Rovnice matematické fyziky

Milan Pokorný

Přednáška 14.12.2023

24.4.2 Věta o třech potenciálech a její důsledky I

Věta (17 O střední hodnotě harmonických funkcí V 25.4.20)

Nechť $R > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ a $u \in C(\overline{B_R(x_0)})$ je harmonická funkce na $B_R(x_0)$. Pak

$$u(x_0) = \frac{1}{\kappa_N R^{N-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}S(y).$$

Věta (20 O zesíleném principu maxima V 25.4.23)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast a $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ je harmonická funkce na Ω. Jestliže u na Ω nabývá svého maxima, pak je na Ω konstantní.

24.4.2 Věta o třech potenciálech a její důsledky I

Věta (17 O střední hodnotě harmonických funkcí V 25.4.20)

Nechť $R > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ a $u \in C(\overline{B_R(x_0)})$ je harmonická funkce na $B_R(x_0)$. Pak

$$u(x_0) = \frac{1}{\kappa_N R^{N-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}S(y).$$

Věta (20 O zesíleném principu maxima V 25.4.23)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast a $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ je harmonická funkce na Ω. Jestliže u na Ω nabývá svého maxima, pak je na Ω konstantní.

24.4.2 Věta o třech potenciálech a její důsledky II

Důsledek (2 Důsl. 25.4.24)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je oblast a* $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *je harmonická funkce na* Ω.

(i) *Jestliže* u *na* Ω *nabývá svého minima, pak je na* Ω *konstantní.*

(ii) *Jestliže* u *není konstantní na* Ω, *pak zde nenabývá ani svého minima ani maxima.*

(iii) *Jestliže navíc* Ω *je omezená a* $u \in C(\overline{\Omega})$, *pak*

$$\min_{\partial\Omega} u = \min_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

24.4.3 Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici I

Důsledek (3 Jednoznačnost řešení vnitřní Dirichletovy úlohy I V 25.4.25)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast. Potom má Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici na třídě funkcí $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ nejvýše jedno řešení.