Rovnice matematické fyziky

Milan Pokorný

Přednáška 7.12.2023

Věta (13 O fundamentálním řešení Poissonovy rovnice V 25.4.1)

Fundamentálním řešením Poissonovy rovnice je regulární distribuce reprezentovaná funkcí

$$\mathcal{E}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & \textit{pro } N = 2 \\ \frac{1}{(N-2)\kappa_N} \frac{1}{|x|^{N-2}} & \textit{pro } N \geq 3, \end{cases}$$

kde κ_N je míra jednotkové sféry v $\mathbb{R}^N$. Fundamentální řešení je na $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ určeno jednoznačně až na přičtení regulární distribuce reprezentované harmonickým polynomem.

Věta (14 Věta o třech potenciálech V 25.4.12)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou“ hranicí (jako ve Větě o integraci per partes, tedy ve Větě 17.3.15), $u \in C^2(\overline{\Omega})$ a $\mathcal{E}$ značí fundamentální řešení Poissonovy rovnice. Pak pro všechna $x \in \Omega$ platí

$$u(x) = -\int_\Omega \mathcal{E}(x-y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \left(\mathcal{E}(x-y)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y) - u(y)\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \boldsymbol{\nu}_y}(x-y)\right)\mathrm{d}S(y),$$

kde

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y) := \nabla u(y)\cdot \boldsymbol{\nu}(y) \qquad a \qquad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \boldsymbol{\nu}_y}(x-y) := \nabla_y \mathcal{E}(x-y)\cdot \boldsymbol{\nu}(y)$$

a $\boldsymbol{\nu}$ je vnější normála k $\partial\Omega$.

24.4.2 Věta o třech potenciálech a její důsledky II

Důsledek (1 Důsl. 25.4.13)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou" hranicí (jako ve Větě o integraci per partes, tedy ve Větě 17.3.15) a $u \in C^2(\overline{\Omega})$ splňuje $\Delta u = 0$ v Ω. Pak $u \in C^\infty(\Omega)$ a na Ω platí

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \Big(\mathcal{E}(x-y) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y) - u(y) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \boldsymbol{\nu}_y}(x-y) \Big) \, \mathrm{d}S(y),$$

kde $\boldsymbol{\nu}$ je vnější normála k $\partial\Omega$.

Definice (1 Potenciály D 25.4.14)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou“ hranicí (jako ve Větě o integraci per partes, tedy ve Větě 17.3.15) a $\mu, \sigma \colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce a $\varrho \colon \Omega \to \mathbb{R}$ je spojitá a omezená funkce. Pak

$$v(x) := -\int_{\partial\Omega} \mu(y)\mathcal{E}(x-y)\,\mathrm{d}S(y) \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}^N$$

nazýváme potenciálem jednoduché vrstvy,

$$\begin{aligned} w(x) &:= -\int_{\partial\Omega} \sigma(y)\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\boldsymbol{\nu}_y}(x-y)\,\mathrm{d}S(y) \\ &= -\int_{\partial\Omega} \sigma(y)\frac{x-y}{\kappa_N|x-y|^N}\cdot\boldsymbol{\nu}(y)\,\mathrm{d}S(y) \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

nazýváme potenciálem dvojvrstvy (pro tento případ předpokládáme, že Ω je třídy C^2) a

$$\varphi(x) := -\int_{\Omega} \varrho(y)\mathcal{E}(x-y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}^N$$

nazýváme objemovým (Newtonovým) potenciálem.

Definice (2 Harmonická funkce a harmonická funkce s kontrolovaným růstem D 25.4.16)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast a $u \in C^2(\Omega)$. Řekneme, že funkce u je *harmonická* na Ω, jestliže $\Delta u = 0$ na Ω. Řekneme, že funkce u je *harmonická s kontrolovaným růstem* na Ω, jestliže $\Delta u = 0$ na Ω a navíc buď Ω je omezená, nebo

$$u(x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{|x|^{N-2}}\right) \qquad \text{pro } |x| \to \infty.$$

Věta (15 O potenciálech jednoduché vrstvy a dvojvrstvy V 25.4.18)

Nechť $N \geq 3$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou" hranicí (jako ve Větě o integraci per partes, tedy ve Větě 17.3.15). Nechť $\mu, \sigma \in C(\partial\Omega)$. Pak potenciály jednoduché vrstvy a dvojvrstvy jsou harmonické funkce s kontrolovaným růstem na Ω a na $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.
Pro $N = 2$ platí tvrzení s tím rozdílem, že potenciál jednoduché vrstvy je na $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ pouze harmonická funkce.

