2. Reálné funkce. Limita a spojitost.

Definice. Nechť M, N jsou množiny. Funkcí (zobrazením) f z M do N se rozumí libovolný předpis, který každému prvku z M přiřadí právě jeden prvek z N. Značíme $f : M \to N$, $x \mapsto f(x)$.
Funkce je prostá, pokud $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$. Pro $A \subset M$ definuji obraz A jako

$$f(A) = \{y \in N;\ \exists x \in N \text{ tak, že } f(x) = y\}$$

a pro $B \subset N$ definuji vzor B jako

$$f^{-1}(B) = \{x \in M;\ f(x) \in B\}\,.$$

Funkce je 'na' (zobrazuje M na N), pokud $f(M) = N$.
Je-li $f : M \to N$ prostá a na, řekneme, že je vzájemně jednoznačná. Pak lze definovat inverzní funkci $f_{-1} : N \to M$, která prvku $y \in N$ přiřadí ten (jednoznačně určený) prvek $x \in M$, že $f(x) = y$.
Je-li $f : M \to N$, a $A \subset M$, pak restrikcí (zúžením) f na A rozumím zobrazení, která má stejný předpis jako f, ale uvažuji ho jenom pro $x \in A$. Značíme $f|_A$.
Je-li $f : M \to N$, $g : N \to K$, definujeme složené zobrazení (superpozici) $g \circ f : M \to K$ předpisem $x \mapsto g(f(x))$.
Občas píšeme $f : M \to N$, ačkoliv $f(x)$ není definováno pro úplně všechna $x \in M$. Pak značí D_f (definiční obor f) množinu těch $x \in M$, pro něž $f(x)$ definováno je, a H_f (obor hodnot) značí $f(D_f)$.

Úmluva. Reálnou funkcí rozumíme funkci z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, tj. nepřipouštíme $\pm\infty$ v argumentu nebo hodnotě funkce.

Definice. Reálná funkce $f(x)$ se nazve rostoucí (resp. klesající resp. nerostoucí resp. neklesající) na množině M, pokud $\forall x < y \in M$ je $f(x) < f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$ resp. $f(x) \geq f(y)$ resp. $f(x) \leq f(y)$).
Tyto funkce se souhrnně nazývají monotónní (první dvě pak ryze monotónní).
Funkce se nazve shora (zdola) omezená na M, jestliže existuje K tak, že $f(x) \leq K$ (resp. $f(x) \geq K$) pro $\forall x \in M$. Funkce je omezená, právě když je shora i zdola omezená, což je právě když $(\exists K > 0)(\forall x \in M)[|f(x)| \leq K]$.

Definice. Nechť $\delta > 0$. Pro $x_0 \in \mathbb{R}$ definujeme
$U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ... kruhové δ-okolí x_0
$P(x_0, \delta) = U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ ... prstencové (redukované) δ-okolí x_0
$U_+(x_0, \delta) = [x_0, x_0 + \delta)$ ... pravé kruhové δ-okolí x_0
$U_-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0]$ ... levé kruhové δ-okolí x_0
$P_+(x_0, \delta) = (x_0, x_0 + \delta)$ ... pravé prstencové δ-okolí x_0

$P_-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0)$ ... levé prstencové δ-okolí x_0
Dále definujeme
$U(\infty, \delta) = (\frac{1}{\delta}, \infty]$, $P(\infty, \delta) = (\frac{1}{\delta}, \infty)$
$U(-\infty, \delta) = [-\infty, -\frac{1}{\delta})$, $P(-\infty, \delta) = (-\infty, -\frac{1}{\delta})$
$U_-(\infty, \delta) = U(\infty, \delta)$, $P_-(\infty, \delta) = P(\infty, \delta)$, $U_+(-\infty, \delta) = U(-\infty, \delta)$, $P_+(-\infty, \delta) = P(-\infty, \delta)$.
Pravé okolí ∞, levé okolí $-\infty$ nedefinujeme.

