Úvod do moderní teorie parciálních diferenciálních rovnic

RNDr. Miroslav Bulíček, Ph.D.
Doc. RNDr. Robert Černý, Ph.D.
Doc. RNDr. Oldřich John, CSc.
Prof. RNDr. Josef Málek, CSc., DSc.
Doc. Mgr. Milan Pokorný, Ph.D.
Doc. RNDr. Mirko Rokyta, CSc.
Doc. RNDr. Jana Stará, CSc.

11. června 2018

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Proč zavádíme pojem slabého řešení

„Neexistuje žádná obecná teorie zaměřená na řešitelnost všech PDR. Vzhledem k obrovské různorodosti jevů (geometrických, fyzikálních, stochastických), které jsou modelovány PDR–emi, takováto teorie těžko bude nalezena. Místo toho je výzkum zaměřen spíše na různé speciální typy PDR, které jsou důležité z pohledu aplikací, s nadějí, že náhled na původ těchto rovnic může dát cit pro jejich řešení.“

„V moderní teorii PDR je velké úsilí věnováno matematickým důkazům existence řešení různých PDR a nikoliv odvozování vzorečků pro tato řešení. To se může zdát zbytečné až bláznivé, leč matematici jsou jako teologové: považujeme existenci za základní vlastnost toho co studujeme. Avšak nemusíme, jako většina teologů, spoléhat vždy jen na víru samotnou.“
Lawrence C. Evans: Partial differential equations.

Předpokládáme, že čtenář je obeznámen alespoň se základy klasické teorie parciálních diferenciálních rovnic. Cílem této úvodní kapitoly je vysvětlit, proč je pojem klasického řešení nedostatečný a proč je přirozené ho nahradit pojmem slabého řešení. Z mnoha možných příkladů jsme vybrali následující.

- Na příkladu Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici ukážeme v Sekci 1.2.1, že klasické řešení úlohy vyžaduje *a priori* jistou hladkost dat úlohy. Pokud data tyto požadavky na hladkost nesplňují, je třeba zobecnit pojem řešení. My se vydáme jednou z možných cest, která nás přivede k pojmu slabého řešení, a která nám také vytyčí jak základní problémy, kterým se budeme v texty věnovat, a současně i požadavky na prostory funkcí, v nichž slabé řešení hledáme.

- V Sekcích 1.2.2 a 1.2.3 uvedeme dvě matematické oblasti, kde se (parciální) diferenciální rovnice vyskytují v slabé formulaci přirozeným způsobem. Jinak řečeno, slabé řešení parciální diferenciální rovnice (PDR) je v těchto oblastech prvotní pojem, zatímco klasické řešení je pojem odvozený, tedy spíše druhotný. Prvním příkladem jsou nutné podmínky existence kritických bodů funkcionálů jako jsou délka křivky, obsah plochy, celková energie částice a podobně. V klasické mechanice jsou kritickými body řešení Eulerových–Lagrangeových rovnic. Tyto rovnice jsou však objekt druhotný, neboť jsou odvozeny z podmínky:

  Gâteaux derivace funkcionálu v kritickém bodě je v libovolném směru nulová.

  To je ekvivalentní výroku, že kritický bod je slabým řešením Eulerových–Lagrangeových rovnic.

- Bilanční rovnice mechaniky kontinua formulovaná na libovolných „kulturních“ podmnožinách oblasti (takzvané kontrolní objemy), kterou těleso vyplňuje, je dalším příkladem problému, kde je slabé řešení prvotní pojem. Ukážeme totiž, že z bilancí (hmoty, energie, hybnosti) formulovaných na kontrolních objemech lze přímo získat pojem slabého řešení, aniž by bylo nutné formulovat bilanční rovnice klasickým způsobem.

1.2 Několik příkladů

1.2.1 Homogenní Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici

Vezměme omezenou otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ s hranicí $\partial\Omega$ a uvažujme následující úlohu[1]

$$-\Delta u = f \quad \forall x \in \Omega, \tag{1.2a}$$

$$u = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, \tag{1.2b}$$

[1]Připomeňme označení: Je-li $\vec{q} = \big(q_1, \dots, q_d\big)^T$ vektorová veličina (například tok tepla), pak rovnice

$$\operatorname{div} \vec{q} = f \quad \forall x \in \Omega \tag{1.1}$$

dává do rovnováhy tok veličiny $\vec{q}$ přes hranici $\partial\Omega$ a objemové zdroje veličiny f. Je-li tok $\vec{q}$ úměrný gradientu ∇u (to jest je lineárně závislý na ∇u), kde u je skalární funkce $u : \Omega \to \mathbb{R}$ (například teplota), pak z (1.1) plyne (1.2a), neboť po dosazení $\vec{q} = -\nabla u$ (teplo teče z teplejší kde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je daná funkce.

Klasickým řešením úlohy (1.2) rozumíme funkci $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$, která splňuje (1.2a) a (1.2b) bodově. Je-li u klasické řešení (1.2), pak nutně musí být $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Pokud však funkce f na pravé straně rovnice není spojitá (což může nastat při popisu nějakého fyzikálního problému), je zřejmě pojem klasického řešení nedostačující, neboť úlohy tohoto typu je potřeba matematicky zvládnout. Je tudíž nutné zavést obecnější definici řešení zadané úlohy a získat tak objekt, se kterým můžeme v takovýchto příkladech pracovat.

