

DERIVACE PO DRUHÉ.

1. Pomocí l'Hospitalova pravidla spočítejte

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(ax) - \exp(bx)}{\sin ax - \sin bx}$$

(e)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x - 10)}$$

(f)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{4 \operatorname{arctg} x}{\pi} \right)^{\frac{1}{\arccos^2 x}}$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x - \sin x}$$

(g)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{\exp(bx)}$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right)$$

(h)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\frac{\pi}{\ln x}}$$

2. Spočítejte derivace (i jednostranné) všude, kde to má smysl, funkce  $f(x) = \sqrt{\sqrt{x} - x}$ .

3. Spočítejte první a druhou derivaci funkce  $f(x) = \sin(x|x|)$ .

4. Příklad spojitě funkce, jejíž derivace není spojitá:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

5. Dokažte, že  $\sin x < x$  pro každé  $x > 0$ . (Uděláno na přednášce.)

6. Dokažte, že  $\operatorname{tg} x > x$  pro  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

7. Dokažte, že  $\operatorname{arctg} x < x$  pro  $x \in (0, \infty)$ .

8. Dokažte, že  $\sin x > \frac{2x}{\pi}$  pro  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

9. Dokažte, že  $\ln x < x - 1$  pro  $x \in (0, \infty) \setminus \{0\}$ .