Poznámky.
• pozoruji: $\delta_1 < \delta_2 \implies U(x_0, \delta_1) \subset U(x_0, \delta_2)$ ... čím menší δ, tím menší okolí (platí i u $\pm\infty$)
• jediný rozdíl mezi $U(x_0, \delta)$ a $P(x_0, \delta)$: bod x_0
• pro $x_0 \in \mathbb{R}$ platí:

$$U(x_0, \delta) = \big\{x \in \mathbb{R};\ |x - x_0| < \delta\big\}$$
$$P(x_0, \delta) = \big\{x \in \mathbb{R};\ 0 < |x - x_0| < \delta\big\}$$

• píšeme $U(x_0)$ místo $U(x_0, \delta)$, pokud na δ nezáleží; obrat "na jistém $P(x_0)$ platí..." je zkratka za "existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ platí..."

Věta 2.1. (Hausdorffův princip oddělení.) Nechť x_0, $x_1 \in \mathbb{R}^*$, $x_0 \neq x_1$. Potom existuje $\delta > 0$ tak, že $U(x_0, \delta) \cap U(x_1, \delta) = \emptyset$. Speciálně $x_0 \notin U(x_1, \delta)$.

Definice. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, nechť $f(x)$ je definována na jistém $P(x_0, \delta)$. Číslo $A \in \mathbb{R}^*$ se nazve limitou $f(x)$ v bodě x_0, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in P(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(A, \varepsilon)\big] .$$

Značíme $f(x) \to A$ pro $x \to x_0$, nebo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.
Terminologie: pokud $A \in \mathbb{R}$, jde o limitu vlastní (konečnou), pro $A = \pm\infty$ je limita nevlastní.

Poznámky.
• limita v x_0 nezávisí na $f(x_0)$, f nemusí být v x_0 ani definována
• názorně: x blízko x_0, ale různé od $x_0 \implies f(x)$ blízké (nebo rovné) A
• ekvivalentní zápis:

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[f\big(P(x_0, \delta)\big) \subset U(A, \varepsilon)\big] .$$

speciálně pro x_0, $A \in \mathbb{R}$:

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon\big] .$$

• limita (pokud existuje) je nejvýše jedna

Příklady. ① $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$
② $\lim_{x\to 0} x^{-2} = \infty$
③ Dirichletova funkce

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

nemá limitu v žádném bodě.

Definice. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, nechť $f(x)$ je definována na jistém $P_+(x_0, \delta)$ (respektive $P_-(x_0, \delta)$). Číslo $A \in \mathbb{R}^*$ se nazve limitou $f(x)$ v bodě x_0 zprava (resp. zleva), jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in P_+(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(A, \varepsilon)\big]$$

respektive

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in P_-(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(A, \varepsilon)\big] .$$

Značíme $f(x) \to A$ pro $x \to x_0+$, $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = A$, resp. $f(x) \to A$ pro $x \to x_0-$, $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = A$.

Příklady.
① pro funkci signum

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

platí: $\lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$
② $\lim\limits_{x\to 0\pm} x^{-1} = \pm 1$

Věta 2.2. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:
(1) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existuje a rovná se A
(2) limity $\lim_{x\to x_0+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ existují a rovnají se témuž A

Lemma 2.1. (1) Nechť $f(x)$ má v bodě x_0 vlastní limitu. Potom $f(x)$ je omezená na jistém $P(x_0)$.
(2) Nechť $f(x)$ má v bodě x_0 limitu (i nevlastní), různou od 0. Potom $f(x)$ je na jistém $P(x_0)$ "odražená od nuly", tj.

$$\big(\exists \delta > 0\big)\big(\exists \Delta > 0\big)\big[x \in P(x_0, \delta) \implies |f(x)| > \Delta\big] .$$

Věta 2.3. (Aritmetika limit - 1. verze.) Nechť $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ pro $x \to x_0$, kde A, $B \in \mathbb{R}$. Potom
(1) $f(x) + g(x) \to A + B$

(2) $f(x) - g(x) \to A - B$
(3) $f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$
(4) pokud $B \neq 0$, tak $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{A}{B}$
pro $x \to x_0$.

Věta 2.4. Nechť $f(x)$ je omezená na jistém $P(x_0)$, nechť $g(x) \to 0$ pro $x \to x_0$. Potom $f(x) \cdot g(x) \to 0$ pro $x \to x_0$.