Předpokládejme, že

$$f \in L^2(\Omega), \tag{1.3}$$

vynásobme rovnici (1.2a) libovolnou funkcí $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ a zintegrujme výsledný vztah přes Ω. Dostaneme

$$-\int_\Omega \Delta u \; \varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f \varphi \,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Levou stranu rovnice upravíme pomocí Greenovy věty (přesněji řečeno podle jejího důsledku pojednávajícího o integraci per partes) a uvědomíme si, že integrál přes hranici $\partial\Omega$ je nulový, protože funkce φ má kompaktní nosič v Ω. Výsledkem je

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f \varphi \,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \; \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{1.4}$$

neboli

$$(\nabla u, \nabla \varphi)_{L^2(\Omega)} = (f, \varphi)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \varphi \; \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.5}$$

Mohli bychom pokračovat dále a přenést ještě jednu derivaci z u na φ. Touto cestou ale nepůjdeme, chceme totiž, aby prostor, ve kterém budeme hledat řešení, byl shodný (nebo alespoň blízký) prostoru, odkud budeme brát funkci φ. Speciálně se ptáme:

Otázka 1.2.1. Lze v rovnici (1.5) položit $\varphi = u$?

Pokud ano, pak z (1.2a) plyne

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x = (f, u)_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.6}$$

kde jsme v posledním kroku využili Hölderovu (či Cauchyovu–Schwartzovu) nerovnost.

Mysleme si, že

$$\exists c > 0, \; \forall u : \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.7}$$

neboli norma funkce je kontrolována normou gradientu. Toto obecně neplatí, jak lze snadno nahlédnout dosazením konstantních funkcí. V našem případě však víme, že platí $u|_{\partial\Omega} = 0$, což vylučuje všechny netriviální konstantní funkce. Otázka však zůstává:

Otázka 1.2.2. Pro jaké funkce lze očekávat platnost (1.7)?

Pokud platí (1.7), pak z (1.6) vyplývá

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Odsud a z předpokladu (1.3) pak plyne, že $\nabla u \in L^2(\Omega)$, což vede k přirozené definici prostoru

$$W^{1,2}(\Omega) = \left\{ v \; \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, d : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Ještě zavedeme prostor

$$W^{1,2}_0(\Omega) = \left\{ v \; \in W^{1,2}(\Omega) \mid \; v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Připomeňme, že pro funkce $v \in L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty]$, nemá smysl mluvit o hodnotách funkce na hranici, protože hranice $\partial\Omega$ je množina nulové (d-rozměrné) Lebesgueovy míry. Funkce z $W^{1,2}(\Omega)$ však tvoří podprostor v $L^2(\Omega)$ a kromě hodnot funkce lze něco říci i hodnotách jejích derivací — otázkou je, zda tato informace bude stačit k tomu, abychom mohli mluvit o hodnotách funkce na hranici. Bude tedy nutné vyřešit následující problém.

Otázka 1.2.3. Lze pro $v \in W^{1,2}(\Omega)$ mluvit o hodnotách na hranici? Pokud ano, v jakém smyslu?

Vraťme se ještě k Otázce 1.2.1. Z (1.5) plyne, že odpověď bude kladná, pokud je kladná odpověď na otázku:

Otázka 1.2.4. Jsou funkce s kompaktním nosičem husté $W^{1,2}_0(\Omega)$?

části do chladnější) do levé strany rovnice (1.1) dostaneme

$$\operatorname{div} \vec{q} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = -\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = -\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = -\Delta u.$$

Pokud ano, nazveme $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ slabým řešením úlohy (1.2) právě když $\forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ platí rovnost

$$(\nabla u, \nabla \varphi)_{L^2(\Omega)} = (f, \varphi)_{L^2(\Omega)} .$$

Zavedli jsme tedy pojem řešení, který vyžaduje méně informací o hladkosti funkcí (a to jak daných, tak hledaných). Užitím nové definice řešení okamžitě vyvstávají následující otázky.

1. Jak je to s existencí řešení a s jeho jednoznačností? Lze ukázat spojitou závislost řešení na datech úlohy? Pokud ano, v jaké metrice? Souhrnně se tyto otázky označují jako problém existence jednoznačnosti slabého řešení a jeho spojité závislosti na datech.

2. Lze získat dodatečnou informaci o hladkosti řešení v případech, kdy jsou data úlohy hladší, než je požadováno pro samotnou existenci? Za jakých podmínek na data bude slabé řešení řešením klasickým? Souhrnně se tyto otázky označují jako problém regularity slabého řešení.

Tyto základní problémy budeme v této učebnici zkoumat nejen pro motivační problém (1.2), ale především pro lineární a nelineární eliptické, později pak i parabolické a hyperbolické úlohy (viz příslušné kapitoly).

Poznamenejme, že problém existence a jednoznačnosti je lehčí než problém regularity, a to proto, že je založen na obecnějších pojmech, funkcích, atd, a pro lineární eliptické úlohy téměř vše vyřešíme Rieszovou větou o reprezentaci a jejím zobecněním.

Ještě dříve než se pustíme do otázek zabývajících se řešitelností parciálních diferenciálních rovnic ve slabém smyslu a kvalitativním chováním těchto řešení, zavedeme Sobolevovy prostory $W^{k,p}(\Omega)$ a budeme zkoumat jejich vlastnosti. Speciálně se zaměříme na otázku hustoty hladkých funkcí $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ v Sobolevových prostorech, otázku interpretace hodnot funkcí na hranici (věta o stopách), otázku souvislosti Sobolevových prostorů s jinými prostory funkcí (věty o spojitém a kompaktním vnoření) a konečně také otázku platnosti Poincarého–Friedrichsových nerovností (příkladem je nerovnost (1.7) uvedená výše).

