Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 6.4.2022

10.2 Konvergence posloupnosti v metrickém prostoru I

Definice (6 Ekvivalentní normy a metriky D 11.2.6)

Nechť ϱ_1, ϱ_2 jsou metriky na P. Řekneme, že tyto metriky jsou *ekvivalentní*, jestliže existují $c_1, c_2 > 0$ takové, že na P platí

$$c_1 \varrho_1(x, y) \leq \varrho_2(x, y) \leq c_2 \varrho_1(x, y).$$

Analogicky se definují ekvivalentní normy podmínkou

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1.$$

Věta (2 Ekvivalentní metriky generují stejnou konvergenci V 11.2.9)

Nechť P je množina a ϱ_1, ϱ_2 jsou dvě ekvivalentní metriky na P. Pak pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset P$ a $x \in P$ platí

$$x_n \to x \text{ v metrice } \varrho_1 \qquad \iff \qquad x_n \to x \text{ v metrice } \varrho_2.$$

10.2 Konvergence posloupnosti v metrickém prostoru I

Definice (6 Ekvivalentní normy a metriky D 11.2.6)

Nechť ϱ_1, ϱ_2 jsou metriky na P. Řekneme, že tyto metriky jsou *ekvivalentní*, jestliže existují $c_1, c_2 > 0$ takové, že na P platí

$$c_1 \varrho_1(x, y) \leq \varrho_2(x, y) \leq c_2 \varrho_1(x, y).$$

Analogicky se definují ekvivalentní normy podmínkou

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1.$$

Věta (2 Ekvivalentní metriky generují stejnou konvergenci V 11.2.9)

Nechť P je množina a ϱ_1, ϱ_2 jsou dvě ekvivalentní metriky na P. Pak pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset P$ a $x \in P$ platí

$$x_n \to x \text{ v metrice } \varrho_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_n \to x \text{ v metrice } \varrho_2.$$

Věta (4 O vztahu konvergence v normě ke konvergenci po složkách V 11.2.10)

Nechť P je normovaný lineární prostor, $\{e_1, \dots, e_N\}$ je jeho báze, $x_n = \sum_{i=1}^N \alpha_i^n e_i$ a $x = \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i$, kde $\alpha_i^n, \alpha_i \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ pro $i \in \{1, \dots, N\}$ a pro $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$x_n \to x \qquad \iff \qquad \alpha_i^n \to \alpha_i \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Věta (5 O ekvivalenci norem v konečné dimenzi V 11.2.11)

Na konečnědimenzionálním lineárním prostoru jsou libovolné dvě normy ekvivalentní.

Věta (4 O vztahu konvergence v normě ke konvergenci po složkách V 11.2.10)

Nechť P je normovaný lineární prostor, $\{e_1, \dots, e_N\}$ je jeho báze, $x_n = \sum_{i=1}^N \alpha_i^n e_i$ a $x = \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i$, kde $\alpha_i^n, \alpha_i \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ pro $i \in \{1, \dots, N\}$ a pro $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$x_n \to x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha_i^n \to \alpha_i \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Věta (5 O ekvivalenci norem v konečné dimenzi V 11.2.11)

Na konečnědimenzionálním lineárním prostoru jsou libovolné dvě normy ekvivalentní.

10.3 Základní vlastnosti podmnožin metrického prostoru I

Definice (7 Okolí v metrickém prostoru D 11.3.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x_0 \in P$ a $\varepsilon > 0$. Množina

$$\mathcal{U}_\varepsilon(x_0) := \{x \in P\colon \varrho(x, x_0) < \varepsilon\}$$

se nazývá ε-ovým *okolím* bodu x_0. *Prstencové* ε-ové *okolí* bodu x_0 definujeme jako

$$\mathcal{P}_\varepsilon(x_0) := \mathcal{U}_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}.$$

Definice (8 Otevřená množina D 11.3.3)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Množina $G \subset P$ se nazývá *otevřená*, jestliže ke každému jejímu bodu existuje okolí, které leží v G.

Definice (9 Uzavřená množina D 11.3.3)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Množina $F \subset P$ se nazývá *uzavřená*, jestliže je doplňkem otevřené množiny.

