Sada příkladů 5/7

Parciální diferenciální rovnice

Vlnová rovnice

1. Řešte vlnovou rovnici s podmínkami

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right),\ t \in \mathbb{R}^+$$
$$u(0,x) = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \delta_b, \quad b \in \left(0, \frac{1}{2}\right),$$

kde
a) $u(t,0) = u(t,\frac{1}{2}) = 0$ b) $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\frac{1}{2}) = 0.$

2. Řešte vlnovou rovnici s podmínkami

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad x \in B_{\frac{1}{2}}(0) \subset \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R}^+$$
$$u(0,x) = |x|,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 1,$$
$$u(t,x) = 0, \quad |x| = \tfrac{1}{2}.$$

3. Řešte vlnovou rovnici s podmínkami

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R}^+$$
$$u(0,x) = \mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}, \quad \alpha > 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0.$$

Fundamentální řešení rovnic

4. Nalezněte fundamentální řešení pro následující operátory, tj. řešení následujících úloh

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \delta, \quad x \in \mathbb{R}^N,\ N = 2,3,$$
$$(-\Delta - k^2)u = \delta, \quad x \in \mathbb{R}^3,\ k \in \mathbb{R}^+,$$
$$(-\Delta + k^2)u = \delta, \quad x \in \mathbb{R}^3,\ k \in \mathbb{R}^+,$$
$$(\Delta^2 - k^2\Delta + k^4)u = \delta, \quad x \in \mathbb{R}^3,\ k \in \mathbb{R}^+.$$