1.2.2 Úlohy variačního počtu — nutné podmínky

Variační počet se zabývá studiem kritických bodů (tzv. extremál) funkcionálů, to jest zobrazení z Banachova[2] prostoru, obvykle nekonečné dimenze, do prostoru reálných čísel. Typicky je $\varphi : X \to \mathbb{R}$, kde X je prostor funkcí (například $\mathcal{C}^1((a,b))$, $\mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$ a podobně).

Připomeňme několik základních pojmů.

Definice 1.2.5 — Lokální maximum (minimum). Řekneme, že funkcionál $\varphi : X \to \mathbb{R}$ má v bodě $x_0 \in X$ lokální maximum (resp. minimum), pokud

$$\exists \delta > 0, \forall x \in U_\delta(x_0) : \varphi(x_0) \geq \varphi(x) \text{ (resp. } \varphi(x_0) \leq \varphi(x)),$$

kde $U_\delta(x_0) = \{x \in X | \, \|x - x_0\|_X < \delta\}$.

Definice 1.2.6 — Gâteaux derivace. Řekneme, že funkcionál $\varphi : X \to \mathbb{R}$ má v bodě $x_0 \in X$ Gâteaux derivaci, právě když $\forall h \in X$, $\|h\|_X = 1$ existuje limita

$$\delta\varphi(x_0; h) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(x_0 + th) - \varphi(x_0)}{t}.$$

Pokud je x_0 lokálním minimem (resp. maximem) funkcionálu φ, aneb x_0 je extremála funkcionálu φ, a pokud limita $\delta\varphi(x_0; h)$ existuje pro nějaké $h \in X$, pak nutně $\delta\varphi(x_0; h) = 0$. Speciálně, je-li φ Gâteaux diferencovatelná v bodě $x_0 \in X$, pak nutně

$$\forall h \in X : \delta\varphi(x_0; h) = 0. \tag{1.8}$$

Důkaz předchozího tvrzení je elementární. Označme $g_h(t) = \varphi(x_0 + th)$. Protože $g_h(t)$ má v bodě 0 lokální extrém, z teorie reálných funkcí plyne, že pokud existuje $g_h'(0)$, pak je $g_h'(0) = 0$. Avšak dle definice Gâteaux derivace je $g_h'(0) = \delta\varphi(x_0; h)$.

Uveďme několik příkladů úloh klasického variačního počtu.

Příklad 1.2.7 (Brachystochrona)**.** Buď

$$\gamma_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, x \in [0, a], \; y = f(x), \; y(0) = 0, \; y(a) = b\right\}$$

křivka spojující počátek souřadného systému s bodem $[a, b]$, která je zadaná jako graf funkce $y(x)$. Úloha o brachystochroně (úloha o křivce nejrychlejšího spádu) je problém nalézt takovou funkci y z přípustné třídy funkcí

$$Y = \left\{y \in \mathcal{C}^1((a, b)) \cap \mathcal{C}([a, b]) | \, y(0) = 0, y(a) = b\right\},$$

[2] Úplný normovaný lineární prostor.

která minimalizuje funkcionál

$$T[y] = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{b - y(x)}}\,\mathrm{d}x$$

udávající čas potřebný k tomu, aby se v homogenním gravitačním poli g dostal hmotný bod samospádem po křivce $y(x)$ ze startovní pozice $[a, b]$ do počátku souřadného systému.

Příklad 1.2.8 (Délka křivky)**.** Užijeme-li označení z předchozího příkladu, potom funkcionál

$$L[y] = \int_0^a \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

udává délku křivky zadané jako graf funkce $y(x)$. Úlohou je minimalizovat $L[y]$ na třídě přípustných křivek Y.

Příklad 1.2.9 (Minimální plocha)**.** Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nějaká (rozumná) množina a buď dána funkce $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$. Úloha o minimální ploše je problém nalézt takovou funkci $\omega : \Omega \to \mathbb{R}$, že ω minimalizuje funkcionál

$$A[u] = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\,\mathrm{d}x,$$

který udává obsah plochy popsané funkcí u, přičemž množina přípustných ploch je určena jako

$$Y = \left\{u \ \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}) |\ u\,|_{\partial\Omega} = g\right\}.$$

Prostory Y zavedené v Příkladech 1.2.7–1.2.9 ovšem nejsou lineární. V Příkladech 1.2.7 a 1.2.8 tedy volíme

$$X = \mathcal{C}^1((a, b)) \cap \mathcal{C}_0([a, b])$$

a kritický bod (extremálu) y hledáme ve tvaru

$$y(x) = y_0(x) + \xi(x), \tag{1.9}$$

kde $\xi \in X$ a $y_0 : [0, a] \to \mathbb{R}$ je nějaká hladká funkce splňující okrajové podmínky $y_0(0) = 0$ a $y_0(a) = b$. Podobně v Příkladu 1.2.9 volíme

$$X = \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$$

a kritický bod (extremálu) ω hledáme ve tvaru

$$\omega(x, y) = \omega_0(x, y) + \xi(x, y),$$

kde $\xi \in X$ a $\omega_0 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ je nějaká hladká funkce splňující okrajové podmínky $\omega_0|_{\partial\Omega} = g$.

Na Příkladu 1.2.8 ukážeme, že požadavek na nulovost Gâteaux derivace (1.8) odpovídá požadavku na nalezení slabého řešení Eulerových–Lagrangeových rovnic, samotné Eulerovy–Lagrangeovy rovnice (v klasické formulaci) jsou však v tomto případě druhotným pojmem, neboť jsou odvozeny za předpokladu vyšší hladkosti uvažovaných funkcí.

