Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 14.4.2022

Definice (22 Limita zobrazení D 11.9.1)

Nechť (P_1, ϱ_1) a (P_2, ϱ_2) jsou metrické prostory, $\varphi\colon P_1 \to P_2$, $x_0 \in P_1$ je hromadným bodem D_φ a $y_0 \in P_2$. Řekneme, že zobrazení φ má v bodě x_0 *limitu* y_0, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \qquad x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \cap D_\varphi \implies \varphi(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(y_0).$$

V takovém případě píšeme $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = y_0$ nebo $\varphi(x) \to y_0$ pro $x \to x_0$.

Definice (23 Spojitost zobrazení D 11.9.3)

Nechť (P_1, ϱ_1) a (P_2, ϱ_2) jsou metrické prostory, $\varphi\colon P_1 \to P_2$ a $x_0 \in D_\varphi$. Řekneme, že zobrazení φ je v bodě x_0 *spojité*, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \qquad x \in \mathcal{U}_\delta(x_0) \cap D_\varphi \implies \varphi(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(\varphi(x_0)).$$

10.9 Limita a spojitost zobrazení na metrických prostorech I

Definice (22 Limita zobrazení D 11.9.1)

Nechť (P_1, ϱ_1) a (P_2, ϱ_2) jsou metrické prostory, $\varphi\colon P_1 \to P_2$, $x_0 \in P_1$ je hromadným bodem D_φ a $y_0 \in P_2$. Řekneme, že zobrazení φ má v bodě x_0 *limitu* y_0, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \qquad x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \cap D_\varphi \implies \varphi(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(y_0).$$

V takovém případě píšeme $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = y_0$ nebo $\varphi(x) \to y_0$ pro $x \to x_0$.

Definice (23 Spojitost zobrazení D 11.9.3)

Nechť (P_1, ϱ_1) a (P_2, ϱ_2) jsou metrické prostory, $\varphi\colon P_1 \to P_2$ a $x_0 \in D_\varphi$. Řekneme, že zobrazení φ je v bodě x_0 *spojité*, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \qquad x \in \mathcal{U}_\delta(x_0) \cap D_\varphi \implies \varphi(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(\varphi(x_0)).$$

Definice (24 Limita a spojitost zobrazení vzhledem k množině)

Nechť (P_1, ϱ_1) a (P_2, ϱ_2) jsou metrické prostory, $\varphi\colon P_1 \to P_2$, $A \subset P_1$. Je-li $x_0 \in A'$, $D_\varphi \cap \mathcal{P}_(x_0) \cap A \neq \emptyset$ pro všechna $\mathcal{P}(x_0)$, říkáme, že zobrazení φ má v bodě x_0 *limitu vzhledem k A* y_0, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \qquad x \in A \cap \mathcal{P}_\delta(x_0) \cap D_\varphi \implies \varphi(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(y_0).$$

Je-li navíc $x_0 \in D_\varphi \cap A$, říkáme, že zobrazení φ je v bodě x_0 *spojité vzhledem k* A, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \qquad x \in A \cap \mathcal{U}_\delta(x_0) \cap D_\varphi \implies \varphi(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(\varphi(x_0)).$$

Věta (28 Heineho věta V 11.9.10)

Nechť (P_1, ϱ_1) *a* (P_2, ϱ_2) *jsou metrické prostory,* $\varphi\colon P_1 \to P_2$*,* $x_0 \in P_1$ *je hromadným bodem* D_φ *a* $y_0 \in P_2$*. Pak*
(i) $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = y_0$ *právě tehdy, když pro každou posloupnost* $\{x_n\} \subset D_\varphi \setminus \{x_0\}$ *splňující* $x_n \to x_0$ *platí* $\varphi(x_n) \to y_0$*.*
(ii) $\lim_{x\to x_0} \varphi(x)$ *existuje právě tehdy, když pro každou posloupnost* $\{x_n\} \subset D_\varphi \setminus \{x_0\}$ *splňující* $x_n \to x_0$ *existuje limita posloupnosti* $\{\varphi(x_n)\}$*.*

Věta (29 O B–C podmínce V 11.9.11)

Nechť (P_1, ϱ_1) *a* (P_2, ϱ_2) *jsou metrické prostory,* (P_2, ϱ_2) *je úplný,* $\varphi\colon P_1 \to P_2$ *a* $x_0 \in P_1$ *je hromadným bodem* D_φ*. Pak* $\lim_{x\to x_0} \varphi(x)$ *existuje právě tehdy, když zobrazení* φ *splňuje B–C podmínku*
$(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \quad x, y \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \cap D_\varphi \Rightarrow \varrho_2(\varphi(x), \varphi(y)) < \varepsilon)$*.*

10.9 Limita a spojitost zobrazení na metrických prostorech III

Věta (28 Heineho věta V 11.9.10)

