

PRAVIDLA PRO ORGANIZOVÁNÍ STÁTNÍ DOKTORSKÉ ZKOUŠKY Z MATEMATICKÉ ANALÝZY (4M3) PRO STUDENTY SE ZAMĚŘENÍM NA REÁLNOU, KOMPLEXNÍ A FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZU

1. STRUKTURA ZKOUŠKY

1.1. Pro účely státní doktorské zkoušky budou na stránkách RDSO (též u předsedy, místopředsedy a tajemníka) vedeny (tedy připraveny a průběžně doplňovány) dva seznamy témat označené jako

- **seznam A**, obsahující témata, která patří ke všeobecným znalostem z matematické analýzy;
- **seznam B**, obsahující speciálnější témata z matematické analýzy.

Všechna témata na obou seznamech budou z podstatné části sloužit k rozšíření znalostí studenta o látku, která není zahrnuta do požadavků ke státní magisterské zkoušce.

1.2. Témata budou mít přiměřený rozsah, obvykle 70-100 stránek v závislosti na obtížnosti látky, který by měl zhruba odpovídat obsahu alespoň jedné semestrální přednášky opatřené hodinovou dotací 2/0. U každého tématu bude uveden podrobný sylabus, seznam požadované literatury včetně stránek, jméno autora tématu a základní seznam pedagogických nebo vědeckých pracovníků schopných a ochotných uvesti látku zkoušet (u každého tématu bude zajištěno, aby byl v České republice k dispozici dostatečný počet (nejméně dvě) takové osoby).

1.3. Školitel studenta, chystajícího se ke státní doktorské zkoušce, vybere pro účely této zkoušky právě jedno téma (označme jej písmenem **a**) ze seznamu **A** a právě jedno téma (označené písmenem **b**) ze seznamu **B**. K těmto dvěma tématům přidá ještě třetí téma (které označíme písmenem **c**), blízké hlavnímu předmětu studia či výzkumu příslušného studenta. Téma **c** může, ale nemusí být obsaženo v aktuální verzi jednoho ze seznamů **A**, **B**. Jeho rozsah by měl být obdobný rozsahu témat na seznamech **A** a **B**. Školitel navrhne alespoň jednoho examinátora pro téma **c**. Celkový soubor tří zvolených témat **a**, **b**, **c** předloží školitel RDSO ke schválení co nejdříve po zahájení příslušného doktorského studia, nejpozději však před podáním žádosti o stanovení termínu zkoušky.

1.4. RDSO se seznámí s návrhem školitele a pečlivě posoudí přiměřenost zvolené kombinace a rozsahu tématu **c**, pokud již před zkouškou toto téma nebylo uvedeno na některém ze seznamů. Po důkladném posouzení návrhu rozhodne RDSO hlasováním, zda návrh školitele schválí. Pak RDSO vyrozumí školitele o výsledku hlasování. V případě, že návrh schválen nebude, oznámí RDSO školiteli seznam nedostatků a vyzve jej k jejich odstranění.

1.5. Poté, co RDSO schválí školitelem navržený seznam témat **a**, **b**, **c**, navrhne RDSO složení zkušební komise děkanovi fakulty ke schválení.

1.6. Po ustanovení zkušební komise a určení termínu zkoušky seznámí RDSO všechny členy zkušební komise podrobně se schválenými sylaby témat **a**, **b**, **c** a ke každému z témat určí jednoho zkoušejícího. Žádný ze tří zkoušejících nesmí být zároveň školitelem studenta, a to ani v případě tématu **c**.

1.7. Zkouška se bude skládat ze tří částí, ve kterých budou položeny otázky k daným tématům **a**, **b** a **c**.

1.8. Seznamy **A** a **B** budou trvale otevřeny k průběžnému doplňování. Kdokoli a kdykoli může podat RDSO návrh na zařazení dalšího tématu do některého z obou stávajících seznamů. Například po každé zkoušce může být téma **c** přidáno na některý z obou seznamů (pokud se na tomto seznamu nenacházelo již před zkouškou), aby mohlo být v budoucnu využíváno dalšími studenty, kteří by o ně případně mohli projevit zájem. Každý návrh na zařazení nového tématu na některý ze seznamů podaný RDSO bude pečlivě posouzen.

