Sada příkladů na 3/7

Fundamentální řešení ODR

Nalezněte řešení následujících rovnic v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

1. $y' + ay = \delta, \quad a \in \mathbb{R}$
2. $y'' + a^2 y = \delta, \quad a \in \mathbb{R}_0^+$
3. $y'' + 2y' + (b^2 - a^2)y = \delta, \quad b \geq |a|$
4. $y^{(4)} + a^4 y = \delta, \quad a \in \mathbb{R}_0^+$
5. $-y^{(4)} + a^2 y'' = \delta, \quad a \in \mathbb{R}^+$
6. $y^{(4)} + y'' + y = \delta$

Parciální diferenciální rovnice

Rovnice vedení tepla

1. Nalezněte řešení rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

splňující počáteční podmínku:
a) $u(0,x) = |x|^2 \cos(\beta, x), \quad \beta \in \mathbb{R}^N$
b) $u(0,x) = \mathrm{e}^{-\alpha|x|^2} \cos(\beta, x), \quad \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}^N$

2. Nalezněte jedno řešení rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \delta(x) \otimes T_{\mathrm{e}^{pt}}, \qquad p > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R}.$$

3. Nalezněte řešení rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

splňující počáteční a okrajovou podmínku

$$u(t,0) = 0, \quad t > 0, \qquad u(0,x) = U_0 = const, \quad x > 0.$$