Matematika pro fyziky I

Milan Pokorný

Přednáška 22.12.2022

18.3 Abstraktní Fourierovy řady I

Věta (3 O nejlepší aproximaci V 19.2.1)

Nechť H je Hilbertův prostor, $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ je ortonormální systém, $f \in H$, $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} := \{(f, \Phi_k)_H\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ položme $s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k \Phi_k$ a $t_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \Phi_k$. Pak
(i) $\|f - s_n\|_H \leq \|f - t_n\|_H$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$
(ii) *pro pevné* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $\|f - s_n\|_H = \|f - t_n\|_H$ *právě tehdy, když* $a_k = c_k$ *pro všechna* $k \in \{1, \dots, n\}$
(iii) *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $\|f - s_n\|_H = \|f - t_n\|_H$ *právě tehdy, když* $a_k = c_k$ *pro všechna* $k \in \mathbb{N}$.

Definice (5 Fourierova řada prvku D 19.2.2)

Nechť H je Hilbertův prostor, nechť $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ je ortonormální systém, $f \in H$ a $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} := \{(f, \Phi_k)_H\}_{k=1}^{\infty}$. Pak řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k$$

nazýváme *Fourierovou řadou* prvku f. Číslo c_k se nazývá k-tým Fourierovým koeficientem prvku f.

18.3 Abstraktní Fourierovy řady I

Věta (3 O nejlepší aproximaci V 19.2.1)

Nechť H je Hilbertův prostor, $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ je ortonormální systém, $f \in H$, $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} := \{(f, \Phi_k)_H\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ položme $s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k \Phi_k$ a $t_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \Phi_k$. Pak
(i) $\|f - s_n\|_H \leq \|f - t_n\|_H$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$
(ii) *pro pevné* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $\|f - s_n\|_H = \|f - t_n\|_H$ *právě tehdy, když* $a_k = c_k$ *pro všechna* $k \in \{1, \ldots, n\}$
(iii) *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $\|f - s_n\|_H = \|f - t_n\|_H$ *právě tehdy, když* $a_k = c_k$ *pro všechna* $k \in \mathbb{N}$.

Definice (5 Fourierova řada prvku D 19.2.2)

Nechť H je Hilbertův prostor, nechť $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ je ortonormální systém, $f \in H$ a $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} := \{(f, \Phi_k)_H\}_{k=1}^{\infty}$. Pak řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k$$

nazýváme *Fourierovou řadou* prvku f. Číslo c_k se nazývá k-tým Fourierovým koeficientem prvku f.

Věta (4 O vlastnostech abstraktních Fourierových řad V 19.2.6)

Nechť H je Hilbertův prostor, $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ je ortonormální systém, $f \in H$, $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k$ a $s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k \Phi_k$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|_H^2$$

a

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|_H^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|s_n - f\|_H = 0.$$

Důsledek (1 Důsl 19.2.8)

Nechť H je Hilbertův prostor, $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ je ortonormální systém, $f \in H$ a $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k$. Pak

(i) $\{c_k\} \in \ell_2$

(ii) $c_k \to 0$ *pro* $k \to \infty$

(iii) $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k$ *právě tehdy, když platí Parsevalova rovnost* $\|f\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$.

18.3 Abstraktní Fourierovy řady II

Věta (4 O vlastnostech abstraktních Fourierových řad V 19.2.6)

Nechť H je Hilbertův prostor, $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ je ortonormální systém, $f \in H$, $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k$ a $s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k \Phi_k$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|_H^2$$

a

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|_H^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|s_n - f\|_H = 0.$$

Důsledek (1 Důsl 19.2.8)

Nechť H je Hilbertův prostor, $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ je ortonormální systém, $f \in H$ a $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k$. Pak

(i) $\{c_k\} \in \ell_2$

(ii) $c_k \to 0$ *pro* $k \to \infty$

(iii) $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k$ *právě tehdy, když platí Parsevalova rovnost* $\|f\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$.

