Příklad 1 Je dána funkce $\eta \in C([-\omega, 0])$. Definujme operátor $\mathcal{T} : C([0,T]) \to C([0,T])$, který funkci $I(t)$ přiřadí funkcí $Y(t)$ podle předpisu

$$Y(t) = \eta(0) \exp \left\{ \int_0^t -\gamma + \beta \big[1 - I(\tau) - \gamma \int_{-\omega}^0 \tilde{I}(\tau + u) du \big] dt \right\};$$

funkce $\tilde{I}(s)$ je definována jako $I(s)$ pro $s \in [0,T]$ a jako $\eta(s)$ pro $s \in [-\omega, 0)$.
(a) Ukažte, že pevný bod operátoru $\mathcal{T}$ je právě funkce řešící rovnici

$$I'(t) = I(t) \big\{ -\gamma + \beta \big[1 - I(t) - \gamma \int_{-\omega}^0 I(t+u) du \big] \big\} \qquad \text{(SIRS-del-2)}$$

s podmínkou počáteční historie

$$I(s) = \eta(s), \qquad s \in [-\omega, 0]. \tag{1}$$

(b) Ukažte, že pokud $\eta \geq 0$ a $\eta(0) \in [0,1]$, pak $I(t) \in [0,1]$ implikuje $Y(t) \in [0,1]$ pro všechna $t \in [0,T]$.
(c) Ukažte konečně, že $\mathcal{T}$ je kontrakce na podmnožině spojitých funkcí $I : [0,T] \to [0,1]$, je-li T dosti malé.

Příklad 2 Uvažujeme systém (SIRnS)

$$\begin{aligned} S' &= -\beta S I + \varepsilon R_n \\ I' &= \beta S I - \gamma I \\ R_1' &= \gamma I - \varepsilon R_1 \\ R_k' &= \varepsilon R_{k-1} - \varepsilon R_k, \qquad k = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Dokažte Větu III.8: Nechť $(S, I, R_1, \ldots, R_n)$ je periodické řešení (SIRnS). Potom platí

$$R_k(t) = \gamma \int_{-\infty}^0 \frac{(\varepsilon|u|)^{k-1}}{(k-1)!} e^{\varepsilon u} I(t+u) du, \tag{2}$$

$$I'(t) = -\gamma I(t) + \beta I(t) \big[1 - I(t) - \gamma \int_{-\infty}^0 I(t+u) P(-u) du \big], \tag{3}$$

$$\text{kde} \quad P(t) = \big[1 + \frac{\varepsilon t}{1!} + \cdots + \frac{(\varepsilon t)^{n-1}}{(n-1)!} \big] e^{-\varepsilon t}.$$

A obráceně: je-li $I(t)$ periodické řešení rovnice (3), pak předchozí vztahy pro R_k dají (periodické) řešení původní soustavy (SIRnS).

Nápověda.
1 — Uvažte, že Y je řešení rovnice

$$Y(t)' = I(t)\big\{ -\gamma + \beta(1 - I(t) - \gamma \int_{-\omega}^{0} \tilde{I}(t+u)du)\big\}$$

s počáteční podmínkou $Y(0) = \eta(0)$.
2 — Integrujte rovnici pro R_1 od τ do t. Limita $\tau \to -\infty$ (spolu s omezeností periodických řešení) dá (2) pro $k = 1$. Dále indukcí. Obráceně: (2) derivujte dle t, napravo integrujte per-partes.