Rovnice matematické fyziky

Milan Pokorný

Přednáška 23.11.2023

24.3 Vlnová rovnice. Rovnice hyperbolického typu
24.3.1 Fundamentální řešení vlnové rovnice I

Lemma (2 L 25.3.1)

Nechť $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ a nechť $U_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N+1})$ je řešením úlohy

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - \Delta U_1 &= 0 \\ U_1(0,x) &= 0 \\ \frac{\partial U_1}{\partial t}(0,x) &= g. \end{aligned}$$

Potom distribuce $U_2 := \frac{\partial U_1}{\partial t}$ řeší úlohu (v analogickém smyslu jako výše)

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} - \Delta U_2 &= 0 \\ U_2(0,x) &= g \\ \frac{\partial U_2}{\partial t}(0,x) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Věta (11 O jednoznačnosti klasických řešení okrajových úloh pro vlnovou rovnici V 25.3.13)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou" hranicí (jako ve Větě o integraci per partes, tedy Větě 17.3.15). Pak pro obě z úloh uvedených výše existuje nejvýše jedno klasické řešení ve třídě funkcí splňujících

$$u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in L^\infty((0, T_0)\times\Omega) \quad \textit{pro všechna } i \in \{1, \dots, N\} \textit{ a } T_0 \in (0, T) \tag{2}$$

a

$$x \mapsto u(t,x),\ x \mapsto \frac{\partial u}{\partial t}(t,x),\ x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x),\ x \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(t,x) \in C(\overline{\Omega}) \quad \textit{pro všechna } i \in \{1, \dots, N\} \textit{ a } t \in (0, T). \tag{3}$$