

Příklady na 1. týden

Aplikace určitého integrálu

1. Nalezněte obsah oblasti ohraničené $xy = 4$, $x + y = 5$.
2. Nalezněte obsah oblasti ohraničené $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$.
3. Nalezněte obsah elipsy s poloosami a , b .
4. Nalezněte obsah oblasti ohraničené kardioidou $r = a(1 + \cos \varphi)$, $a > 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
5. Nalezněte obsah oblasti ohraničené lemniskátou $r = 4 \sin^2 \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
6. Nalezněte obsah oblasti ohraničené $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.
7. Odvoďte vztahy pro objem koule, kuželu, jehlanu.
8. Spočítejte objem tělesa vzniklého rotací oblouku kardioidy $r = a(1 + \cos \varphi)$, $\varphi \in (0, \pi)$ kolem osy x .
9. Spočítejte objem části tělesa $x^2 + 4y^2 \leq a^2$ ležícího mezi rovinami $z = 0$ a $y = z$.
10. Odvoďte vztah pro délku kružnice.
11. Spočítejte délku křivky $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$, $x \in (-1, 1)$.
12. Spočítejte délku evolventy kruhu $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
13. Odvoďte vzorec pro povrch koule.
14. Nalezněte povrch rotačního tělesa vzniklého rotací křivky $y = x^3$, $|x| \leq 1$ kolem osy x .
15. Nalezněte polohu těžiště homogenního čtvrtkruhu o poloměru r .
16. Nalezněte polohu těžiště poloviny homogenní asteroidy $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in [0, \pi]$.

17. Nalezněte polohu těžiště homogenní polokoule $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $x > 0$.
18. Určete moment setrvačnosti oblouku asteroidy (viz výše, $t \in [0, \pi/2]$) vzhledem k souřadnicovým osám.
19. Přímočarý pohyb tělesa je daný funkcí $s = ct^3$, kde $s(t)$ je délka dráhy za čas t . Odpor prostředí je úměrný čtverci rychlosti. Vypočítejte práci, kterou vykonají třecí síly, pokud těleso projde dráhu od $s = 0$ do $s = a$.
20. Při průchodu radioaktivního záření vrstvou látky o tloušťce h poklesla jeho intenzita na polovinu původní hodnoty. Jaká bude intenzita tohoto záření po průchodu vrstvou o tloušťce H ? (Úlohu řešte za předpokladu, že intenzita záření absorbovaného tenkou vrstvou látky je přímo úměrná tloušťce vrstvy a intenzitě dopadajícího záření).

Newtonův integrál, konvergence integrálu

Spočtete

$$21. \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

$$22. \int_0^{\infty} e^{-3x} dx$$

$$23. \int_0^1 x \ln x dx$$

$$24. \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bxdx$$

$$25. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx$$

Zjistěte, zda konvergují integrály

26. $\int_0^{\infty} x^p dx, p \in \mathbb{R}$

27. $\int_1^{\infty} x^p dx, p \in \mathbb{R}$

28. $\int_0^{10} x^p dx, p \in \mathbb{R}$

29. $\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} dx$

30. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}} dx$

31. $\int_0^2 \frac{1}{\ln x} dx$

32. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{x^p} dx, p \in \mathbb{R}$

33. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$