10.3 Základní vlastnosti podmnožin metrického prostoru I

Definice (7 Okolí v metrickém prostoru D 11.3.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x_0 \in P$ a $\varepsilon > 0$. Množina

$$\mathcal{U}_\varepsilon(x_0) := \{x \in P \colon \varrho(x, x_0) < \varepsilon\}$$

se nazývá ε-ovým *okolím* bodu x_0. *Prstencové* ε-ové *okolí* bodu x_0 definujeme jako

$$\mathcal{P}_\varepsilon(x_0) := \mathcal{U}_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}.$$

Definice (8 Otevřená množina D 11.3.3)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Množina $G \subset P$ se nazývá *otevřená*, jestliže ke každému jejímu bodu existuje okolí, které leží v G.

Definice (9 Uzavřená množina D 11.3.3)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Množina $F \subset P$ se nazývá *uzavřená*, jestliže je doplňkem otevřené množiny.

10.3 Základní vlastnosti podmnožin metrického prostoru I

Definice (7 Okolí v metrickém prostoru D 11.3.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x_0 \in P$ a $\varepsilon > 0$. Množina

$$\mathcal{U}_\varepsilon(x_0) := \{x \in P \colon \varrho(x, x_0) < \varepsilon\}$$

se nazývá ε-ovým *okolím* bodu x_0. *Prstencové* ε-ové *okolí* bodu x_0 definujeme jako

$$\mathcal{P}_\varepsilon(x_0) := \mathcal{U}_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}.$$

Definice (8 Otevřená množina D 11.3.3)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Množina $G \subset P$ se nazývá *otevřená*, jestliže ke každému jejímu bodu existuje okolí, které leží v G.

Definice (9 Uzavřená množina D 11.3.3)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Množina $F \subset P$ se nazývá *uzavřená*, jestliže je doplňkem otevřené množiny.

10.3 Základní vlastnosti podmnožin metrického prostoru II

Věta (6 O sjednocení a průniku otevřených a uzavřených množin V 11.3.9)

Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřené, průnik konečného systému otevřených množin je otevřený. Průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřený, sjednocení konečného systému uzavřených množin je uzavřené.

Definice (10 Vnitřní, vnější a hraniční body D 11.3.13)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že bod $x_0 \in A$ je *vnitřním bodem* množiny A, jestliže existuje jeho okolí ležící v A. Bod $x_0 \in P$ se nazývá *vnějším* bodem množiny A, jestliže je vnitřním bodem jejího doplňku. Bod $x_0 \in P$ se nazývá *hraničním* bodem množiny A, jestliže není vnitřním ani vnějším bodem množiny A.

Množina všech vnitřních bodů se nazývá *vnitřek* množiny A a značí se A°.
Množina všech vnějších bodů se nazývá *vnějšek* množiny A, množina všech hraničních bodů se nazývá *hranice* množiny A a značí se ∂A. Množinu $\overline{A} := A \cup \partial A$ nazýváme *uzávěr* množiny A.

10.3 Základní vlastnosti podmnožin metrického prostoru II

Věta (6 O sjednocení a průniku otevřených a uzavřených množin V 11.3.9)

Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřené, průnik konečného systému otevřených množin je otevřený. Průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřený, sjednocení konečného systému uzavřených množin je uzavřené.

Definice (10 Vnitřní, vnější a hraniční body D 11.3.13)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že bod $x_0 \in A$ je *vnitřním bodem* množiny A, jestliže existuje jeho okolí ležící v A. Bod $x_0 \in P$ se nazývá *vnějším* bodem množiny A, jestliže je vnitřním bodem jejího doplňku. Bod $x_0 \in P$ se nazývá *hraničním* bodem množiny A, jestliže není vnitřním ani vnějším bodem množiny A.
Množina všech vnitřních bodů se nazývá *vnitřek* množiny A a značí se A°.
Množina všech vnějších bodů se nazývá *vnějšek* množiny A, množina všech hraničních bodů se nazývá *hranice* množiny A a značí se ∂A. Množinu $\overline{A} := A \cup \partial A$ nazýváme *uzávěr* množiny A.

