Náhodné procesy II

Zuzana Prášková[1]

[1]Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Univerzita Karlova v Praze
email: praskova@karlin.mff.cuni.cz

23.4.-7.5. 2010

Outline

Projekce v Hilbertově prostoru

Definice:

Nechť H je Hilbertův prostor (úplný vektorový prostor se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$) a normou $||.||$, která je pro každé $x \in H$ definovaná jako $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Jestliže pro dva prvky $x, y \in H$ platí $\langle x, y \rangle = 0$, říkáme, že tyto prvky jsou navzájem kolmé (ortogonální) a značíme $x \perp y$.

Nechť $M \subset H$ je podmnožina H. Říkáme, že prvek $x \in H$ je kolmý k M, jestliže je kolmý ke každému prvku M, tj. $\langle x, y \rangle = 0$ pro každé $y \in M$. Stručně píšeme $x \perp M$.

Množina $M^{\perp} = \{y \in H : y \perp M\}$ se nazývá ortogonální doplněk množiny M.

Věta 49:
Nechť H je Hilbertův prostor, $M \subset H$ je jeho libovolná podmnožina. Potom $M^\perp$ je uzavřený podprostor H.

Důkaz:
Nulový prvek patří do $M^\perp$, neboť $\langle 0, x \rangle = 0$ pro každé $x \in M$.

Linearita skalárního součinu $\Rightarrow$ každá lineární kombinace dvou prvků $M^\perp$ je prvkem $M^\perp$
Spojitost skalárního součinu $\Rightarrow$ limita posloupnosti prvků $M^\perp$ je prvkem $M^\perp$. $\square$

Věta 50 (o projekci):

Nechť M je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Potom pro každý prvek $x \in H$ existuje jednoznačný rozklad na součet $x = \widehat{x} + (x - \widehat{x})$, kde $\widehat{x} \in M$ a $x - \widehat{x} \in M^{\perp}$. Dále platí

$$||x - \widehat{x}|| = \min_{y \in M} ||x - y|| \qquad (1)$$

a

$$||x||^2 = ||\widehat{x}||^2 + ||x - \widehat{x}||^2. \qquad (2)$$

Důkaz: Rudin (2003), věta 4.11.

Prvku $\widehat{x} \in M$ s vlastností (1) říkáme (ortogonální) projekce prvku x na podprostor M. Zobrazení P_M, které každému prvku $x \in H$ přiřazuje jeho ortogonální projekci na podprostor M, budeme nazývat projekční zobrazení. Zřejmě tedy pro každé $x \in H$

$$x = P_M x + (x - P_M x) = P_M x + (I - P_M)x, \qquad (3)$$

kde $P_M x \in M, (I - P_M)x \in M^{\perp}$ a I značí identické zobrazení.

Věta 51:

Nechť H je Hilbertův prostor, P_M projekční zobrazení H do jeho uzavřeného podprostoru M.

1. Pro každé $x, y \in H$ a libovolné $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ je $P_M(\alpha x + \beta y) = \alpha P_M x + \beta P_M y$.
2. Jestliže $x \in M$, potom $P_M x = x$.
3. Jestliže $x \in M^{\perp}$, potom $P_M x = 0$.
4. Jestliže M_1, M_2 jsou uzavřené podprostory H takové, že $M_1 \subseteq M_2$, potom $P_{M_1} x = P_{M_1}(P_{M_2} x)$ pro každé $x \in H$.
5. Jestliže x_n, x jsou prvky H takové,že $||x_n - x|| \to 0$ pro $n \to \infty$, potom $||P_M x_n - P_M x|| \to 0$.

Důkaz:

1.
$$\begin{aligned}\alpha x + \beta y &= \alpha(P_M x + (x - P_M x)) + \beta(P_M y + (y - P_M y)) \\ &= \alpha P_M x + \beta P_M y + \alpha(x - P_M x) + \beta(y - P_M y).\end{aligned}$$

$\alpha P_M x + \beta P_M y \in M, \ \alpha(x - P_M x) + \beta(y - P_M y) \in M^\perp$
$\Rightarrow \alpha P_M x + \beta P_M y = P_M(\alpha x + \beta y).$

2. Plyne z jednoznačnosti rozkladu (3).
3. Plyne z jednoznačnosti rozkladu (3).
4. $x = P_{M_2}x + (x - P_{M_2}x), \ P_{M_2}x \in M_2, \ x - P_{M_2}x \in M_2^\perp$
$P_{M_1}x = P_{M_1}(P_{M_2}x) + P_{M_1}(x - P_{M_2}x).$
$P_{M_1}(P_{M_2}x) \in M_1, \ M_2^\perp \subseteq M_1^\perp \Rightarrow P_{M_1}(x - P_{M_2}x) = 0.$
5. Z linearity projekce a z rovnice (2)

$$||P_M x_n - P_M x||^2 = ||P_M(x_n - x)||^2 \leq ||x_n - x||^2.$$

Predikce založená na konečné minulosti

Problém: Uvažujme $X_1, \dots, X_n$ s nulovými středními hodnotami a konečnými druhými momenty. Na základě $X_1, \dots, X_n$ chceme předpovědět veličinu X_{n+h}, kde $h > 0$. Hledáme aproximaci X_{n+h} měřitelnou funkcí $g(X_1, \dots, X_n)$ (předpověď), pro kterou výraz

$$\mathrm{E}\left|X_{n+h} - g\left(X_1, \dots, X_n\right)\right|^2$$

nabývá minimální hodnoty.
Řešením této úlohy je podmíněná střední hodnota

$$g(X_1, \dots, X_n) = \mathrm{E}(X_{n+h}|X_1, \dots, X_n).$$

Je totiž, zavedeme-li značení $(X_1, \dots, X_n)' = \mathbf{X}_n$,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left(X_{n+h} - g(\mathbf{X}_n)\right)^2 \\
&= \mathrm{E}\left(X_{n+h} - \mathrm{E}(X_{n+h}|\mathbf{X}_n) + \mathrm{E}(X_{n+h}|\mathbf{X}_n) - g(\mathbf{X}_n)\right)^2 \\
&= \mathrm{E}\left(X_{n+h} - \mathrm{E}(X_{n+h}|\mathbf{X}_n)\right)^2 + \mathrm{E}\left(\mathrm{E}(X_{n+h}|\mathbf{X}_n) - g(\mathbf{X}_n)\right)^2 \\
&+ 2\mathrm{E}\left[\left(X_{n+h} - \mathrm{E}(X_{n+h}|\mathbf{X}_n)\right)\left(\mathrm{E}(X_{n+h}|\mathbf{X}_n) - g(\mathbf{X}_n)\right)\right],
\end{aligned}
$$

přičemž pro poslední sčítanec platí

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[(X_{n+h} - \mathrm{E}(X_{n+h}|\mathbf{X}_n))\left(\mathrm{E}(X_{n+h}|\mathbf{X}_n) - g(\mathbf{X}_n)\right)\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left(X_{n+h} - \mathrm{E}(X_{n+h}|\mathbf{X}_n)\right)\left(\mathrm{E}(X_{n+h}|\mathbf{X}_n) - g(\mathbf{X}_n)\right)|\mathbf{X}_n\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\left(\mathrm{E}(X_{n+h}|\mathbf{X}_n) - \mathrm{E}(X_{n+h}|\mathbf{X}_n)\right)\left(\mathrm{E}(X_{n+h}|\mathbf{X}_n) - g(\mathbf{X}_n)\right)\right] = 0.
\end{aligned}
$$

Je tedy

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}(X_{n+h} - g(\mathbf{X}_n))^2 \\
&= \mathrm{E}\left(X_{n+h} - \mathrm{E}(X_{n+h}|\mathbf{X}_n)\right)^2 + \mathrm{E}\left(\mathrm{E}(X_{n+h}|\mathbf{X}_n) - g(\mathbf{X}_n)\right)^2 \\
&\geq \mathrm{E}\left(X_{n+h} - \mathrm{E}(X_{n+h}|\mathbf{X}_n)\right)^2
\end{aligned}
$$

a rovnost nastane pro $g(\mathbf{X}_n) = \mathrm{E}(X_{n+h}|\mathbf{X}_n)$.