Nechť (P_1, ϱ_1) *a* (P_2, ϱ_2) *jsou metrické prostory,* $\varphi\colon P_1 \to P_2$, $x_0 \in P_1$ *je hromadným bodem* D_φ *a* $y_0 \in P_2$. *Pak*
(i) $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = y_0$ *právě tehdy, když pro každou posloupnost* $\{x_n\} \subset D_\varphi \setminus \{x_0\}$ *splňující* $x_n \to x_0$ *platí* $\varphi(x_n) \to y_0$.
(ii) $\lim_{x \to x_0} \varphi(x)$ *existuje právě tehdy, když pro každou posloupnost* $\{x_n\} \subset D_\varphi \setminus \{x_0\}$ *splňující* $x_n \to x_0$ *existuje limita posloupnosti* $\{\varphi(x_n)\}$.

Věta (29 O B–C podmínce V 11.9.11)

Nechť (P_1, ϱ_1) *a* (P_2, ϱ_2) *jsou metrické prostory,* (P_2, ϱ_2) *je úplný,* $\varphi\colon P_1 \to P_2$ *a* $x_0 \in P_1$ *je hromadným bodem* D_φ. *Pak* $\lim_{x \to x_0} \varphi(x)$ *existuje právě tehdy, když zobrazení* φ *splňuje B–C podmínku*
$(\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \quad x, y \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \cap D_\varphi \Rightarrow \varrho_2(\varphi(x), \varphi(y)) < \varepsilon)$.

Věta (30 O spojitosti složeného zobrazení V 11.9.12)

Nechť (P_1, ϱ_1), (P_2, ϱ_2) *a* (P_3, ϱ_2) *jsou metrické prostory,* $\varphi\colon P_1 \to P_2$ *a* $\psi\colon P_2 \to P_3$. *Je-li* φ *spojité v* $x_0 \in P_1$ *a* ψ *spojité v* $\varphi(x_0)$, *pak* $\psi \circ \varphi$ *je spojité v* x_0.

Věta (31 O limitě složeného zobrazení V 11.9.13)

Nechť (P_1, ϱ_1), (P_2, ϱ_2) *a* (P_3, ϱ_2) *jsou metrické prostory,* $\varphi\colon P_1 \to P_2$, $\psi\colon P_2 \to P_3$ *a* $x_0 \in P_1$. *Nechť* $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = y_0 \in P_2$, $\lim_{y\to y_0} \psi(y) = z_0 \in P_3$, x_0 *je hromadným bodem* $D_{\psi\circ\varphi}$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*
(i) *existuje prstencové okolí bodu* x_0, *kde vnitřní zobrazení* φ *nenabývá své limitní hodnoty* y_0
(ii) *vnější zobrazení* ψ *je spojité v bodě* y_0.
Pak $\lim_{x\to x_0} (\psi \circ \varphi)(x) = z_0$.

Věta (30 O spojitosti složeného zobrazení V 11.9.12)

Nechť (P_1, ϱ_1), (P_2, ϱ_2) *a* (P_3, ϱ_2) *jsou metrické prostory,* $\varphi\colon P_1 \to P_2$ *a* $\psi\colon P_2 \to P_3$. *Je-li* φ *spojité v* $x_0 \in P_1$ *a* ψ *spojité v* $\varphi(x_0)$, *pak* $\psi \circ \varphi$ *je spojité v* x_0.

Věta (31 O limitě složeného zobrazení V 11.9.13)

Nechť (P_1, ϱ_1), (P_2, ϱ_2) *a* (P_3, ϱ_2) *jsou metrické prostory,* $\varphi\colon P_1 \to P_2$, $\psi\colon P_2 \to P_3$ *a* $x_0 \in P_1$. *Nechť* $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = y_0 \in P_2$, $\lim_{y\to y_0} \psi(y) = z_0 \in P_3$, x_0 *je hromadným bodem* $D_{\psi\circ\varphi}$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*
(i) *existuje prstencové okolí bodu* x_0, *kde vnitřní zobrazení* φ *nenabývá své limitní hodnoty* y_0
(ii) *vnější zobrazení* ψ *je spojité v bodě* y_0.
Pak $\lim_{x\to x_0} (\psi \circ \varphi)(x) = z_0$.

Věta (32 O vzoru otevřených množin při spojitém zobrazení 11.9.21)

Mějme metrické prostory (P_1, ϱ_1) *a* (P_2, ϱ_2), $\varphi\colon P_1 \to P_2$ *a* $D_\varphi = P_1$. *Pak* φ *je spojité na* P_1 *právě tehdy, když pro každou otevřenou množinu* $A \subset P_2$ *je její vzor* $\varphi^{-1}(A)$ *otevřený.*

Věta (33 O obrazu kompaktní množiny při spojitém zobrazení V 11.9.27)

Nechť (P_1, ϱ_1) *a* (P_2, ϱ_2) *jsou metrické prostory,* $\varphi\colon P_1 \to P_2$, $D_\varphi = P_1$, $A \subset P_1$ *je kompaktní a* φ *je spojité na* A. *Pak* $\varphi(A)$ *je kompaktní.*

