

## Aplikace určitého integrálu

### 1. Obsah oblasti omezené křivkami

- $a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)$

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

- $a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)$ , kde  $y = f(x)$  je dány parametricky  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ ,  $\varphi, \psi$  spojité na  $[t_1, t_2]$ ,  $\varphi$  ryze monotónní,  $\varphi'$  spojitá,  $\varphi(t_1) = a, \varphi(t_2) = b, \psi$  nezáporná na  $[t_1, t_2]$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) |\varphi'(t)| dt$$

- Speciálně  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, 0 \leq r \leq f(\theta)$

$$S = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(\theta) d\theta$$

### 2. Objemy těles

- Rotační těleso vzniklé rotací oblasti  $a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)$ ,  $a \geq 0$

– kolem osy  $x$

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$$

– kolem osy  $y$

$$V = 2\pi \int_a^b (xf(x) - xg(x)) dx$$

- $y = f(x)$  popsáno parametricky viz výše,  $g(x) = 0$

– kolem osy  $x$

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} \psi^2(t) |\varphi'(t)| dt$$

– kolem osy  $y$

$$V = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) |\varphi(t) \varphi'(t)| dt$$

- $0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \pi$ ,  $0 \leq r \leq f(\theta)$  kolem osy  $x$

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^3(\theta) \sin \theta d\theta$$

- Je-li  $S(x)$  obsah průřezu,  $a \leq x \leq b$

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

### 3. Délka křivky

- Parametrický popis  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $\varphi'$ ,  $\psi'$  spojitě

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

- speciálně  $\varphi = x$ ,  $\psi = f(x)$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

- $r = f(\theta)$

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f^2(\theta) + (f'(\theta))^2} d\theta$$

### 4. Obsah rotačních ploch

- Rotace parametricky popsané plochy (viz výše) kolem osy  $x$

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |\psi(t)| \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

- Speciálně  $\varphi = x$ ,  $\psi = f(x)$

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

- $r = f(\theta)$ ,  $f'$  spojitá

$$S = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} |f(\theta)| \sin \theta \sqrt{f^2(\theta) + (f'(\theta))^2} d\theta$$

5. Statické momenty, momenty setrvačnosti, těžiště

- Oblast omezená  $a \leq x \leq b$ ,  $g(x) \leq y \leq f(x)$ ,  $f, g$  spojitě,  $\sigma(x)$  plošná hustota

Statické momenty vzhledem k ose  $x$  resp.  $y$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b \sigma(x)(f^2(x) - g^2(x))dx \quad M_y = \int_a^b \sigma(x)x(f(x) - g(x))dx$$

Těžiště  $T = [\xi, \eta]$ , kde

$$\xi = \frac{M_y}{M} \quad \eta = \frac{M_x}{M} \quad M = \int_a^b \sigma(x)(f(x) - g(x))dx$$

Momenty setrvačnosti vzhledem k osám  $x, y, z$

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b \sigma(x)(f^3(x) - g^3(x))dx$$

$$I_y = \int_a^b \sigma(x)x^2(f(x) - g(x))dx$$

$$I_z = I_x + I_y$$

- Hmotný oblouk  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  s lineární hustotou  $\mu(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ ,  $\varphi', \psi'$  spojitě

Statické momenty vzhledem k osám  $x, y$

$$M_x = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt$$

$$M_y = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\varphi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt$$

Těžiště  $T = [\xi, \eta]$ , kde

$$\xi = \frac{M_y}{M} \quad \eta = \frac{M_x}{M} \quad M = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt$$

Momenty setrvačnosti vzhledem k osám  $x$  a  $y$  jsou

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\psi^2(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt$$

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\varphi^2(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt$$

- Rotační těleso  $a \leq x \leq b$ ,  $0 \leq g(x) \leq \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)$  s objemovou hustotou  $\gamma(x)$

Statické momenty vzhledem k souřadnicovým rovinám

$$M_{xy} = M_{xz} = 0 \quad M_{yz} = \pi \int_a^b \gamma(x)x(f^2(x) - g^2(x))dx$$

Těžiště

$$T = (\xi, 0, 0), \quad \xi = \frac{M_{yz}}{M} \quad M = \pi \int_a^b \gamma(x)(f^2(x) - g^2(x))dx$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose  $x$  je

$$I_x = \frac{1}{2}\pi \int_a^b \gamma(x)(f^4(x) - g^4(x))dx$$