Obtížné, omezíme se na lineární aproximace

Nejlepší lineární předpověď (predikci) prvku X_{n+h} na základě prvků $X_1, \dots, X_n$ budeme značit $\widehat{X}_{n+h}(n)$.

Přímá metoda

Nechť $H := \mathcal{H}\{X_1, \dots, X_n, \dots, X_{n+h}\}$ je Hilbertův prostor generovaný náhodnými veličinami $X_1, \dots, X_{n+h}$ a $H_1^n := \mathcal{H}\{X_1, \dots, X_n\}$ nechť je Hilbertův prostor generovaný náhodnými veličinami $X_1, \dots, X_n$.
Nejlepší lineární predikce X_{n+h} je prvek

$$\widehat{X}_{n+h}(n) = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j \in H_1^n, \tag{4}$$

pro který

$$\mathrm{E}|X_{n+h} - \widehat{X}_{n+h}(n)|^2 = \|X_{n+h} - \widehat{X}_{n+h}(n)\|^2$$

nabývá minimální hodnoty mezi všemi lineárními kombinacemi $X_1, \dots, X_n$.

Tedy

$$\widehat{X}_{n+h}(n) = P_{H_1^n}(X_{n+h}) \in H_1^n,$$
$$X_{n+h} - \widehat{X}_{n+h}(n) \perp H_1^n. \tag{5}$$

Z linearity prostoru H_1^n plyne, že podmínka (5) bude splněna právě tehdy, když

$$X_{n+h} - \widehat{X}_{n+h}(n) \perp X_j, \; j = 1, \dots, n,$$

tj. když

$$\mathrm{E}(X_{n+h} - \widehat{X}_{n+h}(n))\overline{X}_j = 0, \; j = 1, \dots, n.$$

Konstanty $c_1, \dots, c_n$ musí tedy splňovat podmínky

$$\mathrm{E}\Big(X_{n+h} - \sum_{k=1}^{n} c_k X_k\Big)\overline{X}_j = 0, \; j = 1, \dots, n,$$

neboli

$$\mathrm{E}X_{n+h}\overline{X}_j - \sum_{k=1}^{n} c_k \mathrm{E}X_k\overline{X}_j = 0, \; j = 1, \dots, n. \tag{6}$$

Je-li $X_1, \dots X_{n+h}$ reálná centrovaná stacionární posloupnost s autokovarianční funkcí R, má soustava (6) tvar

$$\sum_{k=1}^{n} c_k R(k-j) = R(n+h-j), \quad j = 1, \dots, n, \tag{7}$$

neboli

$$\begin{aligned}
c_1 R(0) + c_2 R(1) + \cdots + c_n R(n-1) &= R(n+h-1), \\
c_1 R(1) + c_2 R(0) + \cdots + c_n R(n-2) &= R(n+h-2), \\
&\cdots \\
c_1 R(n-1) + c_2 R(n-2) + \cdots + c_n R(0) &= R(h).
\end{aligned}$$

Maticový zápis (7):

$$\mathbf{\Gamma}_n \mathbf{c}_n = \gamma_{nh}$$

kde $\mathbf{c}_n := (c_1, \ldots, c_n)'$, $\gamma_{nh} := (R(n+h-1), \ldots, R(h))'$ a

$$\mathbf{\Gamma}_n := \begin{pmatrix} R(0) & R(1) & \ldots & R(n-1) \\ R(1) & R(0) & \ldots & R(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(n-1) & R(n-2) & \ldots & R(0) \end{pmatrix},$$

Pokud existuje $\mathbf{\Gamma}_n^{-1}$, potom $\mathbf{c}_n = \mathbf{\Gamma}_n^{-1}\gamma_{nh}$, tedy

$$\widehat{X}_{n+h}(n) = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j = \mathbf{c}_n' \mathbf{X}_n = \gamma_{nh}' \mathbf{\Gamma}_n^{-1} \mathbf{X}_n. \tag{8}$$

Je zřejmé, že $\mathbf{\Gamma}_n = \operatorname{var}(X_1, \ldots, X_n) = \operatorname{var} \mathbf{X}_n = \mathrm{E}\,(\mathbf{X}_n \mathbf{X}_n')$.

Chyba predikce (reziduální rozptyl)

$$\delta_h^2 := \mathrm{E}|X_{n+h} - \widehat{X}_{n+h}(n)|^2 = \|X_{n+h} - \widehat{X}_{n+h}(n)\|^2.$$

Podle (2)

$$\|X_{n+h}\|^2 = \|\widehat{X}_{n+h}(n)\|^2 + \|X_{n+h} - \widehat{X}_{n+h}(n)\|^2,$$

je tedy

$$\delta_h^2 = \|X_{n+h}\|^2 - \|\widehat{X}_{n+h}(n)\|^2. \tag{9}$$

Pro reálnou centrovanou stacionární posloupnost takovou, že $\mathbf{\Gamma}_n$ je regulární, platí

$$\begin{aligned}\delta_h^2 &= \|X_{n+h}\|^2 - \|\widehat{X}_{n+h}(n)\|^2 = \mathrm{E}|X_{n+h}|^2 - \mathrm{E}|\widehat{X}_{n+h}(n)|^2 \\ &= R(0) - \mathrm{E}(\mathbf{c}_n'\mathbf{X}_n)^2 = R(0) - \mathbf{c}_n'\mathrm{E}\left(\mathbf{X}_n\mathbf{X}_n'\right)\mathbf{c}_n \\ &= R(0) - \mathbf{c}_n'\mathbf{\Gamma}_n\mathbf{c}_n = R(0) - \gamma_{nh}'\mathbf{\Gamma}_n^{-1}\mathbf{\Gamma}_n\mathbf{\Gamma}_n^{-1}\gamma_{nh} \\ &= R(0) - \gamma_{nh}'\mathbf{\Gamma}_n^{-1}\gamma_{nh}. \qquad (10)\end{aligned}$$

Věta 52:

Nechť $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ je reálná centrovaná stacionární posloupnost s autokovarianční funkcí R, pro kterou je $R(0) > 0$ a $R(k) \to 0$ pro $k \to \infty$. Potom matice $\mathbf{\Gamma}_n = \operatorname{var}(X_1, \ldots, X_n)$ je regulární pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz:

sporem

Nechť $\mathbf{\Gamma}_n$ je pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ singulární; potom existuje nenulový vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)'$ takový, že $\mathbf{c}'\mathbf{\Gamma}_n\mathbf{c} = 0$ a pro $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)'$ platí $\mathbf{c}'\mathbf{X}_n = 0$ s. j., neboť $\mathrm{E}\,\mathbf{c}'\mathbf{X}_n = 0$ a $\operatorname{var}(\mathbf{c}'\mathbf{X}_n) = \mathbf{c}'\mathbf{\Gamma}_n\mathbf{c} = 0$.