Věta (34 O nabývání extrémů spojitou funkcí V 11.9.18)

Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, *kde oba prostory bereme s obvyklými metrikami, je spojité na kompaktní množině* $A \subset \mathbb{R}^N$. *Pak zde nabývá svého maxima a minima (existují* $x_1, x_2 \in A$ *tak, že* $\max_A \varphi = \varphi(x_1)$ *a* $\min_A \varphi = \varphi(x_2)$*).*

Věta (32 O vzoru otevřených množin při spojitém zobrazení 11.9.21)

Mějme metrické prostory (P_1, ϱ_1) *a* (P_2, ϱ_2), $\varphi\colon P_1 \to P_2$ *a* $D_\varphi = P_1$. *Pak* φ *je spojité na* P_1 *právě tehdy, když pro každou otevřenou množinu* $A \subset P_2$ *je její vzor* $\varphi^{-1}(A)$ *otevřený.*

Věta (33 O obrazu kompaktní množiny při spojitém zobrazení V 11.9.27)

Nechť (P_1, ϱ_1) *a* (P_2, ϱ_2) *jsou metrické prostory,* $\varphi\colon P_1 \to P_2$, $D_\varphi = P_1$, $A \subset P_1$ *je kompaktní a* φ *je spojité na* A. *Pak* $\varphi(A)$ *je kompaktní.*

Věta (34 O nabývání extrémů spojitou funkcí V 11.9.18)

Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, *kde oba prostory bereme s obvyklými metrikami, je spojité na kompaktní množině* $A \subset \mathbb{R}^N$. *Pak zde nabývá svého maxima a minima (existují* $x_1, x_2 \in A$ *tak, že* $\max_A \varphi = \varphi(x_1)$ *a* $\min_A \varphi = \varphi(x_2)$*).*

Věta (32 O vzoru otevřených množin při spojitém zobrazení 11.9.21)

Mějme metrické prostory (P_1, ϱ_1) *a* (P_2, ϱ_2), $\varphi\colon P_1 \to P_2$ *a* $D_\varphi = P_1$. *Pak* φ *je spojité na* P_1 *právě tehdy, když pro každou otevřenou množinu* $A \subset P_2$ *je její vzor* $\varphi^{-1}(A)$ *otevřený.*

Věta (33 O obrazu kompaktní množiny při spojitém zobrazení V 11.9.27)

Nechť (P_1, ϱ_1) *a* (P_2, ϱ_2) *jsou metrické prostory,* $\varphi\colon P_1 \to P_2$, $D_\varphi = P_1$, $A \subset P_1$ *je kompaktní a* φ *je spojité na* A. *Pak* $\varphi(A)$ *je kompaktní.*

Věta (34 O nabývání extrémů spojitou funkcí V 11.9.18)

Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, *kde oba prostory bereme s obvyklými metrikami, je spojité na kompaktní množině* $A \subset \mathbb{R}^N$. *Pak zde nabývá svého maxima a minima (existují* $x_1, x_2 \in A$ *tak, že* $\max_A \varphi = \varphi(x_1)$ *a* $\min_A \varphi = \varphi(x_2)$*).*

Definice (25 Stejnoměrná spojitost)

Říkáme, že zobrazení $\varphi\colon P_1 \to P_2$, kde (P_1, ϱ_1) a (P_2, ϱ_2) jsou metrické prostory, je stejnoměrně spojité na $A \subset P_1$, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že $\forall x, y \in A$, $\varrho_1(x, y) < \delta$ je $\varrho_2(\varphi(x), \varphi(y)) < \varepsilon$.

Věta (35 Cantorova věta o stejnoměrné spojitosti V 11.9.14)

Nechť (P_1, ϱ_1), (P_2, ϱ_2) jsou metrické prostory, $\varphi\colon P_1 \to P_2$ je spojité na $A \subset P_1$ (vzhledem k A) a A je kompaktní. Pak je φ stejnoměrně spojité na A.

10.9 Limita a spojitost zobrazení na metrických prostorech VI

Definice (25 Stejnoměrná spojitost)

Říkáme, že zobrazení $\varphi\colon P_1 \to P_2$, kde (P_1, ϱ_1) a (P_2, ϱ_2) jsou metrické prostory, je stejnoměrně spojité na $A \subset P_1$, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že $\forall x, y \in A$, $\varrho_1(x, y) < \delta$ je $\varrho_2(\varphi(x), \varphi(y)) < \varepsilon$.

Věta (35 Cantorova věta o stejnoměrné spojitosti V 11.9.14)

Nechť (P_1, ϱ_1), (P_2, ϱ_2) jsou metrické prostory, $\varphi\colon P_1 \to P_2$ je spojité na $A \subset P_1$ (vzhledem k A) a A je kompaktní. Pak je φ stejnoměrně spojité na A.