2. SEZNAM A

2.1. Teorie distribucí.

- distribuce a jejich základní vlastnosti, lokalizace a nosiče distribucí, konvoluce distribucí, temperované distribuce a jejich Fourierova transformace, Paleyho-Wienerovy věty, Sobolevovo lemma, fundamentální řešení, eliptické rovnice; [20], strany 149–222

možní examinátoři: M. Rokyta, J. Spurný

autor tématu: J. Spurný

poslední úprava: 11/2010

2.2. Pokročilejší partie spektrální teorie.

- hlubší vlastnosti grupy invertovatelných prvků, Lomonosovova věta, aplikace Gelfandovy transformace v nekomutativních algebrách, vlastní čísla normálního operátoru, pozitivní operátory a odmocniny, grupa invertibilních operátorů, Gelfandova-Naimarkova-Segalova konstrukce, ergodická věta, spektrální věta pro neomezené normální operátory, semigrupy operátorů; [20], strany 267-271, 292-301, 327-341, 368-385

možní examinátoři: V. Müller, J. Spurný

autor tématu: J. Spurný

poslední úprava: 11/2010

2.3. Komplexní analýza.

- *Harmonické funkce:* Cauchyovy-Riemannovy rovnice, Poissonův integrál, vlastnost průměru, chování Poissonova integrálu u hranice, věty o reprezentaci; [21], strany 257–276
- *Konformní zobrazení:* zachovávání úhlů, lineární lomená zobrazení, normální třídy, Riemannova věta (bez důkazu), spojitost na hranici, konformní zobrazení mezikružší; [21], strany 307–314, 318–322
- *Nulové body holomorfních funkcí:* nekonečné součiny, Weierstrassova věta o faktorizaci, interpolační problém, Jensenův vzorec, Blaschkeho součiny; [21], strany 329–344
- *Analytické pokračování:* regulární a singulární body, pokračování podél křivek, věta o monodromii, konstrukce modulární funkce, Picardova věta; [21], strany 351–364

možní examinátoři: O. Kalenda, M. Rokyta

autoři tématu: O. Kalenda a M. Rokyta

poslední úprava: 11/2010

2.4. Úvod do abstraktní harmonické analýzy.

- *Lokálně kompaktní topologické grupy*: pojem topologické grupy, Haarova míra, modulární funkce, konvoluce na lokálně kompaktních abelovských grupách; [13], strany 31–54
- *Unitární reprezentace*: základní pojmy (unitární ekvivalence, ireducibilní reprezentace, cyklická reprezentace, komutant), Schurovo lemma, funkce pozitivního typu, Gelfandova-Raikovova věta; [13], strany 67–86
- *Harmonická analýza na LCA grupách*: duální grupa a její topologie, Fourierova transformace, Plancherelova věta, Pontrjaginova věta o dualitě, věta o inverzi; [13], strany 87–103

možní examinátoři: P. Holický, M. Zelený

autor tématu: M. Zelený

poslední úprava: 11/2010

2.5. Úvod do teorie aproximací.

- *Existence a jednoznačnost nejlepší aproximace*: základní pojmy, existence a jednoznačnost nejlepší aproximace pro konečně-dimenzionální, stejnoměrně a striktně konvexní Banachovy prostory, metrická projekce; [9], strany 20–24
- *Aproximace spojitých funkcí*: Lagrangeova formule, Čebyševovy polynomy, Hermiteova interpolace, Bernsteinovy polynomy, monotónní operátory, Fejérová věta, silná jednoznačnost, Haarova podmínka, alternační věta, Markovovy systémy, de la Vallée Poussinova věta, Freudova věta; [9], strany 57–83
- *Kolmogorovova věta a její důsledky*: charakterizace nejlepší aproximace na konvexních množinách pomocí funkcionalů, Fenchelova věta, Kolmogorovova věta, Rivlinova-Shapirova věta; [11], strany 58–67
- *Prostory hladkých funkcí*: modul spojitosti, modul hladkosti, Marchaudova nerovnost, Lipschitzovy prostory; [11], strany 46–54
- *Ústřední věty teorie aproximací*: přímé a inverzní věty trigonometrické aproximace, Jacksonova věta, Stěčkinova věta, simultánní aproximace, Zamanského lemma, Czipserova a Freudova věta, Szegöova věta, Bernsteinova nerovnost, Markovova nerovnost, Timanova-Zygmundova věta, aproximace algebraickými polynomy; [11], strany 97–99, 201–211, 219–223