Existuje tedy přirozené $1 \leq r < n$ a konstanty $a_1, \dots, a_r$ takové, že $\mathbf{\Gamma}_r$ je regulární a

$$X_{r+1} = \sum_{j=1}^{r} a_j X_j.$$

Ze stacionarity posloupnosti $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ plyne, že

$$\operatorname{var}(X_1, \dots, X_r) = \cdots = \operatorname{var}(X_h, \dots, X_{h+r-1}) = \mathbf{\Gamma}_r.$$

Odtud pro libovolné $h \geq 1$

$$X_{r+h} = \sum_{j=1}^{r} a_j X_{j+h-1}.$$

Pro každé $n \geq r+1$ najdeme konstanty $a_1^{(n)}, \dots, a_r^{(n)}$ takové, že $X_n = \sum_{j=1}^{r} a_j^{(n)} X_j = \mathbf{a}^{(n)\prime} \mathbf{X}_r$, kde $\mathbf{a}^{(n)} = (a_1^{(n)}, \dots, a_r^{(n)})'$ a $\mathbf{X}_r = (X_1, \dots, X_r)'$,

$$\operatorname{var} X_n = \mathbf{a}^{(n)\prime} \operatorname{var} \mathbf{X}_r \, \mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{a}^{(n)\prime} \mathbf{\Gamma}_r \mathbf{a}^{(n)} = R(0) > 0.$$

Matice $\mathbf{\Gamma}_r$ je pozitivně definitní, tedy existuje rozklad $\mathbf{\Gamma}_r = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}'$, kde $\mathbf{\Lambda}$ je diagonální matice, která má na diagonále vlastní čísla matice $\mathbf{\Gamma}_r$, a $\mathbf{P}\mathbf{P}' = \mathbf{I}$ je jednotková matice. Protože $\mathbf{\Gamma}_r$ je pozitivně definitní, jsou všechna její vlastní čísla kladná; bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_r$. Potom

$$R(0) = \mathbf{a}^{(n)\prime}\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}'\mathbf{a}^{(n)} \geq \lambda_1 \mathbf{a}^{(n)\prime}\mathbf{P}\mathbf{P}'\mathbf{a}^{(n)} = \lambda_1 \sum_{j=1}^{r} \left(a_j^{(n)}\right)^2,$$

z čehož pro každé $j = 1, \ldots, r$ plyne, že $\left(a_j^{(n)}\right)^2 \leq R(0)/\lambda_1$, tedy $|a_j^{(n)}| \leq C$ nezávisle na n, kde C je kladná konstanta.

Zároveň je

$$
\begin{aligned}
0 < R(0) = \mathrm{E}(X_n)^2 = \mathrm{E}\Big(X_n \sum_{j=1}^{r} a_j^{(n)} X_j\Big) &= \sum_{j=1}^{r} a_j^{(n)} \mathrm{E} X_n X_j \\
&= \sum_{j=1}^{r} a_j^{(n)} R(n-j) \leq \sum_{j=1}^{r} |a_j^{(n)}||R(n-j)| \\
&\leq C \sum_{j=1}^{r} |R(n-j)|.
\end{aligned}
$$

Poslední výraz s rostoucím n konverguje k nule, neboť podle předpokladu $R(n) \to 0$ pro $n \to \infty$, to je ale ve sporu s předpokladem $R(0) > 0$.
Tedy matice $\mathbf{\Gamma}_n$ je regulární pro každé $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Rekurzivní postupy

Značení:

- $H_1^k = \mathcal{H}\{X_1, \ldots, X_k\}$ Hilbertův prostor vytvořený veličinami $X_1, \ldots, X_k$
- $\widehat{X}_{k+1}(k) = P_{H_1^k}(X_{k+1}) := \widehat{X}_{k+1}, k \geq 1, \ \widehat{X}_1 := 0.$

Potom

$$H_1^n = \mathcal{H}\{X_1, \ldots, X_n\} = \mathcal{H}\{X_1 - \widehat{X}_1, \ldots, X_n - \widehat{X}_n\}$$

Lemma:

$X_1 - \widehat{X}_1, \ldots, X_n - \widehat{X}_n$ jsou ortogonální náhodné veličiny.

Důkaz:

Nechť $i < j$. Potom $X_i \in H_1^i \subseteq H_1^{j-1}$ a $\widehat{X}_i \in H_1^{i-1} \subset H_1^{j-1}$, tedy $X_i - \widehat{X}_i \in H_1^{j-1}$. Dále: $\widehat{X}_j = P_{H_1^{j-1}}(X_j)$, proto $X_j - \widehat{X}_j \perp H_1^{j-1}$, tedy také

$$X_i - \widehat{X}_i \perp X_j - \widehat{X}_j.$$

$\square$

Nejlepší lineární předpověď prvku X_{k+1} spočtená z $X_1, \ldots, X_k$ (o jeden krok):

$$\widehat{X}_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} \theta_{kj} \left(X_{k+1-j} - \widehat{X}_{k+1-j} \right).$$

Chyba předpovědi prvku X_{k+1} o jeden krok:

$$v_k = \mathrm{E}|X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1}|^2 = ||X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1}||^2, \quad k \geq 0.$$

Věta 53 [Inovační algoritmus]:

Nechť $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ je reálná centrovaná posloupnost s autokovarianční funkcí $R(i,j)$, kde matice $(R(i,j))_{i,j=1}^n$ je regulární pro každé n. Potom nejlepší lineární predikce X_{n+1} založená na $X_1, \ldots, X_n$ je

$$\widehat{X}_1 = 0, \tag{11}$$

$$\widehat{X}_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \theta_{nj} \left(X_{n+1-j} - \widehat{X}_{n+1-j} \right), \quad n \geq 1, \tag{12}$$

kde pro $k = 0, \ldots, n-1$

$$v_0 = R(1,1), \tag{13}$$

$$\theta_{n,n-k} = \frac{1}{v_k} \left(R(n+1, k+1) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} \theta_{n,n-j} v_j \right), \tag{14}$$

$$v_n = R(n+1, n+1) - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j}^2 v_j. \tag{15}$$

Důkaz:

Definujme $\widehat{X}_1 := 0$, potom

$$v_0 = \mathrm{E}|X_1 - \widehat{X}_1|^2 = \mathrm{E}|X_1|^2 = R(1,1).$$

Víme:

X_{n+1} musí být tvaru (12) a pro $j < k$ jsou $X_j - \widehat{X}_j$ a $X_k - \widehat{X}_k$ ortogonální. Násobme obě strany (12) skalárně náhodnou veličinou $X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1}$ pro $k < n$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\widehat{X}_{n+1}(X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \theta_{nj} \mathrm{E}\big(X_{n+1-j} - \widehat{X}_{n+1-j}\big)\big(X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1}\big) \\
&= \theta_{n,n-k} \mathrm{E}(X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1})^2 = \theta_{n,n-k} v_k.
\end{aligned}$$