18.3 Abstraktní Fourierovy řady III

Věta (5 Riesz–Fischerova věta V 19.2.9)

Nechť H je Hilbertův prostor, $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ je ortonormální systém a $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$. Pak
(i) *řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k$ konverguje v H*
(ii) $c_k = (\sum_{j=1}^{\infty} c_j \Phi_j, \Phi_k)_H$ *pro všechna $k \in \mathbb{N}$*
(iii) $\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k \|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$.

Věta (6 O charakterizaci úplných systémů V 19.2.12)

Nechť H je Hilbertův prostor a $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ je ortonormální systém. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.
(i) *Systém $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ je úplný*
(ii) *pro všechna $f \in H$ platí*

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k \qquad \Longrightarrow \qquad f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k$$

(iii) *pro všechna $f \in H$ platí Parsevalova rovnost*
(iv) *množina všech prvků, které vzniknou jako lineární kombinace konečně mnoha prvků systému $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty}$, je hustá v H.*

18.3 Abstraktní Fourierovy řady III

Věta (5 Riesz–Fischerova věta V 19.2.9)

Nechť H je Hilbertův prostor, $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ je ortonormální systém a $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$. Pak
(i) *řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k$ konverguje v H*
(ii) $c_k = (\sum_{j=1}^{\infty} c_j \Phi_j, \Phi_k)_H$ *pro všechna $k \in \mathbb{N}$*
(iii) $\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k \|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$.

Věta (6 O charakterizaci úplných systémů V 19.2.12)

Nechť H je Hilbertův prostor a $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ je ortonormální systém. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.
(i) *Systém $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ je úplný*
(ii) *pro všechna $f \in H$ platí*

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k \qquad \Longrightarrow \qquad f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k$$

(iii) *pro všechna $f \in H$ platí Parsevalova rovnost*
(iv) *množina všech prvků, které vzniknou jako lineární kombinace konečně mnoha prvků systému $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty}$, je hustá v H.*

Důsledek (2 Důsl. 19.2.13)

Každý Hilbertův prostor, ve kterém existuje úplný ortonormální systém, je separabilní.

Věta (7 O existenci úplného systému v separabilním Hilbertově prostoru V 19.2.14)

V každém separabilním Hilbertově prostoru existuje úplný ortonormální systém.

Definice (5 Izometrie, izometrické prostory D 19.2.16)

Nechť $(P_1, \varrho_1), (P_2, \varrho_2)$ jsou metrické prostory a $I\colon P_1 \to P_2$ je zobrazení. Řekneme, že I je *izometrie*, jestliže pro všechna $x, y \in P_1$ platí

$$\varrho_2(I(x), I(y)) = \varrho_1(x, y).$$

Dále řekneme, že prostory $(P_1, \varrho_1), (P_2, \varrho_2)$ jsou *izometrické*, jestliže existuje izometrie zobrazující P_1 na P_2.

Důsledek (2 Důsl. 19.2.13)

Každý Hilbertův prostor, ve kterém existuje úplný ortonormální systém, je separabilní.

Věta (7 O existenci úplného systému v separabilním Hilbertově prostoru V 19.2.14)

V každém separabilním Hilbertově prostoru existuje úplný ortonormální systém.

Definice (5 Izometrie, izometrické prostory D 19.2.16)

Nechť $(P_1, \varrho_1), (P_2, \varrho_2)$ jsou metrické prostory a $I\colon P_1 \to P_2$ je zobrazení. Řekneme, že I je *izometrie*, jestliže pro všechna $x, y \in P_1$ platí

$$\varrho_2(I(x), I(y)) = \varrho_1(x, y).$$

Dále řekneme, že prostory $(P_1, \varrho_1), (P_2, \varrho_2)$ jsou *izometrické*, jestliže existuje izometrie zobrazující P_1 na P_2.

18.3 Abstraktní Fourierovy řady IV

Důsledek (2 Důsl. 19.2.13)

Každý Hilbertův prostor, ve kterém existuje úplný ortonormální systém, je separabilní.

