Početní část zkoušky 23.5.2022

Jméno:

Skupina:

1. (7b) Nalezněte řešení ODR

$$y'x^2 = x^2 + xy + y^2$$

splňující a) $y(0) = 1$ b) $y(1) = 1$.

Okomentujte výsledky z pohledu existenční teorie ODR 1. řádu.

2. (6b) V závislosti na parametrech $p, q \in \mathbb{R}$ rozhodněte o konvergenci/divergenci číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+2)\dots(p+2n-2)}{(2n)!!} \frac{1}{(n+1)^q},$$

kde $(2n)!! = 2n \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2$.

3. (7b) Nalezněte

$$\max_M \; x^3 + y^3 + z^3 \qquad \text{a} \qquad \min_M \; x^3 + y^3 + z^3,$$

kde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Nalezněte též body (pokud existují), ve kterých se tyto extrémy nabývají.

4. (7b) Ukažte, že předpisy

$$\ln^2(xyz) + \operatorname{arctg}\left(\frac{2x + y + z}{x^2 + y^2 + 2z^2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$x^2 + 2z + \ln\left(\frac{x^2 + 1}{z^2 + 1}\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{6}(x + y + z)\right) = 0$$

určují na jistém okolí bodu $(1, 1, 1)$ hladké funkce $y = y(x)$ a $z = z(x)$. Spočtěte $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(1)$ a $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(1)$.

Teoretická část zkoušky 23.5.2022

Jméno:

Skupina:

1. (7b) (i) Definujte mocninnou řadu.
(ii) Formulujte a dokažte větu u poloměru konvergence mocninné řady (a dalších vlastnostech mocninných řad), včetně alternativních metod výpočtu poloměru konvergence.
(iii) Použitím vhodné metody z předchozí věty určete poloměr konvergence mocninné řady, je-li
$$\sum_{k=1}^{\infty}(3+(-1)^k)^k z^k$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} k! z^k$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

2. (8b) (i) Definujte pojem kompaktní podmnožina metrického prostoru.
(ii) Definujte pojmy hustá podmnožina metrického prostoru a separabilní metrický prostor.
(iii) Ukažte, že každá kompaktní podmnožina metrického prostoru je separabilní.
(iv) Definujte pojem otevřené pokrytí množiny.
(v) Formulujte Lindelöfovu větu o spočetném podpokrytí otevřené množiny.
(vi) Formulujte a dokažte Borelovu větu o konečném podpokrytí kompaktní množiny.

3. (8b) (i) Definujte pojmy parciální derivace funkce, směrová derivace funkce a totální diferenciál.
(ii) Dokažte, jak musí být totální diferenciál reprezentovaný (pokud existuje).
(iii) Dokažte vztahy pro totální diferenciál součtu, součinu a podílu funkcí (za vhodných předpokladů).