$\widehat{X}_{n+1} \in H_1^n$ a $X_{n+1} - \widehat{X}_{n+1} \perp H_1^n \Rightarrow$

$$\mathrm{E}(X_{n+1} - \widehat{X}_{n+1})(X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1}) = 0, \;\; k < n,$$

$$\mathrm{E}X_{n+1}(X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1}) = \mathrm{E}\widehat{X}_{n+1}(X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1}) = \theta_{n,n-k} v_k. \quad (16)$$

Odtud

$$\theta_{n,n-k} = \frac{1}{v_k}\mathrm{E}X_{n+1}\left(X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1}\right) = \frac{1}{v_k}\left(R(n+1,k+1) - \mathrm{E}X_{n+1}\widehat{X}_{k+1}\right).$$

Dále, když aplikujeme vzorec (12) na $\widehat{X}_{k+1}$ a ve vzorci (16) místo indexu k užijeme index $k-j$, dostaneme

$$\begin{aligned}\mathrm{E}X_{n+1}\widehat{X}_{k+1} &= \mathrm{E}X_{n+1}\sum_{j=1}^{k}\theta_{kj}\left(X_{k+1-j} - \widehat{X}_{k+1-j}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{k}\theta_{kj}\mathrm{E}X_{n+1}\left(X_{k+1-j} - \widehat{X}_{k+1-j}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{k}\theta_{kj}\theta_{n,n-(k-j)}v_{k-j}.\end{aligned}$$

Celkem tedy máme

$$\begin{aligned}\theta_{n,n-k} &= \frac{1}{v_k}\Big(R(n+1,k+1) - \sum_{j=1}^{k} \theta_{kj}\theta_{n,n-(k-j)}v_{k-j}\Big) \\ &= \frac{1}{v_k}\Big(R(n+1,k+1) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \theta_{n,n-\nu}\theta_{k,k-\nu}v_{\nu}\Big).\end{aligned}$$

Výpočet v_n:

$$\begin{aligned}
v_n &= \mathrm{E}|X_{n+1} - \widehat{X}_{n+1}|^2 = \mathrm{E}|X_{n+1}|^2 - \mathrm{E}|\widehat{X}_{n+1}|^2 \\
&= R(n+1, n+1) - \mathrm{E}\left|\sum_{j=1}^{n} \theta_{nj}\left(X_{n+1-j} - \widehat{X}_{n+1-j}\right)\right|^2 \\
&= R(n+1, n+1) - \sum_{j=1}^{n} \theta_{nj}^2 \mathrm{E}(X_{n+1-j} - \widehat{X}_{n+1-j})^2 \\
&= R(n+1, n+1) - \sum_{j=1}^{n} \theta_{nj}^2 v_{n-j} \\
&= R(n+1, n+1) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \theta_{n,n-\nu}^2 v_\nu .
\end{aligned}$$

$\square$

Výpočet předpovědi o jeden krok podle inovačního algoritmu tedy schematicky probíhá takto:

$$\begin{array}{ccccc}
\widehat{X}_1 & v_0 & & & \\
\theta_{11} & \widehat{X}_2 & v_1 & & \\
\theta_{22} & \theta_{21} & \widehat{X}_3 & v_2 & \\
\theta_{33} & \theta_{32} & \theta_{31} & \widehat{X}_4 & v_3 \\
\dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

Příklad:

Jsou dána pozorování $X_1, \dots, X_n$, pro které platí model MA(1),

$$X_t = Y_t + bY_{t-1}, \ \ Y_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2), t \in \mathbb{Z}$$

Určete $\widehat{X}_{n+1}$ pomocí inovačního algoritmu.

$$\begin{aligned}
\widehat{X}_1 &= 0, \\
v_0 &= R(0) = \sigma^2(1 + b^2), \\
\theta_{11} &= \frac{1}{v_0} R(1) = \frac{b}{1 + b^2}, \\
\widehat{X}_2 &= \theta_{11}(X_1 - \widehat{X}_1) = \theta_{11} X_1, \\
v_1 &= R(0) - \theta_{11}^2 v_0, \\
\theta_{22} &= \frac{1}{v_0} R(2) = 0, \\
\theta_{21} &= \frac{1}{v_1}(R(1) - \theta_{22}\theta_{11} v_0) = \frac{R(1)}{v_1}, \\
\widehat{X}_3 &= \theta_{21}(X_2 - \widehat{X}_2), \\
v_2 &= R(0) - \theta_{21}^2 v_1,
\end{aligned}$$

obecně

$$\theta_{nk} = 0, \quad k = 2, \dots, n,$$
$$\theta_{n1} = \frac{R(1)}{v_{n-1}},$$
$$\widehat{X}_{n+1} = \theta_{n1}(X_n - \widehat{X}_n),$$
$$v_n = R(0) - \theta_{n1}^2 v_{n-1}.$$

Příklad:

Uvažujme model MA(q).Potom je $R(k) = 0$ pro $|k| > q$. Postupným výpočtem zjistíme, že

$$\widehat{X}_{n+1} = \sum_{j=1}^{\min(q,n)} \theta_{nj} \left(X_{n+1-j} - \widehat{X}_{n+1-j} \right), \quad n \geq 1.$$

Předpověď o $h > 1$ kroků:

$\widehat{X}_{n+h}(n) = P_{H_1^n}(X_{n+h})$, kde $H_1^n = \mathcal{H}(X_1 - \widehat{X}_1, \dots, X_n - \widehat{X}_n)$.
Protože $H_1^n \subset H_1^{n+1} \subset \cdots \subset H_1^{n+h-1}$, plyne z vlastnosti projekčního zobrazení a (12), že

$$\begin{aligned}
\widehat{X}_{n+h}(n) &= P_{H_1^n}\left(X_{n+h}\right) = P_{H_1^n}\left(P_{H_1^{n+h-1}}\left(X_{n+h}\right)\right) = P_{H_1^n}\left(\widehat{X}_{n+h}\right) \\
&= P_{H_1^n}\left(\sum_{j=1}^{n+h-1} \theta_{n+h-1,j}\left(X_{n+h-j} - \widehat{X}_{n+h-j}\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n+h-1} \theta_{n+h-1,j} P_{H_1^n}\left(X_{n+h-j} - \widehat{X}_{n+h-j}\right) \\
&= \sum_{j=h}^{n+h-1} \theta_{n+h-1,j}\left(X_{n+h-j} - \widehat{X}_{n+h-j}\right), \qquad (17)
\end{aligned}$$

neboť $X_{n+h-j} - \widehat{X}_{n+h-j} \perp X_1^n$ pro $j < h$.