Pro libovolné $\varphi \in X$ platí

$$\begin{aligned}
\delta L(y_0 + \xi; \varphi) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_0^a \sqrt{1 + ((y_0(x) + \xi(x))' + t\varphi'(x))^2}\,\mathrm{d}x\Big|_{t=0} \\
&= \int_0^a \frac{(y'(x) + t\varphi'(x))\,\varphi'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x) + t\varphi'(x))^2}}\,\mathrm{d}x\Big|_{t=0} = \int_0^a \frac{y'(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Podmínku (1.8) v tomto konkrétním případě tedy přepíšeme jako

$$\forall\varphi \in \mathcal{C}^1((a, b)) \cap \mathcal{C}_0([a, b]) : \int_0^a \frac{y'(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}\,\mathrm{d}x = 0. \tag{1.10}$$

Teprve za dalšího předpokladu na hladkost uvažovaných funkcí, například pokud $\left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1+(y'(x))^2}}\right)' \in \mathcal{C}((a, b))$, dostáváme (po provedení integrace per partes) z předchozí rovnice vztah

$$\forall\varphi \in \mathcal{C}_0([a, b]) : -\int_0^a \left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}\right)' \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{1.11}$$

který již implikuje bodovou platnost Eulerovy–Lagrangeovy rovnice[3]

$$-\left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}\right)' = 0. \tag{1.12}$$

[3]Zde jsme využili platnost tvrzení: Je-li $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ a platí-li pro každé $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$ rovnost $\int_\Omega u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$, pak je $u = 0$ pro všechna $x \in \Omega$.

Je na místě se ptát, proč nenazveme slabým řešením rovnice (1.12) funkci $y \in \mathcal{C}^1((a,b)) \cap \mathcal{C}_0([a,b])$ splňující rovnost (1.10), a proč raději pracujeme s obecnějšími funkcemi[4]. Velice vážnou námitkou proti této konstrukci je skutečnost, že prostor $\mathcal{C}^1(\Omega)$ není úplný vzhledem k integrální normě $\|u\|_{\mathcal{C}^1(\Omega),\int} = \int_\Omega |u'(x)|\,\mathrm{d}x$, přičemž integrální norma je pro danou úlohu přirozená.

Je-li y ve tvaru (1.9), pak je funkce ξ ze zmíněného rozkladu vhodná testovací funkce v rovnosti (1.10). Položíme-li skutečně $\xi = \varphi$, dostaneme

$$\int_0^a \frac{y'(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1+(y'(x))^2}}\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^a \frac{(y'(x))^2}{\sqrt{1+(y'(x))^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{y'(x)y_0'(x)}{\sqrt{1+(y'(x))^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Tuto rovnost a skutečnost, že $\frac{|y'(x)|}{\sqrt{1+(y'(x))^2}} \le 1$, využijeme k odhadu

$$\begin{aligned}
\int_0^a |y'|\,\mathrm{d}x &= \int_0^a \frac{|y'|}{(1+|y'|^2)^{\frac14}}(1+|y'|^2)^{\frac14}\,\mathrm{d}x \\
&\le \frac12 \int_0^a \frac{|y'|^2}{\sqrt{1+|y'|^2}}\,\mathrm{d}x + \frac12 \int_0^a \sqrt{1+|y'|^2}\,\mathrm{d}x \\
&\le \frac12 \int_0^a \frac{|y'|}{\sqrt{1+|y'|^2}}|y_0'|\,\mathrm{d}x + \frac12 \int_0^a \sqrt{1+|y'|^2}\,\mathrm{d}x \\
&\le \frac12 \int_0^a |y_0'|\,\mathrm{d}x + \frac{a}{2} + \frac12 \int_0^a |y'|\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Celkově tedy dostáváme

$$\int_0^a |y'|\,\mathrm{d}x \le \int_0^a |y_0'|\,\mathrm{d}x + a, \tag{1.13}$$

což ukazuje, že L^1-norma derivace je norma přirozená pro danou úlohu.

Na závěr ještě uvedeme tvrzení spojující tuto a předchozí sekci.

Lemma 1.2.10 — Variační formulace Laplaceovy rovnice. Funkce $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ je extremálou (lokálním minimem funkcionálu)

$$\phi[u] = \frac12 \int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f u\,\mathrm{d}x,$$

právě když u je slabým řešením úlohy (1.2), to jest splňuje rovnost (1.4).

Důkaz. i) Je-li $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ extremálou funkcionálu ϕ, pak nutně $\delta\phi(u;\varphi) = 0$ pro všechna $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Avšak

$$\begin{aligned}
\phi[u+t\varphi] = \frac12 \int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f u\,\mathrm{d}x + t\left\{\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi - f\varphi\,\mathrm{d}x\right\} \\
+ \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Odsud snadno plyne, že

$$\delta\phi(u;\varphi) = (\nabla u, \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)} - (f,\varphi)_{L^2(\Omega)},$$

čímž je jedna implikace dokázána.

ii) Naopak, použitím (1.14) s $t = 1$ snadno nahlédneme, že (1.4) implikuje

$$\phi[u+\varphi] \ge \phi[u] \qquad \forall\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

■

1.2.3 Bilanční rovnice mechaniky kontinua

Rovnice, které popisují pohyb tělesa v rámci termodynamiky kontinua, vychází z bilančních zákonů, jejichž platnost je požadována pro každou otevřenou pod-množinu $\mathcal{B}$ oblasti Ω vyplněné materiálem. Obecná formulace těchto bilančních vztahů má pak tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{\mathcal{B}} D(t,x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\mathcal{B}} \vec{F}(t,x)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{B}} P(t,x)\,\mathrm{d}x, \tag{1.15}$$

kde D značí hustotu fyzikální veličiny (hmoty, složek vektoru hybnosti, složek vektoru momentu hybnosti, entropie, celkové energie), $\vec{F}$ je odpovídající tok této veličiny hranicí a P je objemová produkce příslušné veličiny.