možní examinátoři: L. Pick

autor tématu: L. Pick

poslední úprava: 12/2010

2.6. Klasické partie harmonické analýzy.

- Poissonův integrál, maximální funkce, řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici, Besselův a Rieszův potenciál, souvislosti se Sobolevovými prostory, Hilbertova transformace, singulární integrální operátory, Calderónova-Zygmundova jádra,

multiplikátory v Lebesgueových prostorech, Michlinova-Hörmanderova věta; [23, kapitoly 1–3]

možní examinatori: L. Pick, J. Malý

autor tématu: M. Krbec

poslední úprava: 12/2010

2.7. Hausdorffova míra a záměna proměnných v integrálu.

- Hausdorffova míra a dimenze, základní vlastnosti, isodiametrická nerovnost, hustoty, Hausdorffova míra a elementární vlastnosti funkcí, záměna proměnných pro Lipschitzovské transformace: area formula, coarea formula; [12], strany 60–119

možní examinatori: S. Hencl, J. Malý, L. Pick

autor tématu: J. Malý

poslední úprava: 11/2010

2.8. Prostory funkcí s konečnou variací a aproximace hladkými funkcemi.

- pokrývací věty, prostor BV , věta o struktuře, aproximace a kompaktnost, stopy, rozšíření, coarea formula pro funkce s konečnou variací, isoperimetrické nerovnosti, Cantorovská část, skoky, množiny s konečným perimetrem, redukováná hranice, Gaussova-Greenova věta pro množiny s konečným perimetrem, charakterizace pomocí míry hustotní hranice, aproximativní diferencovatelnost, diferencovatelnost v L^p a $W^{1,p}$, konvexní funkce, Whitneyova rozšiřovací věta, aproximace funkcemi třídy C^1 ; [12], strany 166–256

možní examinatori: S. Hencl, J. Malý, L. Pick

autoři tématu: J. Malý, L. Pick

poslední úprava: 11/2010

3. SEZNAM B

3.1. Úvod do teorie interpolací.

- *Klasické interpolační věty*: Rieszova-Thorinova věta, Marcinkiewiczova věta; [7], strany 9–22
- *Abstraktní teorie interpolací*: kategorie a funktory, páry prostorů, interpolační prostory, Aronszajnova-Gagliardova věta, věta o duálech; [7], strany 34–48
- *Metoda reálné interpolace*: Peetreho K-funkcionál a J-funkcionál, Holmstedtovy formule, věta o reiteraci, věta o ekvivalenci metod, věta o hustotě, monotónní interpolační prostory, Cwikelovo lemma, K-funkcionál pro dvojici (L^1, L^∞) ; [4], strany 293–330, 74–79

možní examinační: L. Pick, B. Opic

autor tématu: L. Pick

poslední úprava: 12/2010

3.2. Topologický stupeň:

- jednoznačnost stupně, konstrukce stupně, vlastnosti stupně a Brouwerova věta, Borsukova věta, součinná formule a Jordanova separační věta, konstrukce a vlastnosti Lerayova-Schauderova stupně; [10], strany 1–67

možní examinační: S. Hencl, J. Malý, J. Spurný

autor tématu: J. Spurný

poslední úprava: 11/2010

3.3. Integrovní reprezentace na kompaktech.

- těžiště míry, uspořádání měr, Choquetova reprezentační věta, abstraktní hranice, Choquetovy a Bauerovy simplex; [2], strany 1–55, 84–109

možní examinační: O. Kalenda, J. Spurný

autor tématu: J. Spurný

poslední úprava: 11/2010

3.4. Teorie C^* -algeber.

- základní vlastnosti C^* -algeber, uspořádání na C^* -algebrách, pozitivní prvky, komutativní algebry, reprezentace, topologie na von Neumannových algebrách, věty o aproximaci; [17], oddíly 4.1-4.5 (strany 236–285) a 5.1-5.3 (strany 304–330)

možní examinační: J. Hamhalter, O. Kalenda, V. Müller, J. Spurný

autor tématu: O. Kalenda, J. Spurný

poslední úprava: 6/2018

3.5. Deskriptivní teorie množin.

- hierarchie borelovských množin, věty o oddělování a redukci, hierarchie projekčních množin, analytické a koanalytické množiny, analyticky a koanalyticky úplné množiny, prostory stromů a lineárních uspořádání, vlastnosti regularity analytických a koanalytických množin, první oddělovací princip, prostá borelovská zobrazení, Novikovův oddělovací princip, borelovské množiny s kompaktními řezy, polské grupy a borelovská měřitelnost, věty o redukci, věta o omezenosti koanalytického ranku, univerzální množiny pro $\Delta_1^1(X)$, Choquetova věta o kapacitabilitě, rruhý oddělovací princip, zobrazení se spočetnými vzory bodů; [22], strany 115–182 bez Solovayova příkladu v odstavci 4.5.3 na stranách 151–153
- Kuratowského a Ryllova-Nardzewského selekční věta; [22], strany 189–193
- Borelovské množiny se σ -kompaktními řezy; [22], strany 219–227
- Uniformizace koanalytických množin; [22], strany 236–240