Chyba předpovědi o h kroků je

$$
\begin{aligned}
\delta_h^2 &= \mathrm{E}\left|X_{n+h} - \widehat{X}_{n+h}(n)\right|^2 = \mathrm{E}\left|X_{n+h}\right|^2 - \mathrm{E}\left|\widehat{X}_{n+h}(n)\right|^2 \\
&= R(n+h, n+h) - \mathrm{E}\left|\sum_{j=h}^{n+h-1} \theta_{n+h-1,j}\left(X_{n+h-j} - \widehat{X}_{n+h-j}\right)\right|^2 \\
&= R(n+h, n+h) - \sum_{j=h}^{n+h-1} \theta^2_{n+h-1,j} v_{n+h-j-1}.
\end{aligned}
$$

Příklad:
Uvažujme opět model MA(1).
Již jsme ukázali, že

$$\widehat{X}_{n+1} = P_{H_1^n}(X_{n+1}) = \theta_{n1}(X_n - \widehat{X}_n).$$

Pro $h > 1$ je

$$\begin{aligned}\widehat{X}_{n+h}(n) &= P_{H_1^n}(X_{n+h}) = P_{H_1^n}(\widehat{X}_{n+h}) \\ &= P_{H_1^n}(\theta_{n+h-1,1}(X_{n+h-1} - \widehat{X}_{n+h-1})) = 0,\end{aligned}$$

neboť $(X_{n+h-1} - \widehat{X}_{n+h-1}) \perp H_1^n$ pro $h > 1$.

Inovační algoritmus pro model ARMA

Uvažujme kauzální proces ARMA(p, q)

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \dots + \varphi_p X_{t-p} + Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \dots + \theta_q Y_{t-q}, \; t \in \mathbb{Z},$$

$Y_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$. Hledáme $\widehat{X}_{n+1} = P_{H_1^n}(X_{n+1})$.

Transformace:

$$W_t = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} X_t, & t = 1, 2, \dots, m, \\ \frac{1}{\sigma} \left(X_t - \varphi_1 X_{t-1} \dots - \varphi_p X_{t-p} \right), & t > m, \end{cases} \tag{18}$$

$m = \max(p, q)$.
Položme $\widehat{X}_1 = 0, \widehat{W}_1 = 0, \widehat{W}_k = P_{H_1^{k-1}}(W_k)$. Potom

$$\begin{aligned} H_1^n &= \mathcal{H}(X_1 - \widehat{X}_1, \dots, X_n - \widehat{X}_n) = \mathcal{H}(X_1, \dots, X_n) \\ &= \mathcal{H}(W_1, \dots, W_n) = \mathcal{H}(W_1 - \widehat{W}_1, \dots, W_n - \widehat{W}_n). \end{aligned}$$

- Aplikace inovačního algoritmu na posloupnost $\{W_1, \dots, W_n\}$:

$$\widehat{W}_{n+1} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \theta_{nj}(W_{n+1-j} - \widehat{W}_{n+1-j}), & 1 \leq n < m, \\ \sum_{j=1}^{q} \theta_{nj}(W_{n+1-j} - \widehat{W}_{n+1-j}), & n \geq m \end{cases} \tag{19}$$

(pro $t > m$ je $W_t \sim \mathrm{MA}(q)$).

- Projekce do H_1^{t-1} na obě strany vztahu (18):

$$\widehat{W}_t = \begin{cases} \frac{1}{\sigma}\widehat{X}_t, & t \leq m, \\ \frac{1}{\sigma}(\widehat{X}_t - \varphi_1 X_{t-1} \cdots - \varphi_p X_{t-p}), & t > m. \end{cases} \tag{20}$$

Je vidět, že pro $t \geq 1$

$$W_t - \widehat{W}_t = \frac{1}{\sigma}(X_t - \widehat{X}_t), \qquad \mathrm{E}|W_t - \widehat{W}_t|^2 = \frac{1}{\sigma^2} v_{t-1} := w_{t-1}.$$

Platí tedy

$$\widehat{X}_{n+1} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \theta_{nj}\left(X_{n+1-j} - \widehat{X}_{n+1-j}\right), & n < m \\ \sum_{j=1}^{q} \theta_{nj}\left(X_{n+1-j} - \widehat{X}_{n+1-j}\right) + \sum_{j=1}^{p} \varphi_j X_{n-j+1}, & n \geq m \end{cases} \tag{21}$$

kde koeficienty θ_{nj} a w_n se spočtou inovačním algoritmem aplikovaným na posloupnost (18).
K tomu musíme spočítat hodnoty autokovarianční funkce posloupnosti $\{W_t\}$.

Víme, že $\mathrm{E}\, X_t = 0$, tedy i $\mathrm{E}\, W_t = 0$.
Pro kovariance $R_W(s,t) = \mathrm{E} W_s W_t$ platí

$$R_W(s,t) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^2} R_X(s-t), \quad 1 \le s,t \le m, \\ \frac{1}{\sigma^2} \left[R_X(s-t) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j R_X(|s-t|-j) \right], \\ \qquad \min(s,t) \le m, \quad m < \max(s,t) \le 2m, \\ \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=0}^{q-|s-t|} \theta_j \theta_{j+|s-t|}, \quad s,t > m, \ |s-t| \le q, \\ 0, \qquad \text{jinde} \end{cases} \tag{22}$$

(zde jsme položili $\theta_0 = 1$).

Inovační algoritmus pro model AR

Uvažujme kauzální proces AR(p), tj.

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \cdots + \varphi_p X_{t-p} + Y_t, \ t \in \mathbb{Z}, \ Y_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$$

- Transformace:

$$W_t = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} X_t, & 1 \leq t \leq p, \\ \frac{1}{\sigma}(X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \cdots - \varphi_p X_{t-p}) = \frac{1}{\sigma} Y_t, & t > p. \end{cases} \tag{23}$$

- Inovační algoritmus na $W_1, \ldots, W_n$:

$$\widehat{W}_{n+1} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \theta_{nj} (W_{n+1-j} - \widehat{W}_{n+1-j}), & n < p, \\ 0, & n \geq p. \end{cases} \tag{24}$$

$(W_{n+1} \perp H_1^n$ pro $n \geq p.)$

Opět $W_t - \widehat{W}_t = \frac{1}{\sigma}(X_t - \widehat{X}_t)$ pro $t \geq 1$ a odtud

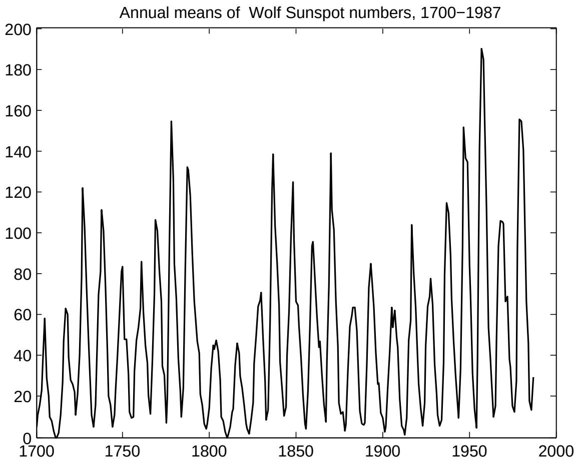
$$\widehat{X}_{n+1} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \theta_{nj}\left(X_{n+1-j} - \widehat{X}_{n+1-j}\right), & n < p, \\ \varphi_1 X_n + \varphi_2 X_{n-1} + \cdots + \varphi_p X_{n-p+1}, & n \geq p. \end{cases} \tag{25}$$