[4] Prvním kandidátem na vhodný prostor funkcí by mohl být Sobolevův prostor $W^{1,1}((0,a)) = \{u \in L^1((0,a)), u' \in L^1((0,a))\}$ nebo spíše prostor funkcí s omezenou variací.

Ze všech bilančních vztahů si pro lepší představu o tvaru funkcí D, $\vec{F}$ a P uveďme bilanci hmoty

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{\mathcal{B}}\rho(t,x)\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\mathcal{B}}\rho(t,x)\vec{v}(t,x)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=0, \tag{1.16}$$

bilanci hybnosti

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{\mathcal{B}}\rho(t,x)\vec{v}(t,x)\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\mathcal{B}}\left(\rho(t,x)\vec{v}(t,x)\otimes\vec{v}(t,x)-\mathbb{T}(t,x)\right)\vec{n}\,\mathrm{d}S$$
$$=\int_{\Omega}\rho(t,x)\vec{b}(t,x)\,\mathrm{d}x \tag{1.17}$$

a bilanci celkové energie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{\mathcal{B}}\rho(t,x)\left(\frac{|\vec{v}(t,x)|^2}{2}+e(t,x)\right)\mathrm{d}x$$
$$+\int_{\partial\mathcal{B}}\left(\rho(t,x)\left(\frac{|\vec{v}(t,x)|^2}{2}+e(t,x)\right)\vec{v}(t,x)-\vec{q}(t,x)-\mathbb{T}(t,x)\vec{v}(t,x)\right)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$
$$=\int_{\Omega}\left(\rho(t,x)\vec{b}(t,x)\cdot\vec{v}(t,x)+\rho(t,x)r(t,x)\right)\mathrm{d}x. \tag{1.18}$$

Standardní postup odvození rovnic termomechaniky kontinua je založen na přepisu (1.15) pomocí Greenovy věty a záměny derivace a integrálu do tvaru

$$\int_{\mathcal{B}}\left(\partial_t D+\operatorname{div}\vec{F}-P\right)(t,x)\,\mathrm{d}x=0,$$

kde $\mathcal{B}\subset\overline{\mathcal{B}}\subset\Omega$ je libovolný kontrolní objem. Za předpokladu, že integrand je spojitý, pak z předchozí rovnosti plyne, že $\forall x\in\Omega$, $\forall t\in(0,T)$ platí

$$\partial_t D(t,x)+\operatorname{div}\vec{F}(t,x)=P(t,x). \tag{1.19}$$

Je zřejmé, že (1.19) vyžaduje diferencovatelnost funkcí, která není v (1.15) potřeba. Slabá formulace bilančních zákonů se pak „obvykle“ odvozuje z (1.19) a okrajových podmínek.

Naším cílem je ukázat, že obecná forma bilančního zákona (1.15) přímo implikuje slabou formulaci. K tomu budeme potřebovat následující tvrzení, jehož důkaz lze nalézt například v Evans and Gariepy [1992] či Lukeš and Malý [1995].

Věta 1.2.11 Buď $\eta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ lipschitzovská funkce a buď $v\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Pak platí

- $v|_{\{x\in\mathbb{R}^n|\ \eta(x)=r\}}$ je integrovatelná ve smyslu $(n-1)$ rozměrné plošné (Hausdorffovy) míry,
- $\int_{\mathbb{R}^n} v(x)\,|\nabla\eta(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\{x\in\mathbb{R}^n|\ \eta(x)=r\}}v(x)\,\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}r.$

Nyní sledujeme postup navržený v knize Feireisl [2004]. Buď η nezáporná nekonečně spojitě diferencovatelná funkce s kompaktním nosičem, tedy $\eta\in\mathcal{D}(\Omega)$, $\eta\geq 0$. Pak množina $\{x\in\Omega|\ \eta(x)>r\}$ má pro skoro všechna $r\in[0,+\infty)$ hladkou hranici $\{x\in\Omega|\ \eta(x)=r\}$. Uvažujme nyní obecnou formu bilančního zákona (1.15) s kontrolním objemem $\mathcal{B}=\{x\in\Omega|\ \eta(x)>r\}$ pro $r\in(0,+\infty)$ a zintegrujme bilanční zákon s takto zvoleným objemem od 0 k $+\infty$. Máme (uvědomme si, že vnější jednotkový normálový vektor k množině $\{x\in\Omega|\ \eta(x)=r\}$ je $-\frac{\nabla\eta}{|\nabla\eta|}$)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_0^{+\infty}\int_{\mathcal{B}=\{x\in\Omega|\ \eta(x)>r\}}D(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r$$
$$-\int_0^{+\infty}\int_{\partial\mathcal{B}=\{x\in\Omega|\ \eta(x)=r\}}\vec{F}(t,x)\cdot\frac{\nabla\eta(x)}{|\nabla\eta(x)|}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}r$$
$$=\int_0^{+\infty}\int_{\mathcal{B}=\{x\in\Omega|\ \eta(x)>r\}}P(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r.$$

Využijeme-li nyní k úpravě druhého členu Větu 1.2.11 a první a třetí člen přepíšeme pomocí následujícího mezivýpočtu ($h(t,x)=D(t,x)$ popřípadě $h(t,x)=P(t,x)$)

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathcal{B}=\{x\in\Omega|\ \eta(x)>r\}}h(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r=\int_0^{+\infty}\int_{\Omega}\operatorname{sign}\left(\eta(x)-r\right)^+h(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r$$
$$=\int_{\Omega}h(t,x)\int_0^{+\infty}\operatorname{sign}\left(\eta(x)-r\right)^+\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x=\int_{\Omega}h(t,x)\eta(x)\,\mathrm{d}x,$$

dostaneme pro libovolné η

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_\Omega D(t,x)\eta(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \vec{F}(t,x)\cdot\nabla\eta(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega P(t,x)\eta(x)\,\mathrm{d}x,$$

což implikuje platnost (1.19) ve smyslu distribucí.

