10.6.

1 Pomocí vhodného integračního faktoru vyřešte rovnici dle

6b $\frac{y}{x} + (y^3 - \ln x)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad y(1) = 1.$

Nápověda: Integrační faktor hledejte ve tvaru $\mu = \mu(y)$.

Řešení

Přepíšeme rovnici na

$\mu(y)\frac{y}{x}\,dx + \mu(y)(y^3 - \ln x)\,dy = 0$ 1b

Tedy musí platit $\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(y)\frac{y}{x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(y)(y^3 - \ln x)\right)$ 1b

$\mu'(y)\cdot\frac{y}{x} + \frac{\mu(y)}{x} = -\frac{\mu(y)}{x}$

$\Rightarrow \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{-2}{y}$ 1b

$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{y}\,dy$

$\ln \mu = C \ln y^{-2}$

$\mu(y) = K\cdot\frac{1}{y^2}$ 1b

$\Rightarrow \frac{1}{yx}\,dx + \left(y - \frac{\ln x}{y^2}\right)dy = 0$

$V(x,y) = \frac{1}{y}\ln x + \varphi(y) \Rightarrow \varphi'(y) = y \Rightarrow \varphi(y) = C + \frac{1}{2}y^2$ 1b

$V(x,y) = \frac{1}{y}\ln x + \frac{1}{2}y^2 = K$

$y(1) = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$ 0,5b

Řešení je tedy $\boxed{\frac{1}{y}\ln x + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}}$ 0,5b

(lze vyjádřit jako $x = x(y)$).

10.6.

2 Pro které hodnoty $p,q>0$ a $a\in\mathbb{R}$ konverguje řada

65

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{q(q+1)\cdots(q+n-1)}\right)^{a} \quad ?$$

Řešení

Máme

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \overset{1b}{\left(\frac{p+n}{q+n}\right)^{a}} = \overset{1b}{\left(1+\frac{p-q}{q+n}\right)^{a}}$$

$$= \overset{1b}{\left(1+\frac{p-q}{n} + -\frac{q(p-q)}{n(q+n)}\right)^{a}}$$

$$= 1 + a\cdot\frac{p-q}{n} + \underbrace{-a\cdot\overset{1b}{\frac{q(p-q)}{n(q+n)}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\frac{c_n}{n^2}} \qquad c_n \text{ omezená}$$

$\Rightarrow$ Dle Gaussova kritéria řada konverguje pro $a\cdot(p-q)>1$ a
diverguje pro $a(p-q)\leq 1$ 1b

10.6.

3

8b

Ověřte, že rovnice

$$e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y} = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y} = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

definují na okolí bodu $x=y=1$, $u=0$ $v=\frac{\pi}{4}$ hledané funkce $u=u(x,y)$ a $v=v(x,y)$. Naleznete $du(1,1)\vec{h}$ a $dv(1,1)\vec{h}$.

Řešení

- Vyjma po daný bod jsou rovnice splněny $\left(\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- Vyjma jsou všechny potřebné hledané

Položme $F_1(u,v;x,y) = e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y} - \frac{x}{\sqrt{2}}$

$F_2(u,v;x,y) = e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y} - \frac{y}{\sqrt{2}}$

2b

1b

$$\frac{\partial F_1}{\partial u}\left(0,\frac{\pi}{4};1,1\right) = \frac{1}{x}e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}\Big|_{(0,\frac{\pi}{4};1,1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial v}\left(0,\frac{\pi}{4};1,1\right) = -e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}\cdot\frac{1}{y}\Big|_{(0,\frac{\pi}{4};1,1)} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Rightarrow\quad \det\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1 \neq 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial u}\left(0,\frac{\pi}{4};1,1\right) = \frac{1}{x}e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}\Big|_{(0,\frac{\pi}{4};1,1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial v}\left(0,\frac{\pi}{4};1,1\right) = e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}\cdot\frac{1}{y}\Big|_{(0,\frac{\pi}{4};1,1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Tedy matice je regulární $\Rightarrow$ $\exists$ hledané fce $u=u(x,y)$ a $v=v(x,y)$ na okolí daného bodu.

Spočtěme derivace

$$e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}\cdot\left(-\frac{u}{x^2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} + e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}\cdot\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}\,\frac{1}{y}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}\left(-\frac{u}{x^2}\right) + e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}\cdot\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}\,\frac{1}{y}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

1b

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial v}{\partial x} &= 0\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{2}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\underline{\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad \underline{\frac{\partial v}{\partial x}(1,1) = -\frac{1}{2}}$$

0,5b

0,5b

$$-e^{\frac{u}{x}} \cdot \sin\frac{v}{y} \cdot \left(-\frac{v}{y^2}\right) + e^{\frac{u}{x}} \cos\frac{v}{y}\, \frac{1}{x}\, \frac{\partial u}{\partial y} - e^{\frac{u}{x}} \sin\frac{v}{y} \cdot \frac{1}{y}\, \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$e^{\frac{u}{x}} \cos\frac{v}{y} \cdot \left(-\frac{v}{y^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} + e^{\frac{u}{x}} \cdot \sin\frac{v}{y}\, \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + e^{\frac{u}{x}} \sin\frac{v}{y}\, \frac{1}{y}\, \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

1,5

$$\Downarrow$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

0,5

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{2} \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(1,1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$ 0,5

Tdy
$$\boxed{\begin{aligned} du(1,1)\,(h_1,h_2) &= \frac{1}{2} h_1 + \frac{1}{2} h_2 \\ dv(1,1)\,(h_1,h_2) &= -\frac{1}{2} h_1 + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) h_2 \end{aligned}}$$

1b

10.6.

4) Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = xyz + \frac{4}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z}$$

na $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=0 \vee y=0 \vee z=0\}$.

Nalezněte (vedle f) takové body, ve kterých se tyto extrémy nabývají. Nabývá funkce ~~glob~~ na této množině globálního extrému? Vysvětlete!

Řešení:

Mimo body, kde je jedna proměnná nulová, jsou funkce hladká. Proto se extrémy bude nabývat v bodech, kde $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$. 1b

Proto

$$0 = yz - \frac{4}{x^2} \Rightarrow x^2yz = 4$$

$$0 = xz - \frac{2}{y^2} \quad 0{,}5b \Rightarrow xy^2z = 2$$

$$0 = xy - \frac{2}{z^2} \Rightarrow xyz^2 = 2$$

$$\frac{x}{y} = 2, \quad \frac{x}{z} = 2 \Rightarrow z = \frac{x}{2}, \quad y = \frac{x}{2} \quad 0{,}5b$$

$$\Rightarrow x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm 2 \quad y = z = \pm 1$$

Máme dva podezřelé body $[2,1,1]$ a $[-2,-1,-1]$ 1b

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1,1) = \frac{8}{x^3} = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1,1) = \frac{4}{y^3} = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(2,1,1) = \frac{4}{z^3} = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 2$$

1b

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad D_1 = 1, \quad D_2 = 3, \quad D_3 = (16+2+2) - (4+4+4) = 8$$

1b $\Rightarrow$ v daném bodě se nabývá lokální minimum

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ opačné znaménko $\Rightarrow$ v daném bodě se nabývá lokální maximum 1b

Zjevně pro pevné $y, z \neq 0$ je $\lim_{x \to 0^+} f(x,y,z) = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} f(x,y,z) = -\infty \Rightarrow$ funkce nenabývá globálního extrému. 1b