10.3 Základní vlastnosti podmnožin metrického prostoru III

Věta (7 Charakterizace vnitřku a uzávěru pomocí inkluze V 11.3.15)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak A° je největší otevřená podmnožina A a $\overline{A}$ je nejmenší uzavřená nadmnožina A.

Věta (8 Charakterizace hranice pomocí okolí V 11.3.17)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak $x \in \partial A$ právě tehdy, když v každém jeho okolí leží alespoň jeden bod z A a alespoň jeden bod z $P \setminus A$.

Cvičení (Cvičení 11.3.18)

Sami si dokažte následující výsledky

$$A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}, \quad A \subset B \implies A^\circ \subset B^\circ, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A},$$
$$\overline{\{x\}} = \{x\}, \quad \partial A = \overline{A} \cap \overline{P \setminus A}, \quad A^\circ = A \setminus \overline{P \setminus A}, \quad (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ.$$

10.3 Základní vlastnosti podmnožin metrického prostoru III

Věta (7 Charakterizace vnitřku a uzávěru pomocí inkluze V 11.3.15)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak A° je největší otevřená podmnožina A a $\overline{A}$ je nejmenší uzavřená nadmnožina A.

Věta (8 Charakterizace hranice pomocí okolí V 11.3.17)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak $x \in \partial A$ právě tehdy, když v každém jeho okolí leží alespoň jeden bod z A a alespoň jeden bod z $P \setminus A$.

Cvičení (Cvičení 11.3.18)

Sami si dokažte následující výsledky

$$A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}, \quad A \subset B \implies A^\circ \subset B^\circ, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A},$$

$$\overline{\{x\}} = \{x\}, \quad \partial A = \overline{A} \cap \overline{P \setminus A}, \quad A^\circ = A \setminus \overline{P \setminus A}, \quad (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ.$$

10.3 Základní vlastnosti podmnožin metrického prostoru III

Věta (7 Charakterizace vnitřku a uzávěru pomocí inkluze V 11.3.15)

Nechť (P, ϱ) *je metrický prostor a* $A \subset P$*. Pak* A° *je největší otevřená podmnožina* A *a* $\overline{A}$ *je nejmenší uzavřená nadmnožina* A*.*

Věta (8 Charakterizace hranice pomocí okolí V 11.3.17)

Nechť (P, ϱ) *je metrický prostor a* $A \subset P$*. Pak* $x \in \partial A$ *právě tehdy, když v každém jeho okolí leží alespoň jeden bod z* A *a alespoň jeden bod z* $P \setminus A$*.*

Cvičení (Cvičení 11.3.18)

Sami si dokažte následující výsledky

$$A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}, \quad A \subset B \implies A^\circ \subset B^\circ, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A},$$

$$\overline{\{x\}} = \{x\}, \quad \partial A = \overline{A} \cap \overline{P \setminus A}, \quad A^\circ = A \setminus \overline{P \setminus A}, \quad (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ.$$

Definice (11 Izolovaný a hromadný bod množiny D 11.3.19)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Bod $x_0 \in A$ se nazývá *izolovaný bod* množiny A, jestliže má prstencové okolí neprotínající A. Bod $x_0 \in P$ se nazývá *hromadný bod* množiny A, jestliže každé jeho prstencové okolí protíná A. Množina všech hromadných bodů množiny A se nazývá *derivace* množiny A a značí se A'.

Věta (9 O vztahu hromadných a hraničních bodů V 11.3.22)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak

$$\partial A \setminus A = A' \setminus A \qquad a \qquad \partial A \cup A = A' \cup A = \overline{A}.$$

Definice (11 Izolovaný a hromadný bod množiny D 11.3.19)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Bod $x_0 \in A$ se nazývá *izolovaný bod* množiny A, jestliže má prstencové okolí neprotínající A. Bod $x_0 \in P$ se nazývá *hromadný bod* množiny A, jestliže každé jeho prstencové okolí protíná A. Množina všech hromadných bodů množiny A se nazývá *derivace* množiny A a značí se A'.