Kapitola 2

Sobolevovy prostory

V předchozí kapitole jsem viděli, že klasické řešení pro rozličné typy parciálních diferenciálních rovnic nemusí vždy existovat. Na druhou stranu však z příkladů uvedených v předchozí části vyplynulo, že i v těchto situacích se dá hovořit o zobecněném pojmu řešení, které v dalším textu budeme označovat jako **slabé řešení**. K rigoróznímu zavedení tohoto pojmu ale nejdříve potřebujeme vybudovat teorii prostorů funkcí, tzv. Sobolevových prostorů $W^{k,p}(\Omega)$, které hrají v moderní teorii parciálních diferenciálních rovnic stěžejní roli.

V této kapitole předpokládáme, že je čtenář obeznámen se základy teorie Lebesgueova integrálu a Lebesgueových prostorů, s teorií prostorů spojitých, spojitě diferencovatelných a hölderovsky spojitých funkcí. Pro úplnost uvádíme zkrácený přehled vlastností těchto prostorů funkcí v příloze A. Dále pak předpokládáme, že čtenář je dostatečně obeznámen se základy funkcionální analýzy, jejíž stručný přehled je v příloze B.

2.1 Definice, základní vlastnosti

Připomeňme nejdříve definici multiindexu.

Značení 2.1.1 (Multiindex)**.** Uspořádanou d–tici $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, nazýváme multiindex. Výšku multiindexu značíme $|\alpha|$ a definujeme ji jako $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$.

V dalším také budeme využívat následující zkrácený zápis pro parciální derivace.

Značení 2.1.2 (Zápis parciálních derivací užitím multiindexu)**.** Symbolem $D^\alpha \phi$ značíme parciální derivaci funkce ϕ

$$D^\alpha \phi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\phi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ \dots \ \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Nyní již můžeme přistoupit k definici základního pojmu v moderní teorii parciálních diferenciálních rovnic[1].

Definice 2.1.3 — Slabá derivace. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená (případně i neomezená) množina a $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ multiindex. Buď $u, v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$. řekneme, že v_α je slabá derivace funkce u podle x^α, právě když pro každou $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ platí

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \phi(x) \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_\alpha(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Následující vlastnosti slabé derivace jsou více méně zřejmé.

Lemma 2.1.4 — Souvislost slabé a klasické derivace I. Platí následující tvrzení:

1. Nechť $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$. Potom pro každé $|\alpha| \le k$ klasická a slabá derivace splývají.

[1] Slabá derivace je speciální případ obecnějšího pojmu — distributivní derivace. Je-li $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, můžeme funkci u přiřadit regulární distribuci T_u definovanou jako

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega): \ \langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ značí dualitu mezi $\left(\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)\right)^\star$ a $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Každou distribuci můžeme libovolněkrát derivovat. Distribuce G je derivace distribuce T podle x^α, právě když

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega): \ \langle T, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle G, \varphi \rangle .$$

Speciálně, jsou-li $G = G_v$ a $T = T_u$ regulární distribuce, je zřejmě

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega): \ \int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle T_u, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle G_v, \varphi \rangle = \int_\Omega v(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

tedy $v = D^\alpha u$ ve slabém smyslu.

2. Slabá derivace je (ve smyslu rovnosti na $L^1_{loc}(\Omega)$, tedy skoro všude) určena jednoznačně.

Důkaz. Důkaz tohoto tvrzení přenecháváme čtenáři jako užitečné cvičení. ■

Poznámka 2.1.5. Pokud je klasická derivace spojitá, je už nutně rovna derivaci slabé. Proto je budeme nadále značit stejně, tj. je-li v_α slabá derivace u podle x^α, budeme psát $D^\alpha u = v_\alpha$.

Konečně přistoupíme k základní definici této kapitoly.

Definice 2.1.6 — Sobolevovy prostory. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina, $k \in \mathbb{N}$ a $p \in [1,\infty]$. Sobolevův prostor $W^{k,p}(\Omega)$ definujeme jako

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega);\ \forall|\alpha| \leq k\colon\ D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}.$$

Tento prostor opatříme normou

$$\|u\|_{k,p} \equiv \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p \in [1,\infty), \\ \max\limits_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{pro } p = \infty. \end{cases}$$

V definici normy se používá dvojí možné značení. Pokud bude z kontextu jasné, na jaké množině je prostor definován, budeme nadále používat zkrácené značení $\|\cdot\|_{k,p}$. Pokud by však mohla hrozit nejednoznačnost, budeme vždy uvádět $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$. Analogicky jako v případě $L^p(\Omega)$ prostorů jsou prvky $W^{k,p}(\Omega)$ vlastně třídy funkcí lišících se na množině míry nula.