možní examinátoři: P. Holický, L. Zajíček, M. Zelený

autoři tématu: P. Holický a M. Zelený

poslední úprava: 11/2010

3.6. Prostory funkcí.

- *Prostory integrovatelných a diferencovatelných funkcí:* Orliczovy, Morreyovy, Campanatovy prostory, prostor BMO, Sobolevovy prostory; [19], strany 126–166, 209–229, 249–292

možní examinátoři: S. Hencl, J. Malý, B. Opic, L. Pick

autoři tématu: M. Krbec, L. Pick

poslední úprava: 12/2010

3.7. Singulární integrály.

- maximální funkce, pokrývací věty, Fourierova transformace singulárních integrálů, L^2 odhady, slabé L^1 odhady, interpolace; [23], strany 3–53
- Rieszova transformace, sférické harmoniky; [23], strany 54–80

možní examinátoři: S. Hencl, J. Malý, L. Pick

autor tématu: J. Malý

poslední úprava: 12/2010

3.8. Littewoodova–Payleyova teorie.

- maximální funkce, pokrývací věty, Fourierova transformace singulárních integrálů, L^2 odhady, slabé L^1 odhady, interpolace; [23], strany 3–53
- Littewoodova–Payleyova teorie a multiplikátory; [23], strany 81–115

možní examinátoři: S. Hencl, J. Malý, L. Pick

autor tématu: J. Malý

poslední úprava: 12/2010

3.9. Rieszovy a Besselovy potenciály.

- maximální funkce, pokrývací věty, Fourierova transformace singulárních integrálů, L^2 odhady, slabé L^1 odhady, interpolace; [23], strany 3–53
- Rieszovy a Besselovy potenciály, ekvivalence Sobolevových prostorů a prostorů Besselových potenciálů; [23], strany 116–165

možní examinátoři: S. Hencl, J. Malý, B. Opic, L. Pick

autor tématu: J. Malý

poslední úprava: 12/2010

3.10. Hardyho prostory.

- reálně analytické Hardyho prostory, definice pomocí maximálních operátorů, charakterizace pomocí rozkladu na atomy, spojitost singulárních operátorů, dualita $VMO-H_1$ - BMO , Feffermanova-Steinova nerovnost; [24], strany 87–177

možní examinátoři: S. Hencl, J. Malý, B. Opic, L. Pick

autor tématu: J. Malý

poslední úprava: 12/2010

3.11. Zobrazení s konečnou distorzí.

- definice a její geometrická interpretace, příklady, spojitost, slabě monotonní funkce, nenulovost jakobiánu, otevřenost a diskrétnost; [16], strany 99–163, 401–428

možní examinátoři: S. Hencl, J. Malý

autor tématu: J. Malý

poslední úprava: 12/2010

3.12. Isoperimetrická nerovnost.

- formulace izoperimetrického problému, dvourozměrné důkazy, Federerova-Flemingova věta, Gromovův důkaz, Gagliardova-Nirenbergova nerovnost s přesnou konstantou, Minkowského area, Brunnova-Minkowského nerovnost, izoperimetrická nerovnost pro perimetr; [8], strany 1–100

možní examinátoři: S. Hencl, J. Malý, D. Pražák

autor tématu: J. Malý

poslední úprava: 12/2010

3.13. Diferencovatelnost konvexních funkcí.

- *Konvexní funkce:* Gâteauxovská a fréchetovská diferencovatelnost, subdiferenciál, Bishop-Phelpsova věta o hustotě funkcionálů nabývajících normu, existence nikde fréchetovsky diferencovatelné normy na separabilním prostoru s neseperabilním duálem; [5], strany 83–89