Poznámka. Platí jednostranné verze uvedených vět, např.:
Jestliže $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ pro $x \to x_0+$, pak $f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$ pro $x \to x_0+$.
Jestliže $f(x)$ je omezená na jistém $P_-(x_0)$ a $g(x) \to 0$ pro $x \to x_0-$, pak $f(x) \cdot g(x) \to 0$ pro $x \to x_0-$.
Atd.

Definice. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, nechť $f(x)$ je definována na jistém $U(x_0)$. Řekneme, že $f(x)$ je spojitá v x_0, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in U(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)\big] .$$

Ekvivalentní zápisy:

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[f\big(U(x_0, \delta)\big) \subset U(f(x_0), \varepsilon)\big]$$
$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big]$$

Věta 2.5. (Vztah limity a spojitosti.) Následující tvrzení jsou ekvivalentní:
(1) $f(x)$ je spojitá v x_0
(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existuje a rovná se $f(x_0)$
Stručně řečeno: spojité funkce jsou takové, že limitu $x \to x_0$ spočítám dosazením $x = x_0$.

Příklady.
① polynom, tj. funkce tvaru $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, kde $a_k \in \mathbb{R}$ jsou konstanty, je spojitý v každém $x_0 \in \mathbb{R}$
② racionální funkce, tj. funkce tvaru $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, kde $p(x)$, $q(x)$ jsou polynomy, je spojitá v každém $x_0 \in \mathbb{R}$, ve kterém $q(x_0) \neq 0$
③ funkce $\sin x$, $\cos x$, $\exp x$ jsou spojité v každém bodě z $\mathbb{R}$; funkce $\log x$ je spojitá v každém bodě z $(0, \infty)$ - uvidíme později
④ funkce $\sqrt{x}$ je spojitá v každém bodě z $(0, \infty)$; uvidíme později, že $\sqrt[n]{x}$ je vždy spojitá (ve svém definičním oboru)
⑤ funkce $\operatorname{sgn} x$ je spojitá všude mimo $x = 0$

⑥ funkce $F(x) = x \cdot D(x)$, kde $D(x)$ je Dirichletova funkce, je spojitá v $x = 0$ a nikde jinde

Věta 2.6. (Limita superpozice) Nechť $f(x) \to y_0$ pro $x \to x_0$, nechť $g(y) \to A$ pro $y \to y_0$, kde A, x_0, $y_0 \in \mathbb{R}^*$. Nechť je dále splněn alespoň jeden z následujících předpokladů:
(a) $g(y)$ je spojitá v y_0
(b) $\exists \delta > 0$ tak, že $f(x) \neq y_0$ pro $\forall x \in P(x_0, \delta)$
Potom $g(f(x)) \to A$ pro $x \to x_0$.

Příklady.
① $\sqrt{x^3 - 3x + 1} \to \sqrt{3}$ pro $x \to 2$
② $\dfrac{\sin(x + x^2)}{x} \to 1$ pro $x \to 0$
③ !! bez předpokladu (a) nebo (b) se nelze obejít: definuji $f(x) = 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(y) = 0$ pro $y \neq 0$ a $g(0) = 1$. Potom $f(x) \to 0$ pro $x \to 0$, $g(y) \to 0$ pro $y \to 0$, avšak $g(f(x)) \to 1$ pro $x \to 0$.

Poznámka. Výrok $f(x) \to \infty$ pro $x \to x_0$ můžeme ekvivalentně napsat jako

$$\big(\forall K > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in P(x_0, \delta) \implies f(x) > K\big].$$

Podobně $f(x) \to -\infty$ pro $x \to x_0$ je ekvivalentní

$$\big(\forall L < 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in P(x_0, \delta) \implies f(x) < L\big].$$

Věta 2.7. (Aritmetika limit - obecná verze.) Nechť $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ pro $x \to x_0$, kde A, $B \in \mathbb{R}^*$. Potom
(1) $f(x) + g(x) \to A + B$
(2) $f(x) - g(x) \to A - B$
(3) $f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$
(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{A}{B}$
pro $x \to x_0$, má-li výraz napravo smysl.

Příklady. ① $\frac{1}{x^2+1} \to \frac{1}{\infty \cdot \infty + 1} = 0$ pro $x \to \infty$
② $x^3 + 3x^2 + 4 = x^3(1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}) \to (-\infty)^3(1 + \frac{3}{-\infty} + \frac{4}{(-\infty)^3}) = -\infty$ pro $x \to -\infty$

Poznámka. Proč nedefinuji některé výrazy, např. $\frac{\infty}{\infty}$? Protože když $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$, nelze obecně říci, co dělá $\frac{f(x)}{g(x)}$. – Operace s ∞ jsou definovány právě tak, aby platila Věta 2.7.