Autokovarianční funkce potřebná pro výpočet koeficientů θ_{nj} je

$$R_W(s,t) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^2} R_X(s-t), & 1 \leq s, t \leq p, \\ 1, & t = s > p, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases} \tag{26}$$

Chybu předpovědi o jeden krok pro $n \geq p$ můžeme spočítat jako

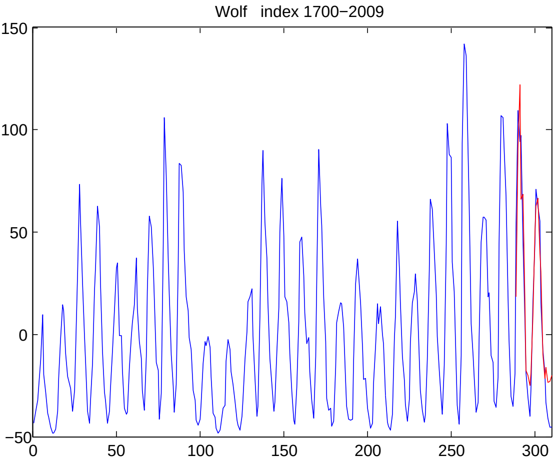
$$v_n = \mathrm{E}|X_{n+1} - \widehat{X}_{n+1}|^2 = \mathrm{E}Y_{n+1}^2 = \sigma^2.$$



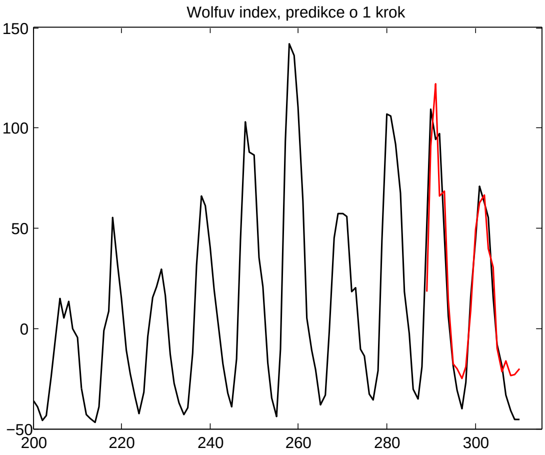
Počet slunečních skvrn, Wolfův index, 1700-1987

Odhadnutý model pro Wolfův index (centrováno):
$AR(9), a(B)X_t = Y_t$

$$\begin{aligned} a(z) = 1 &- 1.182z + 0.4248z^2 + 0.1619z^3 - 0.1687z^4 \\ &+ 0.1156z^5 - 0.02689z^6 - 0.005769z^7 \\ &+ 0.02251z^8 - 0.2062z^9 \end{aligned}$$



Počet slunečních skvrn, Wolfův index, 1700-2009, skutečné hodnoty a predikce o jeden krok



Počet slunečních skvrn, Wolfův index, 1700-2009, skutečné a predikované hodnoty (výřez)

Predikce založená na nekonečné minulosti

Problém: známe celou minulost $X_n, X_{n-1}, \ldots,$ chceme předpovídat $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$.

Úloha projekce v Hilbertově prostoru: Uvažujme Hilbertovy prostory $H = \mathcal{H}\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ a $H_{-\infty}^n = \mathcal{H}\{\ldots X_{n-1}, X_n\}$.

Předpověď $\widehat{X}_{n+h}(n)$ prvku X_{n+h} založená na nekonečné minulosti $X_n, X_{n-1}, \ldots$ je projekce $X_{n+h} \in H$ do $H_{-\infty}^n$,

$$\widehat{X}_{n+h}(n) = P_{H_{-\infty}^n}(X_{n+h})$$

předpověď o jeden krok: $\widehat{X}_{n+1}(n) := \widehat{X}_{n+1}$.

Předpověď v autoregresním modelu AR(p).

Uvažujme model

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \cdots + \varphi_p X_{t-p} + Y_t, \qquad t \in \mathbb{Z}, \tag{27}$$

kde $\{Y_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ je WN$(0, \sigma^2)$, a předpokládejme, že polynom $\lambda^p - \varphi_1 \lambda^{p-1} - \cdots - \varphi_p$ má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu.
Víme: $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ je kauzální lineární proces a $Y_t \perp X_s$ pro všechna $t > s$.

Předpověď o jeden krok:

- $X_{n+1} = \varphi_1 X_n + \cdots + \varphi_p X_{n+1-p} + Y_{n+1}$
- $\varphi_1 X_n + \cdots + \varphi_p X_{n+1-p} \in H_{-\infty}^n$,
- $Y_{n+1} \perp X_n, X_{n-1}, \cdots \Rightarrow Y_{n+1} \perp H_{-\infty}^n$, (plyne z linearity a spojitosti skalárního součinu)

$$\widehat{X}_{n+1} = P_{H_{-\infty}^n}(X_{n+1}) = \varphi_1 X_n + \cdots + \varphi_p X_{n+1-p}.$$

Chyba předpovědi je

$$\mathrm{E}|X_{n+1} - \widehat{X}_{n+1}|^2 = \mathrm{E}|Y_{n+1}|^2 = \sigma^2.$$

Předpověď o $h > 1$ kroků.

$$\begin{aligned}\widehat{X}_{n+h}(n) &= P_{H^n_{-\infty}}(X_{n+h}) = P_{H^n_{-\infty}}\left(P_{H^{n+h-1}_{-\infty}}(X_{n+h})\right)\\ &= P_{H^n_{-\infty}}(\widehat{X}_{n+h})\\ &= P_{H^n_{-\infty}}(\varphi_1 X_{n+h-1} + \cdots + \varphi_p X_{n+h-p})\\ &= \varphi_1[X_{n+h-1}] + \varphi_2[X_{n+h-2}] + \cdots + \varphi_p[X_{n+h-p}],\end{aligned}$$

kde

$$[X_{n+j}] = \begin{cases} X_{n+j}, & j \le 0\\ \widehat{X}_{n+j}(n), & j > 0.\end{cases}$$

Příklad:

Uvažujme proces AR(1),
$X_t = \varphi X_{t-1} + Y_t, \quad |\varphi| < 1, \quad Y_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2).$
Známe-li celou minulost $X_n, X_{n-1}, \ldots$, je $\widehat{X}_{n+1} = \varphi X_n$.
Pro $h > 1$

$$\begin{aligned}\widehat{X}_{n+h}(n) &= \varphi[X_{n+h-1}] = \varphi \widehat{X}_{n+h-1}(n) = \varphi^2 \widehat{X}_{n+h-2}(n) = \ldots \\ &= \varphi^h X_n.\end{aligned}$$

Chyba predikce je

$$\begin{aligned}\mathrm{E}|X_{n+h} - \widehat{X}_{n+h}|^2 &= \mathrm{E}|X_{n+h}|^2 - \mathrm{E}|\widehat{X}_{n+h}(n)|^2 \\ &= R_X(0) - \mathrm{E}\left|\varphi^h X_n\right|^2 = R_X(0)\left(1 - \varphi^{2h}\right) \\ &= \sigma^2 \frac{1 - \varphi^{2h}}{1 - \varphi^2}.\end{aligned}$$

Kauzální a invertibilní model ARMA(p,q)

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \cdots + \varphi_p X_{t-p} + Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \cdots + \theta_q Y_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{28}$$

$Y_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.

