Cvičení z náhodných procesů II - vybrané příklady

Příklad 1) Nechť X_t, $t \in T$ (kde $T = \mathbb{R}$ nebo $T = \mathbb{Z}$ nebo $T = \mathbb{R}_+$ nebo $T = \mathbb{N}$) je striktně stacionární proces. Když $X_t \in \mathsf{L}_2$, pak je tento proces také slabě stacionární. Dokažte.

Příklad 2) Nechť X_t, $t \in \mathbb{N}$ (nebo $T = \mathbb{Z}$) je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s Cauchyovým rozdělením. Co lze říci o striktní stacionaritě, co o slabé stacionaritě?

Příklad 3) Nechť pro $t \in \mathbb{Z}$ je $X_t = (-1)^t X$, kde X je n.v. s nulovou střední hodnotou a rozptylem $\sigma^2 < +\infty$. Co lze říci o slabé a striktní stacionaritě?

Příklad 4) Nechť X_t, $t \in T$ (kde $T = \mathbb{R}$ nebo $T = \mathbb{Z}$ nebo $T = \mathbb{R}_+$ nebo $T = \mathbb{N}$) je slabě stacionární proces. Když je tento proces gaussovský, pak je také striktně stacionární. Dokažte pomocí charakteristické funkce.

Příklad 5) Spočtěte autokovarianční funkci Wienerova procesu. Je Wienerův proces slabě stacionární?

Příklad 6) Nechť $X_t = \rho X_{t-1} + Z_t$ pro každé $t \in \mathbb{Z}$, $Z_{2t} = U_t$ a $Z_{2t+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(U_t^2 - 1)$ pro $t \in \mathbb{Z}$. Náhodné veličiny U_t, $t \in \mathbb{Z}$ jsou nezávislé a $U_t \sim N(0,1)$.
a) Ukažte, že X_t, $t \in \mathbb{Z}$ není striktně stacionární.
b) Určete ρ tak, aby X_t, $t \in \mathbb{Z}$ byl slabě stacionární.

Příklad 7) Nechť f je pozitivně semidefinitní funkce, tj. $\forall k \in \mathbb{N}$, $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{C}$ platí $\sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k c_j \overline{c_l} f(t_j, t_l) \geq 0$. Pak je f hermitovsky symetrická, tj. $f(t,t) \geq 0$ a $f(s,t) = \overline{f(t,s)}$. (*Návod:* pro $k = 1$ zvolte $c_1 = 1$, pro $k = 2$ zvolte $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ a dále $c_1 = 1$, $c_2 = i = \sqrt{-1}$.)

Příklad 8) Nechť R_1, R_2 jsou autokovarianční funkce slabě stacionárních procesů a $a > 0$, $b > 0$. Pak $aR_1 + bR_2$ je opět autokovarianční funkce nějakého slabě stacionárního procesu.

Příklad 9) Nechť $X_t = a + bt + Y_t$, $t \in \mathbb{Z}$, kde Y_t, $t \in \mathbb{Z}$ jsou nezávislé stejně rozdělené n.v. s $\mathsf{E} Y_t = 0$, $\mathsf{Var}\,(Y_t) = \sigma^2$ a $a, b \in \mathbb{R}$ jsou konstanty. Definujme

$$W_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^{q} X_{t+j}.$$

Spočtěte střední hodnotu a autokovarianční funkci procesu W_t, $t \in \mathbb{Z}$.

Příklad 10) Nechť X_t, $t \in T$ a Y_t, $t \in T$ (kde $T = \mathbb{R}$ nebo $T = \mathbb{Z}$ nebo $T = \mathbb{R}_+$ nebo $T = \mathbb{N}$) jsou nekorelované (slabě) stacionární procesy, tj. $\forall t, s \in T$ jsou X_t, Y_s nekorelované n.v. Dokažte, že pak i $X_t + Y_t$, $t \in T$ je (slabě) stacionární proces.

Příklad 11) Nechť X_t, $t \in T$ (kde $T = \mathbb{R}$ nebo $T = \mathbb{Z}$ nebo $T = \mathbb{R}_+$ nebo $T = \mathbb{N}$) je gaussovský stacionární proces s nulovou střední hodnotou. Dokažte, že pak i $Y_t = X_t^2$, $t \in T$ je (slabě i striktně) stacionární proces se střední hodnotou $R_X^2(0)$ a autokovarianční funkcí $R_Y(s,t) = 2R_X(s-t)$.
Návod: Užijte Isserlisův vzorec pro momenty sdruženého normálního rozdělení s nulovou střední hodnotou

$$\mathsf{E}\,[X_1X_2X_3X_4] = \mathsf{E}\,[X_1X_2]\,\mathsf{E}\,[X_3X_4] + \mathsf{E}\,[X_1X_3]\,\mathsf{E}\,[X_2X_4] + \mathsf{E}\,[X_1X_4]\,\mathsf{E}\,[X_2X_3]$$

(lze dokázat derivováním charakteristické funkce).)

