1. Nalezněte všechna lokální minima funkcionálu

$$\Phi(y) = \int_0^1 \left(y' 2x e^x + (y')^2 + y^2\right) dx$$

6,5

na množině

$$M = \{ y \in C^1([0,1]),\ y(0) = \tfrac{3}{2},\ y(1) = \tfrac{1}{e} \}.$$

Pozn. Nemusíte vyšetřovat (pokud to z toho nevyplývá), zda jde o lokální minimum!

Řešení

E.-L. rovnice pro $L(x,y,y') = y' 2xe^x + (y')^2 + y^2$ 1

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) + \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$-\frac{d}{dx}(2xe^x) - \frac{d}{dx}(2y') + 2y = 0$$

$$-2(1+x)e^x - 2y'' + 2y = 0$$

$$y'' - y = -(1+x)e^x \qquad 1$$

$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow$ $y_H(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, $y_p(x) = (Ax+B)xe^x$ 0,5

$$y_p'' = \left[(2Ax + B + Ax^2 + Bx)e^x\right]' = (2A + 2Ax + B + 2Ax + B + Ax^2 + Bx)e^x$$

$$(2A + 2B + 4Ax)e^x = -(1+x)e^x \Rightarrow 2A + 2B = -1,\quad 4A = -1 \Rightarrow A = -\tfrac{1}{4},\ B = -\tfrac{1}{4} \qquad 1$$

$$y_p(x) = -\tfrac{1}{4}x(x+1)e^x$$

$y(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow C_1 + C_2 = \frac{3}{2}$

$y(1) = \frac{1}{e} \Rightarrow C_1 e + \frac{C_2}{e} - \frac{1}{2}e = \frac{1}{e}$

$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}\quad C_2 = 1$ 1

$$y(x) = \tfrac{1}{2}e^x + e^{-x} - \tfrac{1}{4}x(1+x)e^x \qquad x \in [0,1] \qquad 0{,}5$$

Že jde skutečně o minimum, plyne např. z toho, že

$$D^2\Phi(y)(h,h) = \frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 \left((y' + th')2xe^x + (y' + th')^2 + (y + th)^2\right) dx \Big|_{t=0} = \qquad 1$$

$$= \int_0^1 2\left((h')^2 + h^2\right) dx > 0 \text{ pro } h \neq 0.$$

(2) V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci funkční řady

5+2b

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha} x}{1+n^4x^2}$$

na celém $[0,\infty)$ resp. na $(0,\infty)$.

Pokud místo chci $\alpha \leq$, ukažte, že pro ty hodnoty α, kde platí bodová (lokálně) konv., ale neplatí stejn. konv. na celém def. oboru, řádně zdůvodni nekonvergenci.

Řešení

Zřejmě platí pro $x \neq 0$

$$\frac{n^{\alpha} x}{1+n^4x^2} \leq \frac{n^{\alpha} x}{n^4x^2} = \frac{1}{n^{4-\alpha} x} \qquad 0{,}5$$

Tedy řada K bodově pro $x \neq 0$ pro $4-\alpha > 1 \Rightarrow \alpha < 3$

pro $x = 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Tedy bodová konvergence na $[0,\infty)$ je pro $\alpha < 3$

(stejně i na $(0,\infty)$).

1b (zřejmě pro $\alpha \geq 3$ bodově K není!)

Současně pro $x \geq \delta$ je

$$\frac{1}{n^{4-\alpha} x} \leq \frac{1}{\delta} \frac{1}{n^{4-\alpha}},$$

tedy konvergence je stejnoměrná na $[\delta,+\infty)$ $\forall \delta > 0 \Rightarrow$ lokálně stejnoměrná na $(0,\infty)$. 1b

Pro stejnoměrnou konvergenci na $[0,\infty)$ potřebuji maximum $\frac{n^{\alpha}x}{1+n^4x^2}$ v závislosti na n. 0,5b

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{n^{\alpha}x}{1+n^4x^2}\right) = \frac{n^{\alpha}(1+n^4x^2) - n^{\alpha}x\, 2n^4x}{(1+n^4x^2)^2}$$

$\Rightarrow$ je nulová pro

$$n^4x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{n^2} \qquad 1b$$

$$\Rightarrow \frac{n^{\alpha}x}{1+n^4x^2} \leq \frac{n^{\alpha-2}}{2} \Rightarrow \text{Řada konverguje stejnoměrně pro } \alpha < 1 \text{ na } [0,\infty)$$

0,5b

Naopak ukážu, že konvergence není stejnoměrná na $[0,\infty)$ pro $\alpha \geq 1$

(Stačí ukázat pro $\alpha = 1$)

Volím $x = \frac{1}{n_0^2}$, $p = n_0$

$$\sum_{n=n_0+1}^{2n_0} \frac{nx}{1+n^4x^2} \geq \sum_{n=n_0+1}^{2n_0} \frac{\frac{1}{n_0^2}\cdot n_0}{1+\frac{(2n_0)^4}{n_0^4}} = \frac{1}{17} \qquad \left(\varepsilon = \tfrac{1}{17}\right)$$

Tedy řada nemůže konv. stejn. pro $\alpha = 1$, tím spíš ani pro $\alpha > 1$.