Věta (16 O objemovém potenciálu V 23.4.19)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou" hranicí (jako ve Větě o integraci per partes, tedy ve Větě 17.3.15). Nechť $\varrho \in L^\infty(\Omega)$. Pak je objemový potenciál $C^1(\Omega)$-funkce, která je harmonická na $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ pro $N \geq 2$ a harmonická s kontrolovaným růstem na $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ pro $N \geq 3$ (a také třídy $C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega})$). Je-li navíc $\varrho \in C^1(\overline{\Omega})$, pak $\varphi \in C^2(\Omega)$ a platí

$$\Delta\varphi = \varrho \qquad \text{na } \Omega.$$

Věta (15 O potenciálech jednoduché vrstvy a dvojvrstvy V 25.4.18)

Nechť $N \geq 3$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou“ hranicí (jako ve Větě o integraci per partes, tedy ve Větě 17.3.15). Nechť $\mu, \sigma \in C(\partial\Omega)$. Pak potenciály jednoduché vrstvy a dvojvrstvy jsou harmonické funkce s kontrolovaným růstem na Ω a na $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.
Pro $N = 2$ platí tvrzení s tím rozdílem, že potenciál jednoduché vrstvy je na $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ pouze harmonická funkce.

Věta (16 O objemovém potenciálu V 23.4.19)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou“ hranicí (jako ve Větě o integraci per partes, tedy ve Větě 17.3.15). Nechť $\varrho \in L^\infty(\Omega)$. Pak je objemový potenciál $C^1(\Omega)$-funkce, která je harmonická na $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ pro $N \geq 2$ a harmonická s kontrolovaným růstem na $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ pro $N \geq 3$ (a také třídy $C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega})$). Je-li navíc $\varrho \in C^1(\overline{\Omega})$, pak $\varphi \in C^2(\Omega)$ a platí

$$\Delta\varphi = \varrho \qquad \text{na } \Omega.$$

24.4.2 Věta o třech potenciálech a její důsledky VI

Věta (17 O střední hodnotě harmonických funkcí V 25.4.20)

Nechť $R > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ a $u \in C(\overline{B_R(x_0)})$ je harmonická funkce na $B_R(x_0)$. Pak

$$u(x_0) = \frac{1}{\kappa_N R^{N-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}S(y).$$

Věta (18 Obrácená věta o střední hodnotě V 25.4.21)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast, $N \geq 2$ a $u \in C^2(\Omega)$ splňuje

$$u(x) = \frac{1}{\kappa_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)\,\mathrm{d}S(y) \qquad \text{pro všechny } B_r(x) \subset \Omega.$$

Potom je u harmonická na Ω.

Věta (17 O střední hodnotě harmonických funkcí V 25.4.20)

Nechť $R > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ a $u \in C(\overline{B_R(x_0)})$ je harmonická funkce na $B_R(x_0)$. Pak

$$u(x_0) = \frac{1}{\kappa_N R^{N-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}S(y).$$

Věta (18 Obrácená věta o střední hodnotě V 25.4.21)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast, $N \geq 2$ a $u \in C^2(\Omega)$ splňuje

$$u(x) = \frac{1}{\kappa_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)\,\mathrm{d}S(y) \qquad \text{pro všechny } B_r(x) \subset \Omega.$$

Potom je u harmonická na Ω.

Věta (19 O hladkosti funkcí splňujících vlastnost střední hodnoty V 25.4.22)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast, $N \geq 2$. Nechť $u \in C(\Omega)$ splňuje vlastnost střední hodnoty

$$u(x) = \frac{1}{\kappa_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)\,\mathrm{d}S(y) \qquad \text{pro všechny } B_r(x) \subset \Omega.$$

Potom $u \in C^\infty(\Omega)$.

Věta (20 O zesíleném principu maxima V 25.4.23)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast a $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ je harmonická funkce na Ω. Jestliže u na Ω nabývá svého maxima, pak je na Ω konstantní.

Věta (19 O hladkosti funkcí splňujících vlastnost střední hodnoty V 25.4.22)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast, $N \geq 2$. Nechť $u \in C(\Omega)$ splňuje vlastnost střední hodnoty

$$u(x) = \frac{1}{\kappa_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)\,\mathrm{d}S(y) \qquad \textit{pro všechny } B_r(x) \subset \Omega.$$

Potom $u \in C^\infty(\Omega)$.

Věta (20 O zesíleném principu maxima V 25.4.23)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast a $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ je harmonická funkce na Ω. Jestliže u na Ω nabývá svého maxima, pak je na Ω konstantní.

Důsledek (2 Důsl. 25.4.24)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je oblast a* $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *je harmonická funkce na* Ω.
(i) *Jestliže* u *na* Ω *nabývá svého minima, pak je na* Ω *konstantní.*
(ii) *Jestliže* u *není konstantní na* Ω, *pak zde nenabývá ani svého minima ani maxima.*
(iii) *Jestliže navíc* Ω *je omezená a* $u \in C(\overline{\Omega})$, *pak*

$$\min_{\partial\Omega} u = \min_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$