Příklad 12) Uvažujme proces $X_t = \cos(t + B)$, $t \in \mathbb{R}$, kde B je n.v. s rovnoměrným rozdělením na $[0, 2\pi]$. Zjistěte, zda jde o (slabě) stacionární proces a rozhodněte o jeho spojitosti a diferencovatelnosti (v L_2).

Příklad 13) Nechť stacionární proces X_t, $t \in \mathbb{R}$ má autokovarianční funkci $R(t) = \mathrm{e}^{-\alpha|t|}$, $t \in \mathbb{R}$, kde $\alpha > 0$. Dokažte, že tento proces nemá derivaci v L_2.

Příklad 14) Nechť stacionární proces X_t, $t \in T$ (kde $T = \mathbb{R}$ nebo $T = \mathbb{R}_+$) má derivaci X_t', $t \in T$. Pak je X_t', $t \in T$ opět stacionární proces.

Příklad 15) Nechť Y_t, $t \in \mathbb{Z}$ a Z_t, $t \in \mathbb{Z}$ jsou nezávislé stacionární náhodné posloupnosti se spektrálními hustotami f_Y, f_Z. Potom posloupnost $X_t = Y_t + Z_t$, $t \in \mathbb{Z}$ je opět stacionární se spektrální hustotou $f_X = f_Y + f_Z$.

Příklad 16) Nechť stacionární proces X_t, $t \in \mathbb{R}$ má spektrální hustotu

$$f(\lambda) = \begin{cases} a \text{ pokud } -b \leq \lambda \leq b, \\ 0 \text{ pokud } |\lambda| > b, \end{cases} \qquad \text{kde } b > 0.$$

Určete autokovarianční funkci tohoto procesu.

Příklad 17) Nechť stacionární proces X_t, $t \in \mathbb{R}$ má spektrální hustotu

$$f(\lambda) = \begin{cases} 0 \text{ pokud } |\lambda| < \lambda_0, \\ c^2 \text{ pokud } \lambda_0 \leq |\lambda| \leq 2\lambda_0, \\ 0 \text{ pokud } |\lambda| > 2\lambda_0, \end{cases} \qquad \text{kde } \lambda_0 > 0.$$

Určete autokovarianční funkci tohoto procesu.

Příklad 18) Nechť stacionární proces X_t, $t \in \mathbb{R}$ má autokovarianční funkci

$$R(t) = a\mathsf{e}^{-\alpha|t|}(1 + \alpha|t|) \text{ pro každé } t \in \mathbb{R}, \text{ kde } a > 0, \alpha > 0.$$

Určete spektrální hustotu tohoto procesu, pokud existuje.

Příklad 19) Nechť stacionární proces X_t, $t \in \mathbb{R}$ má autokovarianční funkci

$$R(t) = \sigma^2\mathsf{e}^{-\alpha|t|}\cos(\beta t) \text{ pro každé } t \in \mathbb{R}, \text{ kde } \alpha > 0, \beta > 0, \sigma^2 > 0.$$

Určete spektrální hustotu tohoto procesu, pokud existuje.

Příklad 20) Nechť stacionární proces X_t, $t \in \mathbb{R}$ má autokovarianční funkci

$$R(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j\mathsf{e}^{-\alpha_j|t|} \text{ pro každé } t \in \mathbb{R}, \text{ kde } a_j > 0, \alpha_j > 0, \forall j = 1, 2, \ldots, n.$$

Určete spektrální hustotu tohoto procesu, pokud existuje.

Příklad 21) Uvažujme stacionární posloupnost $Y_t = (-1)^t Y$, $t \in \mathbb{N}$, kde Y je reálná n.v. s $\mathsf{E}Y = 0$, $\mathsf{Var}Y = \sigma^2 > 0$. Určete autokovarianční funkci a spektrální distribuční funkci tohoto procesu. Existuje spektrální hustota ?

Příklad 22) Uvažujme stacionární posloupnost $X_t = \rho\cos(\gamma t + v)$, $t \in \mathbb{N}$, kde $\gamma \in \mathbb{R}$ a v je reálná n.v. s rovnoměrným rozdělením na $(0, 2\pi)$. Určete autokovarianční funkci tohoto procesu. Zjistěte, zda existuje spektrální hustota.