Věta (7 O existenci úplného systému v separabilním Hilbertově prostoru V 19.2.14)

V každém separabilním Hilbertově prostoru existuje úplný ortonormální systém.

Definice (5 Izometrie, izometrické prostory D 19.2.16)

Nechť $(P_1, \varrho_1), (P_2, \varrho_2)$ jsou metrické prostory a $I\colon P_1 \to P_2$ je zobrazení. Řekneme, že I je *izometrie*, jestliže pro všechna $x, y \in P_1$ platí

$$\varrho_2(I(x), I(y)) = \varrho_1(x, y).$$

Dále řekneme, že prostory $(P_1, \varrho_1), (P_2, \varrho_2)$ jsou *izometrické*, jestliže existuje izometrie zobrazující P_1 na P_2.

Věta (8 O vztahu separabilních Hilbertových prostorů a ℓ_2 19.2.18)

Každý nekonečně dimenzionální separabilní Hilbertův prostor je izometrický s ℓ_2.

Věta (9 O ortogonální projekci V 19.2.20)

Nechť H je Hilbertův prostor a M je jeho uzavřený podprostor. Pak pro každé $f \in H$ existuje právě jeden prvek $f_M \in M$ takový, že

$$\|f - f_M\|_H = \inf_{y \in M} \|f - y\|_H.$$

Na H definujme zobrazení $P \colon H \to M$ předpisem $P(f) = f_M$. Pak platí
(i) $P(H) = M$
(ii) $P \circ P = P$
(iii) *pro každé $z \in M$ platí*

$$z = P(f) \quad \Longleftrightarrow \quad (f - z, y)_H = 0 \text{ pro všechna } y \in M$$

(iv) $\|f\|_H^2 = \|P(f)\|_H^2 + \|f - P(f)\|_H^2$ *pro všechna $f \in H$.*

18.3 Abstraktní Fourierovy řady V

Věta (8 O vztahu separabilních Hilbertových prostorů a ℓ_2 19.2.18)

Každý nekonečně dimenzionální separabilní Hilbertův prostor je izometrický s ℓ_2.

Věta (9 O ortogonální projekci V 19.2.20)

Nechť H je Hilbertův prostor a M je jeho uzavřený podprostor. Pak pro každé $f \in H$ existuje právě jeden prvek $f_M \in M$ takový, že

$$\|f - f_M\|_H = \inf_{y \in M} \|f - y\|_H.$$

Na H definujme zobrazení $P\colon H \to M$ předpisem $P(f) = f_M$. Pak platí
(i) $P(H) = M$
(ii) $P \circ P = P$
(iii) *pro každé $z \in M$ platí*

$$z = P(f) \quad \Longleftrightarrow \quad (f - z, y)_H = 0 \text{ pro všechna } y \in M$$

(iv) $\|f\|_H^2 = \|P(f)\|_H^2 + \|f - P(f)\|_H^2$ *pro všechna $f \in H$.*

Věta (10 O úplnosti trigonometrického systému V 19.3.1)

Nechť $a \in \mathbb{R}$ *a* $l > 0$. *Pak trigonometrický systém odpovídající periodě* l *je úplný na* $L^2((a, a + l))$.

Věta (11 Carlesonova věta 19.4.23)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, f *je* l*-periodická funkce a* $f \in L^2((a, a + l))$. *Potom*

$$\lim_{n \to \infty} F_{f,n}(x) = f(x)$$

pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$.

18.4 Fourierovy řady odpovídající trigonometrickému systému I

Věta (10 O úplnosti trigonometrického systému V 19.3.1)

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $l > 0$. Pak trigonometrický systém odpovídající periodě l je úplný na $L^2((a, a+l))$.

Věta (11 Carlesonova věta 19.4.23)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, f je l-periodická funkce a $f \in L^2((a, a+l))$. Potom

$$\lim_{n \to \infty} F_{f,n}(x) = f(x)$$

pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$.