Věta 2.8. Nechť $f(x) \to 0$ pro $x \to x_0$.
(1) Je-li navíc $f(x) > 0$ na jistém $P(x_0)$, pak $\frac{1}{f(x)} \to \infty$ pro $x \to x_0$.

(2) Je-li naopak $f(x) < 0$ na jistém $P(x_0)$, pak $\frac{1}{f(x)} \to -\infty$ pro $x \to x_0$.

Příklady. ① $\frac{\sin\sqrt{x}}{x} \to \infty$ pro $x \to 0+$
② $\frac{1}{x+x^2} \to -\infty$ pro $x \to 0-$

Věta 2.9. (Zachování nerovnosti v limitě.) Nechť $f(x) \to a$ pro $x \to x_0$. Nechť existuje $A \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) \leq A$ na jistém $P(x_0)$. Potom $a \leq A$.

Poznámky. • platí zrcadlová verze s $\geq$ místo $\leq$
• neplatí verze s ostrou nerovostí: $f(x) = 1 - \frac{1}{x} < 1$ na $P(\infty)$, avšak $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 \not< 1$
• souhrně: neostrá nerovnost se v limitě zachová, ostrá se může změnit v rovnost

Věta 2.10. (O dvou policajtech.) Nechť $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ jsou definovány na jistém $P(x_0)$.
(1) Nechť $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ platí na jistém $P(x_0)$, a nechť $g(x) \to a$, $h(x) \to a$ pro $x \to x_0$, kde $a \in \mathbb{R}$. Potom $f(x) \to a$ pro $x \to x_0$.
(2) Nechť $g(x) \leq f(x)$ na na jistém $P(x_0)$, nechť $g(x) \to \infty$ pro $x \to x_0$. Potom $f(x) \to \infty$ pro $x \to x_0$.
(3) Nechť $f(x) \leq h(x)$ na na jistém $P(x_0)$, nechť $h(x) \to -\infty$ pro $x \to x_0$. Potom $f(x) \to -\infty$ pro $x \to x_0$.

Příklady. ① $\frac{x^2+1}{\lfloor x^2 \rfloor+1} \to 1$ pro $x \to \infty$, kde

$$\lfloor y \rfloor = \max\big\{k \in \mathbb{Z} : k \leq y\big\}$$

je tzv. celá část y.
② $\cos x + x \to -\infty$ pro $x \to -\infty$

Věta 2.11. Nechť $f(x)$ je monotónní v intervalu (a, b). Potom existuje $\lim_{x\to a+} f(x)$ a $\lim_{x\to b-} f(x)$.

Definice. Nechť $f(x)$ je definována na jistém $U_+(x_0)$ (respektive $U_-(x_0)$), kde $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že $f(x)$ je spojitá v x_0 zprava (resp. zleva), jestliže

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big[x \in U_+(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)\big]$$

respektive

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big[x \in U_-(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)\big].$$

Ekvivalentní zápisy (pro spojitost zprava):

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big[f\big(U_+(x_0, \delta)\big) \subset U(f(x_0), \varepsilon)\big]$$
$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big[x_0 \leq x < x_0 + \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big]$$

Věta 2.12.
(1) $f(x)$ je spojitá v x_0 zprava, právě když $\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$.
(2) $f(x)$ je spojitá v x_0 zleva, právě když $\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$.
(3) $f(x)$ je spojitá v x_0, právě když je tam spojitá zleva i zprava.

Příklad. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ je v 0 spojitá zprava, nespojitá zleva.

Definice. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f(x) : I \to \mathbb{R}$. Řekneme, že $f(x)$ je spojitá v I (na I), jestliže pro každé $x_0 \in I$ platí:

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in U(x_0, \delta) \cap I \implies f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)\big] .$$

Poznámka. U intervalu rozlišujeme vnitřní a krajní body. Bod $x_0 \in I$ je vnitřní, právě když existuje $\delta > 0$ tak, že $U(x_0, \delta) \subset I$. Krajní bod může, ale nemusí být prvkem intervalu.
Tedy (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ a $[a, b]$ jsou intervaly s krajními body a, b. Vnitřními body jsou ve všech čtyřech případech body z (a, b).