Příklad 23) Určete spektrální hustotu stacionární posloupnosti s autokovarianční funkcí $R(t) = c\left(\frac{1}{2}\right)^{|t|}$, $t \in \mathbb{Z}$, kde $c > 0$.

Příklad 24) Uvažujme stacionární AR(2) proces X_t, $t \in \mathbb{Z}$ řízený rovnicí $X_t - 0.7X_{t-1} + 0.1X_{t-2} = Y_t$, kde $\mathsf{E}Y_t = 0$, $\mathsf{Var}Y_t = \sigma^2$ pro $t \in \mathbb{Z}$ a $\mathsf{cov}(Y_t, Y_s) = 0$ pro $t, s \in \mathbb{Z}$, $t \neq s$. Vyjádřete tento proces ve tvaru lineárního procesu. Spočtěte autokovarianční funkci tohoto procesu.

$$\left(X_t = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k Y_{t-k}, \quad c_k = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^k \right)$$

Příklad 25) Dokažte, že pro rozptyl autoregresní stacionární posloupnosti AR(n) X_t, $t \in \mathbb{Z}$ řízené rovnicí $a_0X_t + a_1X_{t-1} + \ldots + a_nX_{t-n} = Y_t$, platí

$$\mathsf{Var}X_t = R(0) = \frac{\sigma^2}{a_0(a_0r(0) + a_1r(1) + \ldots + a_nr(n))},$$

kde σ^2 je rozptyl bílého šumu Y_t, $t \in \mathbb{Z}$ a r je autokorelační funkce procesu X_t, $t \in \mathbb{Z}$.

Příklad 26) Použitím Yule-Walkerových rovnic spočtěte autokovarianční funkci AR(2) procesu $X_t, t \in \mathbb{Z}$ řízeného rovnicí $X_t - 0.7X_{t-1} + 0.1X_{t-2} = Y_t$, kde Y_t, $t \in \mathbb{Z}$ je bílý šum.

Příklad 27) Použitím Yule-Walkerových rovnic spočtěte autokovarianční funkci AR(2) procesu $X_t, t \in \mathbb{Z}$ řízeného rovnicí $X_t - 0.2X_{t-1} - 0.24X_{t-2} = Y_t$, kde Y_t, $t \in \mathbb{Z}$ je bílý šum.

Příklad 28) Použitím Yule-Walkerových rovnic spočtěte autokovarianční funkci AR(2) procesu $X_t, t \in \mathbb{Z}$ řízeného rovnicí $X_t - 1.4X_{t-1} + 0.98X_{t-2} = Y_t$, kde Y_t, $t \in \mathbb{Z}$ je bílý šum.

Příklad 29) Použitím Yule-Walkerových rovnic spočtěte autokovarianční funkci AR(2) procesu $X_t, t \in \mathbb{Z}$ řízeného rovnicí $X_t - 0.4X_{t-1} + 0.04X_{t-2} = Y_t$, kde Y_t, $t \in \mathbb{Z}$ je bílý šum.

Příklad 30) Nechť AR(3) posloupnost X_t, $t \in \mathbb{Z}$ je řízena rovnicí $X_t - \frac{5}{4}X_{t-1} + \frac{1}{2}X_{t-2} - \frac{1}{16}X_{t-3} = Y_t$, kde Y_t, $t \in \mathbb{Z}$ je bílý šum. Určete autokovarianční funkci této posloupnosti.

$$\left(x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{16} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(x - \frac{1}{4}\right)\right)$$

Příklad 31) Autokovarianční funkce $R(t)$, $t \in \mathbb{Z}$ modelu ARMA(p, q) vyhovuje soustavě rovnic

$$a_0R(t) + a_1R(t-1) + \ldots + a_pR(t-p) = 0, \quad t \in \mathbb{Z},\ t > \max\{q, p\}$$

Počáteční hodnoty $R(0)$, $R(1)$, $\ldots R(\max\{q, p\})$ se získají řešením soustavy rovnic

$$a_0R(t) + a_1R(t-1) + \ldots + a_pR(t-p) = b_0\mathsf{E}\left[Y_jX_{j-t}\right] + b_1\mathsf{E}\left[Y_{j-1}X_{j-t}\right] + \ldots + b_q\mathsf{E}\left[Y_{j-q}X_{j-t}\right]$$

pro $t = 0, 1, \ldots, \max\{q, p\}$. Index $j \in \mathbb{Z}$ lze volit libovolně. Při řešení se využije symetrie autokovarianční funkce, $R(-t) = R(t)$ (obecně $R(-t) = \overline{R(t)}$).

