ existuje a rovná se A
- (2) $f'_+(x_0)$ a $f'_-(x_0)$ existují a rovnají se A

Příklady.

- ① $|x|' = \operatorname{sgn} x$ pro $x \neq 0$; derivace v 0 neexistuje, neboť $(|x|)'_{\pm}|_{x=0} = \pm 1$
- ② $(\sqrt{x})'_+|_{x=0} = \infty$

Věta 4.1. Nechť $f(x)$ má v x_0 vlastní derivaci. Pak $f(x)$ je v x_0 spojitá.

Poznámky. • důležité je "vlastní" - $\operatorname{sgn}(x)$ má v 0 derivaci (rovnou ∞), ale není tam spojitá

- platí jednostranné verze: $f(x)$ má v x_0 vlastní derivaci zprava (zleva) $\implies f(x)$ je v x_0 spojitá zprava (zleva)
- obrácená implikace zdaleka neplatí: např. $|x|$ je spojitá v 0, ale nemá tam derivaci. Lze dokonce sestrojít funkci, která je spojitá všude, ale derivaci (ani jednostrannou) nemá nikde

Věta 4.2. Nechť $f(x)$, $g(x)$ mají vlastní derivaci v x_0 . Potom

- (1) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- (2) $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$
- (3) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- (4) jestliže $g(x_0) \neq 0$, pak $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{1}{[g(x_0)]^2} \{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)\}$

Poznámky. • platí pro jednostranné derivace

- lze použít na vícenásobné součty, součiny atd.; např. $(fgh)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)h(x_0) + f(x_0)g'(x_0)h(x_0) + f(x_0)g(x_0)h'(x_0)$
- v případě nevlastních derivací nemusí platit, třebaže má pravá strana smysl: polož $f(x) = 1/x$ pro $x \neq 0$ a $f(0) = 1$. Potom $f'(0) = \infty$, a tedy u vzorce

$$(f \cdot f)'(0) = f(0)f'(0) + f(0)f'(0)$$

je pravá strana ∞ , avšak derivace funkce $f \cdot f$ v bodě 0 neexistuje

Příklady.

- ① $\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- ② $(e^x \sin x)' = e^x(\cos x - \sin x)$

Lemma 4.1. Nechť $f'(x_0) \neq 0$ (může být i nevlastní). Potom $f(x) \neq f(x_0)$ na jistém $P(x_0)$.

Věta 4.3. (Derivace složené funkce.) Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci v x_0 , nechť $g(y)$ má vlastní derivaci v bodě $f(x_0)$. Potom

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Příklady.

① $[\cos(x^2)]' = -\sin(x^2) \cdot 2x, x \in \mathbb{R}$

② $(\sqrt{x^2+1})' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}$

③ $[f(ax+b)]' = af'(ax+b)$ pro každé x takové, že $f'(y)$ má v bodě $ax+b$ derivaci

④ $\{x^x\}' = x^x(1 + \ln x), x > 0$

⑤ $|f(x)|' = f'(x) \operatorname{sgn} \{f(x)\}$, pokud $f(x) \neq 0$ a $f'(x)$ existuje vlastní**Věta 4.4.** (Derivace inverzní funkce.) Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, nechť $f(x)$ je spojitá, ryze monotónní v \mathbb{R} . Označ $J = f(I)$, a $\varphi(y) : J \rightarrow I$ je funkce inverzní k $f(x)$. Nechť $y_0 \in J$ je vnitřní bod. Potom:(1) Jestliže $f'(\varphi(y_0)) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(\varphi(y_0))}$.(2) Jestliže $f'(\varphi(y_0)) = \pm\infty$, pak $\varphi'(y_0) = 0$.(3) Jestliže $f'(\varphi(y_0)) = 0$, pak $\varphi'(y_0) = \infty$ pokud $f(x)$ je rostoucí, a $\varphi'(y_0) = -\infty$ pokud $f(x)$ je klesající.**Příklady.** ① $(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, y \in (-1, 1)$

② $(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1+y^2}, y \in \mathbb{R}$

③ Pokud $n \geq 2$ je sudé, tak $(\sqrt[n]{y})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, y > 0$ Pokud $n \geq 3$ je liché, tak $(\sqrt[n]{y})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ pro $y \neq 0$, a $(\sqrt[n]{y})'|_{y=0} = \infty$.