Věta 2.13. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f(x) : I \to \mathbb{R}$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:
(1) $f(x)$ je spojitá v I
(2) $f(x)$ je spojitá v každém vnitřním bodě I; pokud levý krajní bod je prvkem I, je v něm spojitá zprava; pokud pravý krajní bod je prvkem I, je v něm spojitá zleva
(3) $f(x)$ je spojitá zprava v každém bodě I, který není pravý krajní, a je spojitá zleva v každém bodě I, který není levý krajní

Věta 2.14. Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou spojité v intervalu I. Potom funkce $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ jsou spojité v I. Jestliže $g(x) \neq 0$ pro $\forall x \in I$, je také funkce $\frac{f(x)}{g(x)}$ spojitá v I.

Věta 2.15. (Spojitost superpozice.) Nechť $f(x)$ je spojitá v I, nechť $g(y)$ je spojitá v J, kde I, $J \subset \mathbb{R}$ jsou intervaly. Nechť $f(I) \subset J$. Potom funkce $(g \circ f)(x)$ je spojitá v I.

Poznámka. Ihned z definice plyne: je-li $f(x)$ spojitá v I, a $\tilde{I} \subset I$, pak $f(x)$ je spojitá v $\tilde{I}$.

Věta 2.16. (Darbouxova.) Nechť $f(x)$ je spojitá v I, kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Nechť γ leží mezi $f(a)$, $f(b)$, kde a, $b \in I$. Potom mezi a, b leží c takové, že $f(c) = \gamma$.

Poznámka. Větu A4 lze zobecnit takto: Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná. Potom existuje $S \in \mathbb{R}^*$ tak, že $S = \sup M$.

Lemma 2.2. (Charakterizace intervalu.) Nechť neprázdná $M \subset \mathbb{R}$ má následující vlastnost:

[*] Jsou-li α, $\beta \in M$ a číslo γ leží mezi α a β, pak také $\gamma \in M$.
Potom M je interval.

Důsledek. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f(x) : I \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom $f(I)$ je také interval. (Spojitý obraz intervalu je interval.)

Věta 2.17. (O inverzní funkci.) Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f(x)$ je spojitá, ryze monotónní v I. Označ $J = f(I)$. Potom J je interval, $f(x) : I \to J$ je vzájemně jednoznačná a $f_{-1}(y) : J \to I$ je spojitá a ryze monotónní.

Důsledek. Důkaz Věty B (o odmocnině), navíc dostáváme, že $\sqrt[n]{x}$ je pro sudé n spojitá v $[0, \infty)$, pro liché n je spojitá v $\mathbb{R}$.

Lemma 2.3. (1) Nechť $f(x)$ je definována na jistém $P(\infty)$. Potom

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{y\to 0+} f(1/y)\,.$$

(2) Nechť $f(x)$ je definována na jistém $P(-\infty)$. Potom

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to 0-} f(1/y)\,.$$

Rovnost chápu takto: existuje-li jedna limita, existuje i druhá a rovnají se.

Poznámky. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Funkci $F(x) : I \to \mathbb{C}$ ztotožním s dvojicí funkcí $f_1(x) : I \to \mathbb{R}$, $f_2(x) : I \to \mathbb{R}$, kde $F(x) = f_1(x) + if_2(x)$, neboli $f_1(x) = \operatorname{Re} F(x)$, $f_2(x) = \operatorname{Im} F(x)$.
Limitu definuji takto: $F(x) \to A \in \mathbb{C}$ pro $x \to x_0$, jestliže $\operatorname{Re} F(x) \to \operatorname{Re} A$, $\operatorname{Im} F(x) \to \operatorname{Im} A$ pro $x \to x_0$.
Spojitost analogicky: $F(x)$ je spojitá (v bodě, na intervalu), jestliže funkce $\operatorname{Re} F(x)$, $\operatorname{Im} F(x)$ jsou spojité.
Tímto přechodem k reálné resp. imaginární části dokážeme např. zobecnění Věty 2.3. pro A, $B \in \mathbb{C}$.