Věta (9 O vztahu hromadných a hraničních bodů V 11.3.22)

Nechť (P, ϱ) *je metrický prostor a* $A \subset P$. *Pak*

$$\partial A \setminus A = A' \setminus A \qquad a \qquad \partial A \cup A = A' \cup A = \overline{A}.$$

10.3 Základní vlastnosti podmnožin metrického prostoru V

Věta (10 Charakterizace uzavřené množiny V 11.3.23)

Nechť (P, ϱ) *je metrický prostor a* $A \subset P$*. Pak*

$$A \text{ je uzavřená} \iff A = \overline{A} \iff \partial A \subset A \iff A' \subset A.$$

Věta (11 Charakterizace hromadných bodů pomocí posloupností V 11.3.24)

Nechť (P, ϱ) *je metrický prostor a* $A \subset P$*. Pak*

$$x_0 \in A' \iff \exists \{x_n\} \subset A \setminus \{x_0\} \quad x_n \to x_0.$$

Věta (12 Charakterizace uzávěru pomocí posloupností V 11.3.25)

Nechť (P, ϱ) *je metrický prostor a* $A \subset P$*. Pak*

$$x_0 \in \overline{A} \iff \exists \{x_n\} \subset A \quad x_n \to x_0.$$

10.3 Základní vlastnosti podmnožin metrického prostoru V

Věta (10 Charakterizace uzavřené množiny V 11.3.23)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak

$$A \text{ je uzavřená} \iff A = \overline{A} \iff \partial A \subset A \iff A' \subset A.$$

Věta (11 Charakterizace hromadných bodů pomocí posloupností V 11.3.24)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak

$$x_0 \in A' \iff \exists \{x_n\} \subset A \setminus \{x_0\} \quad x_n \to x_0.$$

Věta (12 Charakterizace uzávěru pomocí posloupností V 11.3.25)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak

$$x_0 \in \overline{A} \iff \exists \{x_n\} \subset A \quad x_n \to x_0.$$

10.3 Základní vlastnosti podmnožin metrického prostoru V

Věta (10 Charakterizace uzavřené množiny V 11.3.23)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak

$$A \text{ je uzavřená} \iff A = \overline{A} \iff \partial A \subset A \iff A' \subset A.$$

Věta (11 Charakterizace hromadných bodů pomocí posloupností V 11.3.24)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak

$$x_0 \in A' \iff \exists \{x_n\} \subset A \setminus \{x_0\} \quad x_n \to x_0.$$

Věta (12 Charakterizace uzávěru pomocí posloupností V 11.3.25)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak

$$x_0 \in \overline{A} \iff \exists \{x_n\} \subset A \quad x_n \to x_0.$$

10.3 Základní vlastnosti podmnožin metrického prostoru VI

Věta (13 Charakterizace hranice pomocí posloupností V 11.3.26)

Nechť (P, ϱ) *je metrický prostor a* $A \subset P$*. Pak*

$$x_0 \in \partial A \qquad \iff \qquad \exists \{x_n\} \subset A, \{y_n\} \subset P \setminus A \quad x_n \to x_0, y_n \to x_0.$$

Věta (14 Charakterizace uzavřenosti pomocí posloupností V 11.3.27)

Nechť (P, ϱ) *je metrický prostor a* $A \subset P$*. Pak* A *je uzavřená právě tehdy, když každá konvergentní (v* P*) posloupnost prvků z* A *má limitu v* A*.*

10.3 Základní vlastnosti podmnožin metrického prostoru VI

Věta (13 Charakterizace hranice pomocí posloupností V 11.3.26)

Nechť (P, ϱ) *je metrický prostor a* $A \subset P$. *Pak*

$$x_0 \in \partial A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \{x_n\} \subset A, \{y_n\} \subset P \setminus A \quad x_n \to x_0, y_n \to x_0.$$

Věta (14 Charakterizace uzavřenosti pomocí posloupností V 11.3.27)

Nechť (P, ϱ) *je metrický prostor a* $A \subset P$. *Pak* A *je uzavřená právě tehdy, když každá konvergentní (v* P*) posloupnost prvků z* A *má limitu v* A.