+2b (pomocí BC podmínky)

Závěr: Bodová a lok. stejn. konv. na $(0,\infty)$: $\alpha < 3$

na $[0,\infty)$ ~~stejn. konv.~~ stejnoměrná na $[0,\infty)$: $\alpha < 1$. 0,75

(3) Pro které hodnoty $a \in \mathbb{R}$ konverguje integrál

(8b) $\varphi(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x}\, dx$? Je stejnoměrně konvergentní?

Pro tyto hodnoty integrál spočtěte pomocí derivace integrálu závislého na parametru. Nezapomeňte ověřit předpoklady příslušných vět.

Řešení

Úvaha:

1b $e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \sim 1$ pro $x \to 0+$

$\frac{1}{x}$ nestačí pro srovnání integrálu ve smyslu Lab. integrál ($\frac{\sin x}{x}$ stačí pro zob. int., ale to zde nestačí). Pro $a>0$ je vše O.K. (viz později)

Pro $a>0$ integrál konverguje stejnoměrně

- $e^{-ax} \frac{\sin x}{x}$ je $\forall a \in (0,\infty)$ spoj.
- $\frac{\partial}{\partial a}\left(e^{-ax} \frac{\sin x}{x}\right) = -e^{-ax} \sin x$ ... deriv. $\exists$ $\forall x>0$ 2b
- integrál konverguje
- $|e^{-ax} \sin x| \le e^{-a_0 x}$ $a \ge a_0 > 0$ $\forall a_0 > 0$

$\Rightarrow$ můžeme int. derivovat na $(0,\infty)$ podle a

$$\varphi'(a) = -\int_0^\infty e^{-ax} \sin x\, dx = -\operatorname{Im} \int_0^\infty e^{(-a+i)x}\, dx = -\operatorname{Im}\left[\frac{1}{-a+i} e^{(-a+i)x}\right]_0^\infty = \operatorname{Im} \frac{1}{-a+i}$$

$$= \operatorname{Im} \frac{-i-a}{1+a^2} = -\frac{1}{1+a^2}$$ 1b

$\varphi(a) = -\operatorname{arctg} a + C$ 1b

Sice neznáme hodnotu $\varphi(a)$, ale víme, že

$$\lim_{a\to+\infty} \varphi(a) = \int_0^\infty \left(\lim_{a\to+\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x}\right) dx = 0$$ 0,5b

(neboť $e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \to 0$ $\forall x>0$, lze jej majoriz. $\forall a$: $e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \le C e^{-a_0 x}$ $\forall a \ge a_0 > 0$) 1,5b

Tedy $\lim_{a\to+\infty} \varphi(a) = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$ 0,5b

$$\boxed{\varphi(a) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a}$$ 0,5b

(5) Nalezněte objem tělesa omezeného plochami

(8b) $z=0$ $\quad z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ $\quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le x$

$a,b>0$.

Řešení

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le x$ je elipsa o středu $(2,0)$ a poloosách $2,3$

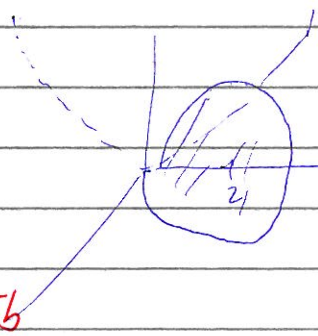
$\left(\frac{x}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 \le 1$ 1b

Zavedeme zobecněné polární souřadnice

$x = 2r\cos\varphi$

$y = 3r\sin\varphi \Rightarrow r^2 \le 2r\cos\varphi$ 1b

$r \le 2\cos\varphi$



0,5b

Zvolíme $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a víc je symetrické kolem 0

$r \in \langle 0, 2\cos\varphi)$ 1,5b

$z \in \langle 0, \frac{r^2\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\varphi}{b^2})$

$$V = 2\cdot 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r\,dr \int_0^{\left(\frac{r^2}{a^2}\cos^2\varphi + \frac{r^2}{b^2}\sin^2\varphi\right)} dz = \qquad dx\,dy = 6r\,dr\,d\varphi$$ 1b

$$= 2\cdot 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\varphi} r^3 \left(\frac{4\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{9\sin^2\varphi}{b^2}\right) dr \right) d\varphi$$

$$= 8\cdot 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^6\varphi \cdot 4}{a^2} + \frac{9\cos^4\varphi\sin^2\varphi}{b^2}\right) d\varphi$$ 0,5b

$$= 8\cdot 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^3 \frac{4}{a^2} + \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 \left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)\frac{9}{b^2}\right) d\varphi \qquad (1-\cos^2 2\varphi)(1+\cos 2\varphi)$$

$$= 8\cdot 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2}\frac{4}{8}\Big[1 + \underbrace{3\cos 2\varphi}_{0} + \underbrace{3\cos^2 2\varphi}_{\frac{3(1+\cos 4\varphi)}{2}} + \underbrace{\cos^3 2\varphi}_{0}\Big] d\varphi$$

$$+ 8\cdot 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{b^2}\frac{9}{8}\Big(1 + \underbrace{\cos 2\varphi}_{0} - \underbrace{\cos^2 2\varphi}_{\frac{1-\cos 4\varphi}{2}} - \underbrace{\cos^3 2\varphi}_{0}\Big) d\varphi$$ 1,5b

0,5b

$$= \frac{24}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{3}{2}\right) d\varphi + \frac{54}{b^2}\int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) d\varphi = \left(\frac{60}{a^2} + \frac{27}{b^2}\right)\frac{\pi}{2}$$

0,5b

60 24