Rovnice matematické fyziky

Milan Pokorný

Přednáška 19.10.2023

24.2.2 Princip maxima a jeho důsledky pro Cauchyovu úlohu pro rovnici vedení tepla I

Označení

Pro $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ otevřená a $0 < T < \infty$ definujme parabolický válec $Q_T := (0, T] \times \Omega$ a $\Gamma_T := \overline{Q_T} \setminus Q_T$ jeho parabolickou hranici. Konečně pro $(t, x) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $r > 0$ označme jako tepelnou kouli množinu

$$E(t, x; r) := \left\{ (s, y) \in \mathbb{R}^{N+1} : s < t, U(t - s, x - y) \geq \frac{1}{r^N} \right\},$$

kde $U(t, x)$ je fundamentální řešení rovnice vedení tepla.

Věta (5 O střední hodnotě pro rovnici vedení tepla)

Nechť $u \in C_1^2(Q_T) \cap C_0^0(\overline{Q_T})$ řeší na Q_T rovnici vedení tepla $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$. Potom

$$u(t, x) = \frac{1}{4r^N} \int\int_{E(t,x;r)} u(s, y) \frac{|x - y|^2}{|t - s|^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}s \qquad \text{pro všechna } E(t, x; r) \subset Q_T.$$

24.2.2 Princip maxima a jeho důsledky pro Cauchyovu úlohu pro rovnici vedení tepla I

Označení

Pro $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ otevřená a $0 < T < \infty$ definujme parabolický válec $Q_T := (0, T] \times \Omega$ a $\Gamma_T := \overline{Q_T} \setminus Q_T$ jeho parabolickou hranici. Konečně pro $(t, x) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $r > 0$ označme jako tepelnou kouli množinu

$$E(t, x; r) := \left\{(s, y) \in \mathbb{R}^{N+1} : s < t, U(t-s, x-y) \geq \frac{1}{r^N}\right\},$$

kde $U(t, x)$ je fundamentální řešení rovnice vedení tepla.

Věta (5 O střední hodnotě pro rovnici vedení tepla)

Nechť $u \in C_1^2(Q_T) \cap C_0^0(\overline{Q_T})$ řeší na Q_T rovnici vedení tepla $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$. Potom

$$u(t, x) = \frac{1}{4r^N} \int\int_{E(t,x;r)} u(s, y) \frac{|x-y|^2}{|t-s|^2} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}s \qquad \text{pro všechna } E(t, x; r) \subset Q_T.$$

24.2.2 Princip maxima a jeho důsledky pro Cauchyovu úlohu pro rovnici vedení tepla II

Věta (6 Princip maxima pro rovnici vedení tepla)

Nechť $u \in C_1^2(Q_T) \cap C_0^0(\overline{Q}_T)$ *řeší v* Q_T *rovnici* $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$.
(i) *Je-li* Ω *omezená, platí* $\max_{\overline{Q}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$.
(ii) *Je-li* Ω *souvislá (ne nutně omezená) a existuje* $(t_0, x_0) \in Q_T$ *takové, že platí* $u(t_0, x_0) = \max_{\overline{Q}_T} u$, *potom je* u *konstantní na* $\overline{Q}_{t_0}$.

24.2.2 Princip maxima a jeho důsledky pro Cauchyovu úlohu pro rovnici vedení tepla III

Věta (7 O principu maxima pro Cauchyovu úlohu rovnice vedení tepla)

Nechť $u \in C_1^2((0,T] \times \mathbb{R}^N) \cap C_0^0([0,T] \times \mathbb{R}^N)$ řeší

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \qquad v\ (0,T) \times \mathbb{R}^N$$
$$u(0,x) = u_0(x) \qquad v\ \mathbb{R}^N$$

a splňuje růstovou podmínku

$$|u(t,x)| \leq A e^{a|x|^2}, \qquad x \in \mathbb{R}^N, 0 \leq t \leq T$$

pro a, $A > 0$. Potom

$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^N} u = \sup_{\mathbb{R}^N} u_0.$$

24.2.2 Princip maxima a jeho důsledky pro Cauchyovu úlohu pro rovnici vedení tepla IV

Věta (8 Jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla)

Nechť $u_0 \in C(\mathbb{R}^N)$, $f \in C_0^0([0,T] \times \mathbb{R}^N)$. *Potom existuje nejvýše jedno řešení úlohy*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \qquad & v\ (0,T) \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = u_0(x) \qquad & v\ \mathbb{R}^N, \end{aligned}$$

takové, že $u \in C_1^2((0,T] \times \mathbb{R}^N) \cap C_0^0([0,T] \times \mathbb{R}^N)$ *a splňuje pro jistá* a, $A > 0$ *růstovou podmínku*

$$|u(t,x)| \leq A\mathrm{e}^{a|x|^2}, \qquad x \in \mathbb{R}^N, 0 \leq t \leq T.$$