- Kauzalita: pro každé $t \in \mathbb{Z}$ je $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} c_j Y_{t-j}$, kde $\sum_{j=0}^{\infty} |c_j| < \infty$
  odtud plyne, že $Y_t \perp X_s$ pro každé $s < t$.
- Invertibilita: pro každé $t \in \mathbb{Z}$ je $Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} d_j X_{t-j}$, kde $\sum_{j=0}^{\infty} |d_j| < \infty$, neboli

$$X_t = -\sum_{j=1}^{\infty} d_j X_{t-j} + Y_t \tag{29}$$

(srov. věty 35 a 36.)

Platí:

$$-\sum_{j=1}^{\infty} d_j X_{t-j} = \text{l. i. m.}\ _{N\to\infty}\Big(-\sum_{j=1}^{N} d_j X_{t-j}\Big) \in H_{-\infty}^{t-1},$$

$Y_t \perp H_{-\infty}^{t-1}$. Z rozkladu (29) tedy plyne, že nejlepší lineární předpověď X_{n+1} založená na celé minulosti $X_n, X_{n-1}\ldots$ je

$$\widehat{X}_{n+1} = -\sum_{j=1}^{\infty} d_j X_{n+1-j}. \tag{30}$$

Chyba předpovědi

$$\mathrm{E}|X_{n+1} - \widehat{X}_{n+1}|^2 = \mathrm{E}|Y_{n+1}|^2 = \sigma^2.$$

Rekurentní vyjádření Y_t : $\quad Y_t = X_t - \widehat{X}_t$

Z jednoznačnosti rozkladu $X_{n+1} = \widehat{X}_{n+1} + Y_{n+1}$ a ze vzorce (28)

$$\widehat{X}_{n+1} = \varphi_1 X_n + \cdots + \varphi_p X_{n+1-p} + \theta_1 Y_n + \cdots + \theta_q Y_{n+1-q},$$

tedy

$$\begin{aligned}\widehat{X}_{n+1} &= \varphi_1 X_n + \cdots + \varphi_p X_{n+1-p} \\ &\quad + \theta_1 \big(X_n - \widehat{X}_n\big) + \cdots + \theta_q \big(X_{n+1-q} - \widehat{X}_{n+1-q}\big).\end{aligned}$$

Predikce o $h > 1$ kroků je

$$\begin{aligned}
\widehat{X}_{n+h}(n) &= P_{H^n_{-\infty}}(X_{n+h}) = P_{H^n_{-\infty}}(P_{H^{n+h-1}_{-\infty}}(X_{n+h})) \\
&= P_{H^n_{-\infty}}(\widehat{X}_{n+h}) \\
&= P_{H^n_{-\infty}}\big(\varphi_1 X_{n+h-1} + \cdots + \varphi_p X_{n+h-p} \\
&\quad + \theta_1 Y_{n+h-1} + \cdots + \theta_q Y_{n+h-q}\big) \\
&= \varphi_1[X_{n+h-1}] + \cdots + \varphi_p[X_{n+h-p}] \\
&\quad + \theta_1[Y_{n+h-1}] + \cdots + \theta_q[Y_{n+h-q}],
\end{aligned}$$

kde

$$[X_{n+j}] = \begin{cases} X_{n+j}, & j \leq 0, \\ \widehat{X}_{n+j}(n), & j > 0 \end{cases}$$

a

$$[Y_{n+j}] = \begin{cases} X_{n+j} - \widehat{X}_{n+j}, & j \leq 0, \\ 0, & j > 0. \end{cases}$$

Pro výpočet chyby predikce je výhodné využít kauzality. Dostaneme

$$\widehat{X}_{n+h}(n) = P_{H^n_{-\infty}}(X_{n+h}) = P_{H^n_{-\infty}}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} c_j Y_{n+h-j}\Big).$$

Z vlastností projekčního zobrazení

$$P_{H^n_{-\infty}}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} c_j Y_{n+h-j}\Big) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j P_{H^n_{-\infty}}(Y_{n+h-j}),$$

a

$$\widehat{X}_{n+h}(n) = \sum_{j=h}^{\infty} c_j Y_{n+h-j}.$$

Chyba předpovědi je

$$\mathrm{E}\big|X_{n+h} - \widehat{X}_{n+h}(n)\big|^2 = \mathrm{E}\Big|\sum_{j=0}^{h-1} c_j Y_{n+h-j}\Big|^2 = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} |c_j|^2.$$

Příklad:

Uvažujme model MA(1):
$X_t = Y_t + \theta Y_{t-1}, t \in \mathbb{Z}, \quad Y_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2), \quad |\theta| < 1.$
Potom $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ je invertibilní, $Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} (-\theta)^j X_{t-j}$, a

$$\widehat{X}_{n+1}(n) = \widehat{X}_{n+1} = -\sum_{j=1}^{\infty} (-\theta)^j X_{n+1-j} = \theta Y_n = \theta(X_n - \widehat{X}_n).$$

Chyba predikce je $\mathrm{E}|X_{n+1} - \widehat{X}_{n+1}|^2 = \mathrm{E} Y_{n+1}^2 = \sigma^2$.

Predikce o $h > 1$ kroků je

$$\begin{aligned}\widehat{X}_{n+h}(n) &= P_{H_{-\infty}^n}\left(P_{H_{-\infty}^{n+h-1}}(X_{n+h})\right) = P_{H_{-\infty}^n}(\widehat{X}_{n+h}) \\ &= \theta P_{H_{-\infty}^n}(Y_{n+h-1}) = 0,\end{aligned}$$

neboť pro $h \geq 2$ je $Y_{n+h-1} \perp H_{-\infty}^n$.
Chyba předpovědi je

$$\mathrm{E}|X_{n+h} - \widehat{X}_{n+h}(n)|^2 = \mathrm{E}|X_{n+h}|^2 = R_X(0) = \sigma^2(1 + \theta^2).$$

Predikce ve spektrální doméně

- $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ centrovaná stacionární posloupnost se spektrální distribuční funkcí F a spektrální hustotou f.
- Známe celou minulost posloupnosti $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ do času $n-1$, hledáme předpověď X_{n+h}, $h = 0, 1, \ldots$, tj.
  - $\widehat{X}_{n+h}(n-1) = P_{H_{-\infty}^{n-1}}(X_{n+h})$,
  - $\widehat{X}_{n+h}(n-1) \in H_{-\infty}^{n-1} \subset \mathcal{H}\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$,
  - $X_{n+h} - \widehat{X}_{n+h}(n-1) \perp H_{-\infty}^{n-1}$.
- Spektrální rozklad: $X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dZ(\lambda)$, $\{Z_\lambda,\ \lambda \in [-\pi, \pi]\}$ je proces s ortogonálními přírůstky a přírůstkovou distribuční funkcí F (věta 28).
- Všechny prvky Hilbertova prostoru $\mathcal{H}\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ jsou tvaru
$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda) dZ(\lambda),$$
kde $\varphi \in L_2(F)$ (věta 30).