Poznámka 2.1.7. Velmi často se v definici Sobolevových prostorů používá $k \in \mathbb{N}_0$, tj. připouští se i hodnota $k = 0$. V tom případě Sobolevův prostor ztotožníme s prostorem Lebesgueovým, tedy

$$W^{0,p}(\Omega) := L^p(\Omega).$$

Poznámka 2.1.8. Velmi často se také používá zkrácený zápis pro parciální derivace u. Pro $u \in W^{k,p}(\Omega)$, definujeme pro $m = 1,\dots,k$ vektor (tenzor m-tého řádu) $\nabla^m u : \Omega \to \mathbb{R}^{d^m}$ pomocí

$$[\nabla^m u]_{i_1\cdots i_m} := \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_m}}, \qquad \text{kde } i_l = 1,\dots,d.$$

Pokud $m = 1$, zkracujeme zápis na $\nabla u := \nabla^1 u$.

Korektnost Definice 2.1.6 je shrnuta v následují větě.

Věta 2.1.9 Prostor $W^{k,p}(\Omega)$ je normovaný lineární prostor.

Důkaz. $W^{k,p}(\Omega)$ je zřejmě lineární prostor (viz Cvičení 2.1.10). V následujícím tedy ověříme, že $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ je norma. Budeme se zabývat důkazem pro $p \in [1,\infty)$, důkaz pro $p = \infty$ přenecháváme čtenáři jako užitečné cvičení. Ověříme postupně, že $\|u\|_{k,p}$ splňuje všechny potřebné vlastnosti normy.

i) Pro každé $u \in W^{k,p}(\Omega)$ zřejmě platí

$$0 \leq \|u\|_{k,p} < \infty.$$

Navíc pokud je $\|u\|_{k,p} = 0$, nutně platí $\|u\|_p = 0$, a proto (vlastnost $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ normy) je i $u \equiv 0$. Obrácená implikace je zřejmá. Platí tedy, že

$$u \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|u\|_{k,p} = 0.$$

ii) Pro slabou derivaci platí $D^\alpha(\lambda u) = \lambda D^\alpha u$ (viz Cvičení 2.1.10), dále pak $\|\lambda D^\alpha u\|_p = |\lambda|\|D^\alpha u\|_p$. Celkem tedy máme

$$\begin{aligned}\|\lambda u\|_{k,p} &= \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha(\lambda u)\|^p_p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|^p_p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\lambda|\|u\|_{k,p},\end{aligned}$$

čímž jsme ověřili, že navrhovaná norma je pro kladné konstanty homogenní.

iii) Slabá derivace je zřejmě lineární $D^\alpha(u+v) = D^\alpha u + D^\alpha v$ (viz Cvičení 2.1.10) a pro L^p-normu platí Minkowského (trojúhelníková) nerovnost (viz Větu A.3.9)

$$\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Navíc platí „diskrétní“ Minkowského nerovnost, tj. pro každé kladné $\{a_n, b_n\}_{n=1}^m$ platí

$$\left(\sum_{n=0}^m (a_n + b_n)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=0}^m a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=0}^m b_n^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Použitím této nerovnosti tedy dostáváme

$$\|u+v\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{|\alpha|\le k} \left(\|D^\alpha u\|_p + \|D^\alpha v\|_p\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{k,p} + \|v\|_{k,p}\,,$$

čímž jsme ověřili trojúhelníkovou nerovnost. Z i)–iii) tedy plyne, že $\|\cdot\|_{k,p}$ je norma. ■

Elementární vlastnosti slabé derivace jsou čtenáři ponechány za cvičení.

Cvičení 2.1.10 (Vlastnosti slabé derivace)**.** Ukažte, že pro libovolné dvě funkce $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$, kde $k \in \mathbb{N}$, a libovolný multiindex α splňující $|\alpha| \le k$ platí:

1. $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ a $D^\alpha(D^\beta u) = D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta}u$ kdykoliv $|\alpha| + |\beta| \le k$,
2. $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ a $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$ kdykoliv $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
3. je-li $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ otevřená, pak $u \in W^{k,p}(\widetilde{\Omega})$,
4. je-li $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, pak $\eta u \in W^{k,p}(\Omega)$ a platí, že
$$D^\alpha(\eta u) = \sum_{\{\beta:\, \forall i=1,\dots,n\ \beta_i \le \alpha_i\}} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \eta D^{\alpha-\beta} u,$$
kde $\binom{\alpha}{\beta} := \prod_{i=1}^d \binom{\alpha_i}{\beta_i}$.

Nyní uvedeme několik typických příkladů, které ilustrují, jaké funkce (ne)náleží do prostorů $W^{k,p}(\Omega)$. První příklad ukazuje, že sobolevovské funkce nemohou mít skok na $(d-1)$–dimenzionální nadploše.

Příklad 2.1.11. Funkce
$$u(x) := \begin{cases} x & \text{na } (0,1) \\ 2 & \text{na } [1,2) \end{cases}$$
není prvkem $W^{1,p}((0,2))$, protože slabá derivace, pokud by existovala, by musela být na intervalech $(0,1)$ a $(1,2)$ rovna klasické, tedy funkci
$$v(x) := \begin{cases} 1 & \text{na } (0,1) \\ 0 & \text{na } (1,2). \end{cases}$$
Tato funkce však není slabou derivací[2] u, ale je slabou derivací funkce
$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} x & \text{na } (0,1) \\ 1 & \text{na } [1,2). \end{cases}$$
Obecně: funkce, která má skokovou singularitu na $(d-1)$–rozměrné ploše, nemá slabou derivaci v $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Druhý příklad ukazuje typické chování u možné singularity.

Příklad 2.1.12. Buď $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^d$. Pak $u(x) := \frac{1}{|x|^\alpha} \in W^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow \alpha < \frac{d-p}{p}$. Vidíme, že i neomezené funkce patří do některých $W^{1,p}(\Omega)$. Všimněme si, že pro $\alpha < \frac{d-p}{p}$ je $u \in L^q(\Omega)$ pro každé $q \in [1, p^*)$, kde $p^* := \frac{dp}{d-p}$ (srovnejte s Větou o vnoření 2.5.1).