- *Nulové množiny*: základní vlastnosti haarovsky nulových množin, rozdíl haarovsky nenulových množin obsahuje okolí neutrálního prvku, kladný kužel v prostoru ℓ_p je haarovsky nulový, Gaussovské míry v Banachově prostoru, Gaussovsky a Aronszajnovsky nulové množiny; [5], strany 125–130, 135–142
- *Body nediferencovatelnosti*: Konvexní (nebo Lipschitzovská) funkce na separabilním Banachově prostoru je Gâteauxovsky diferencovatelná až na Aronszajnovsky nulovou množinu; [5], strany 153–155

možní examinátoři: P. Holický, O. Kalenda, J. Tišer, L. Zajíček

autor tématu: J. Tišer

poslední úprava: 12/2010

LITERATURA

- [1] R. A. Adams, *Sobolev spaces*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975, xviii+268 pp.
- [2] E. M. Alfsen, *Compact convex sets and boundary integrals*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 57. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1971. x+210 pp.
- [3] L. Ambrosio, N. Fusco and D. Pallara, *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000, xviii+434 pp. ISBN: 0-19-850245-1 .
- [4] C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of Operators*. Pure and Applied Mathematics, 129. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988, xiv+469 pp., ISBN: 0-12-088730-4.
- [5] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss, *Geometric Nonlinear Functional Analysis, Vol. 1*. Colloquium Publications Vol 48, Amer. Math. Soc., 2000.
- [6] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. x+207 pp.
- [7] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolyatsionnye prostranstva. Vvedenie*. “Mir”, Moscow, 1980. 264 pp.
- [8] I. Chavel, *Isoperimetric inequalities. Differential geometric and analytic perspectives*. Cambridge Tracts in Mathematics, 145. Cambridge University Press, Cambridge, 2001, xii+268 pp. ISBN: 0-521-80267-9.
- [9] E. W. Cheney, *Introduction to approximation theory*. McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto, Ont.-London 1966, xii+259 pp., ISBN: 0-8218-1374-9.
- [10] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1985. xiv+450 pp. ISBN: 3-540-13928-1.
- [11] R. A. DeVore and G. G. Lorentz, *Constructive approximation*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 303, Springer-Verlag, Berlin, 1993, x+449 pp., ISBN: 3-540-50627-6.
- [12] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992, viii+268 pp. ISBN: 0-8493-7157-0.
- [13] B. B. Folland, *A course in abstract harmonic analysis*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995, x+276 pp., ISBN: 0-8493-8490-7.
- [14] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*. Graduate Texts in Mathematics, 250. Springer, New York, 2009, xvi+504 pp. ISBN: 978-0-387-09433-5.
- [15] L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis*. Graduate Texts in Mathematics, 249. Springer, New York, 2008, xvi+489 pp. ISBN: 978-0-387-09431-1.
- [16] T. Iwaniec and G. Martin, *Geometric Function Theory and Non-linear Analysis*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2001, xvi+552. ISBN: 0-19-850929-4.

- [17] R. V. Kadison and J. R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras, Vol. I.* Pure and Applied Mathematics, 100. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983. xv+398 pp. ISBN: 0-12-393301-3.
- [18] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory.* Graduate Texts in Mathematics, 156. Springer-Verlag, New York, 1995, xviii+402 pp., ISBN: 0-387-94374-9.
- [19] A. Kufner, O. John and S. Fučík, *Function Spaces.* Monographs and Textbooks on Mechanics of Solids and Fluids; Mechanics: Analysis. Noordhoff International Publishing, Leyden; Academia, Prague, 1977, xv+454 pp. ISBN: 90-286-0015-9.
- [20] W. Rudin, *Functional analysis. Second edition..* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991, xviii+424 pp., ISBN: 0-07-054236-8.
- [21] W. Rudin, *Analýza v reálném a komplexním oboru.* Academia, Prague, 2003, 463 pp.
- [22] S. M. Srivastava, *A course on Borel sets.* Graduate Texts in Mathematics, 180. Springer-Verlag, New York, 1998, xvi+261 pp. ISBN: 0-387-98412-7.
- [23] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton Mathematical Series, No. 30 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1970, xiv+290 pp.
- [24] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.* Princeton Mathematical Series, 43. Monographs in Harmonic Analysis, III. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993, xiv+695 pp., ISBN: 0-691-03216-5.
- [25] M. Takesaki, *Theory of operator algebras. I.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1979, vii+415 pp. ISBN: 0-387-90391-7.
- [26] W. P. Ziemer, *Weakly differentiable functions. Sobolev spaces and functions of bounded variation.* Graduate Texts in Mathematics, 120. Springer-Verlag, New York, 1989, xvi+308 pp. ISBN: 0-387-97017-7.