Hledejme prvek $\widehat{X}_{n+h}(n-1)$ ve tvaru

$$\widehat{X}_{n+h}(n-1) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\Phi_h(\lambda)dZ(\lambda), \tag{31}$$

kde $\Phi_h(\lambda) \in L_2(F)$. Podmínka $X_{n+h} - \widehat{X}_{n+h}(n-1) \perp H_{-\infty}^{n-1}$ bude splněna, když

$$X_{n+h} - \widehat{X}_{n+h}(n-1) \perp X_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Tedy pro $j = 1, 2, \dots$ musí platit

$$\mathrm{E}\big(X_{n+h} - \widehat{X}_{n+h}(n-1)\big)\overline{X}_{n-j} = 0,$$

neboli

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left(X_{n+h}-\widehat{X}_{n+h}(n-1)\right)\overline{X}_{n-j}= \\
&= R(h+j)-\mathrm{E}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\Phi_h(\lambda)dZ(\lambda)\overline{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-j)\lambda}dZ(\lambda)} \\
&= R(h+j)-\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\Phi_h(\lambda)e^{-i(n-j)\lambda}dF(\lambda) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(h+j)\lambda}dF(\lambda)-\int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\lambda}\Phi_h(\lambda)dF(\lambda) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(h+j)\lambda}f(\lambda)d\lambda-\int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\lambda}\Phi_h(\lambda)f(\lambda)d\lambda \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\lambda}\left(e^{ih\lambda}-\Phi_h(\lambda)\right)f(\lambda)d\lambda = 0. \qquad (32)
\end{aligned}
$$

Označme

$$\Psi_h(\lambda) := \left(e^{ih\lambda} - \Phi_h(\lambda)\right) f(\lambda).$$

Potom (32) lze zapsat ve tvaru

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\lambda}\Psi_h(\lambda)d\lambda = 0, \quad j = 1, 2, \dots . \tag{33}$$

Z podmínky (33) vyplývá, že Fourierův rozvoj funkce Ψ_h bude obsahovat pouze členy s nezápornými mocninami $e^{i\lambda}$,

$$\Psi_h(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{ik\lambda}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| < \infty.$$

Bude-li

$$\Phi_h(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-ik\lambda}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty,$$

což je funkce, která je konvergentní v $L_2(F)$, potom

$$
\begin{aligned}
\widehat{X}_{n+h}(n-1) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-ik\lambda}\right] dZ(\lambda) \\
&= \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\left[\sum_{k=1}^{N} a_k e^{-ik\lambda}\right] dZ(\lambda) \\
&= \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \sum_{k=1}^{N} a_k \left[\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\lambda} dZ(\lambda)\right] \\
&= \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \sum_{k=1}^{N} a_k X_{n-k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_{n-k}.
\end{aligned}
$$

Věta 54:

Nechť $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ je reálná centrovaná stacionární posloupnost s autokovarianční funkcí R a spektrální hustotou $f(\lambda) = f^*(e^{i\lambda})$, kde f^* je racionální funkce komplexní proměnné.

Nechť funkce Φ_h^* je funkce komplexní proměnné, holomorfní vně a na hranici jednotkového kruhu a taková, že $\Phi_h^*(\infty) = 0$.

Nechť funkce

$$\Psi_h^*(z) = \left(z^h - \Phi_h^*(z)\right) f^*(z),\ \ z \in \mathbb{C},$$

je holomorfní uvnitř a na hranici jednotkového kruhu. Potom nejlepší lineární predikce prvku X_{n+h} na základě $X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots$ je

$$\widehat{X}_{n+h}(n-1) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \Phi_h(\lambda) dZ(\lambda),$$

kde $\Phi_h(\lambda) = \Phi_h^*\left(e^{i\lambda}\right)$ a $\{Z_\lambda,\ \lambda \in [-\pi, \pi]\}$ je proces s ortogonálními přírůstky ze spektrálního rozkladu $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$.

Chyba predikce je

$$
\begin{aligned}
\delta_h^2 &= \mathrm{E}|X_{n+h} - \widehat{X}_{n+h}(n-1)|^2 \\
&= R(0) - \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_h(\lambda)|^2 f(\lambda) d(\lambda) && (34) \\
&= R(0) - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ih\lambda} \Phi_h(\lambda) f(\lambda) d\lambda. && (35)
\end{aligned}
$$

Důkaz: Anděl (1976), kap. X, věta 8. □

Funkce Φ_h se nazývá spektrální charakteristika predikce prvku X_{n+h} na základě $X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots$

Příklad (AR(1)):

$$X_t = \varphi X_{t-1} + Y_t, |\varphi| < 1, \ \varphi \neq 0, Y_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2).$$

Hledáme předpověď $\widehat{X}_{n+h}(n-1)$ ve spektrální doméně, když známe $X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots, h \geq 0$.
Spektrální hustota posloupnosti $\{X_t, \ t \in \mathbb{Z}\}$ je

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|1 - \varphi e^{-i\lambda}|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{(1 - \varphi e^{-i\lambda})(1 - \varphi e^{i\lambda})} = f^*\left(e^{i\lambda}\right),$$

kde

$$f^*(z) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{(1 - \varphi z^{-1})(1 - \varphi z)} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{z}{(1 - \varphi z)(z - \varphi)}$$

je racionální funkce komplexní proměnné z.

$$\Psi_h^*(z) = \left(z^h - \Phi_h^*(z)\right) f^*(z) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{z(z^h - \Phi_h^*(z))}{(1 - \varphi z)(z - \varphi)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

Podmínkám věty vyhovují funkce

$$\Phi_h^*(z) = \frac{\varphi^{h+1}}{z} = \varphi^{h+1} z^{-1}, \ z \in \mathbb{C},$$

$$\Psi_h^*(z) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{z^{h+1} - \varphi^{h+1}}{(z-\varphi)(1-\varphi z)}, \ z \in \mathbb{C},$$

spektrální charakteristika predikce je $\Phi_h(\lambda) = \varphi^{h+1} e^{-i\lambda}$ a nejlepší lineární předpověď

$$\begin{aligned} \widehat{X}_{n+h}(n-1) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \Phi_h(\lambda) dZ(\lambda) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \varphi^{h+1} e^{-i\lambda} dZ(\lambda) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-1)\lambda} dZ(\lambda) \varphi^{h+1} = \varphi^{h+1} X_{n-1}. \end{aligned}$$

Dostali jsme stejný výsledek jako v časové doméně.

Chyba predikce: Podle vzorce (34) máme

$$
\begin{aligned}
\delta_h^2 &= \mathrm{E}\left|X_{t+h} - \widehat{X}_{t+h}(t-1)\right|^2 = \|X_{t+h}\|^2 - \|\widehat{X}_{t+h}(t-1)\|^2 \\
&= R(0) - \mathrm{E}\left|\widehat{X}_{t+h}(t-1)\right|^2 = R(0) - \mathrm{E}\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda}\Phi_h(\lambda)dZ(\lambda)\right|^2 \\
&= R(0) - \int_{-\pi}^{\pi}\left|e^{it\lambda}\Phi_h(\lambda)\right|^2 f(\lambda)d\lambda = \\
&= R(0) - |\varphi|^{2(h+1)}\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)d\lambda = R(0)\left(1-\varphi^{2(h+1)}\right),
\end{aligned}
$$

což opět souhlasí s výsledkem v časové doméně.