Speciálně pro proces ARMA$(2, 1)$, který je dán rovnicí $X_t - X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} = Y_t + Y_{t-1}$, dostaneme soustavu

$$R(t) - R(t-1) + \frac{1}{4}R(t-2) = 0 \quad t \in \mathbb{Z}, t > 2.$$

Tato soustava má obecné řešení $R(t) = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + c_1t\left(\frac{1}{2}\right)^t$ pro $t = 1, 2, 3, \ldots$. Musí být ještě splněny rovnice

$$\begin{aligned} R(0) - R(1) + \frac{1}{4}R(2) =& 3\sigma^2, \\ -R(0) + \frac{5}{4}R(1) =& \sigma^2, \\ R(2) - R(1) + \frac{1}{4}R(0) =& 0. \end{aligned}$$

Řešením je tedy $R(t) = \frac{32}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{|t|} + 8|t|\left(\frac{1}{2}\right)^{|t|}$ pro všechna $t \in \mathbb{Z}$. Alternativně lze vyjádřit posloupnost ve tvaru lineárního procesu $X_t = \sum_{k=0}^{+\infty} c_kY_{t-k}$, kde $c_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k + 3k\left(\frac{1}{2}\right)^k$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

Příklad 32) Spočtěte autokovarianční funkci procesu X_t, který se řídí modelem ARMA$(2, 1)$

$$X_t - 0.5\ X_{t-1} + 0.4\ X_{t-2} = Y_t + 0.25\ Y_{t-1}$$

kde $Y_t, t \in \mathbb{Z}$ je bílý šum.

Příklad 33) Spočtěte autokovarianční funkci procesu X_t,

$$X_t + 0.6\ X_{t-1} = Y_t + 1.2\ Y_{t-1},$$

kde $Y_t, t \in \mathbb{Z}$ je bílý šum.

Příklad 34) Nechť $Z_t = Y_t + W_t$ a $Y_t + \beta Y_{t-1} = U_t$, $t \in \mathbb{Z}$, přičemž U_t, W_t jsou nezávislé mezi sebou i vzájemně a $\mathsf{E}U_t = 0$, $\mathsf{E}W_t = 0$, $\mathsf{Var}U_t = \sigma^2$, $\mathsf{Var}W_t = \tau^2$. Dokažte, že Z_t, $t \in \mathbb{Z}$ je stacionární posloupnost se spektrální hustotou

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2 + \tau^2(1 + \beta^2 + 2\beta\cos(\lambda))}{2\pi(1 + \beta^2 + 2\beta\cos(\lambda))}.$$

Příklad 35) Ověřte, zda procesy z příkladů 16, 17, 18, 19, 20 jsou ergodické podle středu.

Příklad 36) Ověřte, zda posloupnosti AR(p), MA(q), ARMA(p,q) jsou ergodické podle středu.

Příklad 37) Uvažujme stacionární AR(1) proces X_t, $t \in \mathbb{Z}$ řízený rovnicí $X_t + \frac{1}{3}X_{t-1} = Y_t$, kde Y_t, $t \in \mathbb{Z}$ je bílý šum. Predikujte hodnoty X_{k+1} pro $k \in \mathbb{N}$, jestliže jsme pozorovali hodnoty $X_0 = X_1 = 1$.

Příklad 38) Uvažujme stacionární AR(2) proces X_t, $t \in \mathbb{Z}$ řízený rovnicí $X_t + \frac{1}{3}X_{t-1} + \frac{1}{3}X_{t-2} = Y_t$, kde Y_t, $t \in \mathbb{Z}$ je bílý šum. Predikujte hodnoty X_{k+1} pro $k \in \mathbb{N}$, jestliže jsme pozorovali hodnoty a) $X_0 = X_1 = 1$; b) $X_1 = 1$; c) $X_0 = 1$; d) $X_0 = X_1 = X_{-1} = 1$.

Příklad 39) Uvažujme stacionární ARMA(1,1) proces X_t, $t \in \mathbb{Z}$ řízený rovnicí $X_t + \frac{1}{3}X_{t-1} = Y_t - Y_{t-1}$, kde Y_t, $t \in \mathbb{Z}$ je bílý šum. Predikujte hodnoty X_{k+1} pro $k \in \mathbb{N}$, jestliže jsme pozorovali hodnoty $X_0 = -1$, $X_1 = 2$.

Příklad 40) Jsou známy hodnoty $X_1 = 5,9; X_2 = 4,9; X_3 = 2,2; X_4 = 2,0; X_5 = 4,9$ procesu

$$(X_t - 4) - 0,8(X_{t-1} - 4) = Y_t,$$

kde $\{Y_t\}$ je bílý šum s nulovou střední hodnotou a rozptylem $\sigma^2 = 0,7$. Najděte předpověď pro X_6, X_7.