Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 23.2.2022

Věta (3 O řešení rovnice $y' = g(y)$ V 8.4.1)

Nechť $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá a nenulová na $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$. Nechť G je primitivní funkce k $y \mapsto \frac{1}{g(y)}$ na (α, β). Pak na intervalu $G((\alpha, \beta))$ existuje inverzní funkce G^{-1} a každé maximální řešení v $\Omega = \mathbb{R} \times (\alpha, \beta)$ má tvar

$$y(x) = G^{-1}(x + C),$$

kde $C \in \mathbb{R}$, a je definováno na intervalu

$$I_C := \{x \in \mathbb{R} \colon \exists y \in (\alpha, \beta) \quad G(y) = x + C\} = \{x = z - C \colon z \in G((\alpha, \beta))\}.$$

Navíc každým bodem $(x_0, y_0) \subset \Omega$ prochází právě jedno maximální řešení (v Ω).

7.3.2 Rovnice $y' = g(y)$ II

Lemma (2 O slepování řešení T 8.4.5)

Nechť $g(a) = 0$*. Pokud je* $\lim_{y\to a+} G(y) = \alpha + C$ *je vlastní, potom lze řešení* $y = G^{-1}(x + C)$ *v bodě* $x = \alpha$ *napojit na konstantní řešení* $y = a$*, tedy* $y'_+(\alpha) = 0$*.*

Lemma (3 O nevlastní mezi definičního oboru řešení T 8.4.6)

Nechť funkce g *splňuje na okolí bodu* a *Lipschitzovu podmínku. Potom je* α *z předchozího lemmatu nevlastní.*

7.3.2 Rovnice $y' = g(y)$ II

Lemma (2 O slepování řešení T 8.4.5)

Nechť $g(a) = 0$. Pokud je $\lim_{y \to a+} G(y) = \alpha + C$ je vlastní, potom lze řešení $y = G^{-1}(x + C)$ v bodě $x = \alpha$ napojit na konstantní řešení $y = a$, tedy $y'_+(\alpha) = 0$.

Lemma (3 O nevlastní mezi definičního oboru řešení T 8.4.6)

Nechť funkce g splňuje na okolí bodu a Lipschitzovu podmínku. Potom je α z předchozího lemmatu nevlastní.

7.3.2 Rovnice $y' = f(x)g(y)$ I

Věta (4 O řešení rovnice se separovanými proměnnými V 8.4.8)

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je spojitá na* $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *a* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je spojitá a nenulová na* $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$*. Nechť* F *je primitivní funkce k* f *na* (a, b) *a* G *je primitivní funkce k* $y \mapsto \frac{1}{g(y)}$ *na* (α, β)*. Pak na intervalu* $G((\alpha, \beta))$ *existuje inverzní funkce* G^{-1} *a každé maximální řešení v množině* $\Omega := (a, b) \times (\alpha, \beta)$ *má tvar*

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C),$$

kde $C \in \mathbb{R}$*, a je definováno na otevřeném intervalu*

$$I := \{x \in (a, b) \colon \exists y \in (\alpha, \beta) \quad G(y) = F(x) + C\}.$$

Navíc každým bodem $(x_0, y_0) \in \Omega$ *prochází právě jedno maximální řešení (v* Ω*).*