__Řešení__. Uvažujte funkci
$$u_i(x) := -\alpha \frac{x_i}{|x|^{\alpha+2}}$$
a ukažte, že $u_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x|^\alpha}$. Vyjděte z definice a uvažujte pro každou $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ (případně stačí i $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$)
$$-\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(0)} u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x$$
a na poslední integrál použijte integraci per partes (nyní je povolena neboť obě funkce jsou dostatečně hladké na $\Omega \setminus B_\varepsilon(0)$) a spočtěte limitu $\varepsilon \to 0_+$. □

Poslední příklad pak ilustruje fakt, že množina bodů ve kterých je sobolevovská funkce nespojitá, či dokonce neomezená, může být dokonce hustá v Ω.

[2] Funkce u má ovšem distributivní derivaci. Je jí funkcionál $\chi_{(0,1)} + \delta_1$, kde χ_I je charakteristická funkce intervalu I a δ_s je Diracova distribuce s nosičem v bodě s. Funkce u tak patří do prostoru BV, tj. do prostoru funkcí s omezenou variací.

Příklad 2.1.13. Nechť $\{r_k\}_{i=1}^{\infty}$ je spočetná hustá podmnožina v $B_1(0)$. Položme pro $x \in B_1(0)$

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x - r_i|^{-\alpha}.$$

Je-li $p < d$ a $\alpha \in (0, \frac{d-p}{p})$, potom $u \in W^{1,p}(B_1(0))$, ale není omezená na žádné otevřené podmnožině $B_1(0)$.

Základní důležité vlastnosti Sobolevových prostorů, jako úplnost, separabilita a reflexivita, jsou shrnuty v následující větě.

Věta 2.1.14 — O vlastnostech Sobolevových prostorů. Pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ a $p \in [1, \infty]$ je $W^{k,p}(\Omega)$ Banachův prostor. Pro $p \in [1, \infty)$ je $W^{k,p}(\Omega)$ separabilní a pro $p \in (1, \infty)$ reflexivní. Pro $p = 2$ je $W^{k,2}(\Omega)$ Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$(u, v)_{W^{k,2}(\Omega)} \equiv (u, v)_{k,2} := \sum_{\alpha \colon |\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) \, \mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

Důkaz. **Krok 1:** Úplnost
Cílem je ukázat, že každá cauchyovská posloupnost v $W^{k,p}(\Omega)$ má v $W^{k,p}(\Omega)$ limitu. Buď $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset W^{k,p}(\Omega)$ cauchyovská posloupnost, tj.

$$\forall \varepsilon > 0, \, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \, \forall n, m \ge n_0 : \; \|u_n - u_m\|_{k,p} < \varepsilon.$$

Z definice $\|\cdot\|_{k,p}$ nutně plyne, že pro každý multiindex α takový, že $|\alpha| \le k$, platí $\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_p < \varepsilon$. Cauchyovské jsou proto i posloupnosti $\{D^\alpha u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^p(\Omega)$. Prostory $L^p(\Omega)$ jsou úplné (viz Větu A.3.10), a proto existují limity

$$u_n \to u \qquad \text{v } L^p(\Omega), \tag{2.2}$$

$$D^\alpha u_n \to u_\alpha \qquad \text{v } L^p(\Omega). \tag{2.3}$$

Protože jsme každou limitu $D^\alpha u_n$ zkonstruovali zvlášť, není jisté, jestli bude platit $D^\alpha u = u_\alpha$. Zbývá ověřit právě zmíněné tvrzení. Především určitě platí, že $u_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ (neboť $u_\alpha \in L^p(\Omega)$), čímž jsme ověřili první vlastnost slabé derivace. Pro každé $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ pak dle definice slabé derivace platí

$$\int_\Omega u_n D^\alpha \phi \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_n \phi \, \mathrm{d}x.$$

Na obou stranách této rovnice nyní přejdeme s $n \to \infty$. Díky (2.2) pro levou stranu platí

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega u_n D^\alpha \phi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega u D^\alpha \phi \, \mathrm{d}x$$

a pro pravou stranu pak díky (2.3) obdržíme

$$\lim_{n \to \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_n \phi \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \phi \, \mathrm{d}x.$$

Nutně proto musí být $\int_\Omega u D^\alpha \phi \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \phi \, \mathrm{d}x$, což neznamená nic jiného, než že $D^\alpha u = u_\alpha$.

Krok 2: Reflexivita a separabilita
V důkazu reflexivnosti a separability využijeme známých poznatků o $L^p(\Omega)$ prostorech, viz Věty A.3.33 a A.3.36. Označme si $X = (L^p(\Omega))^\kappa$, kde κ je počet všech různých multiindexů o délce menší nebo rovné k. Prostor X je zřejmě reflexivní (pro $p \in (1, \infty)$) a separabilní (pro $p \in [1, \infty)$).

Dále definujeme zobrazení $I : W^{k,p}(\Omega) \to X$ jako[3]

$$I(u) = [D^\alpha u]_{|\alpha| \le k} = \left[u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_d}, \ldots \right].$$

Potom I je izomorfismus mezi $W^{k,p}(\Omega)$ a $I(W^{k,p}(\Omega)) \subset X$. Díky úplnosti prostoru $W^{k,p}(\Omega)$, viz Větu 2.1.14, je $I(W^{k,p}(\Omega))$ uzavřený podprostor X. Tedy dle Věty B.2.4 je $W^{k,p}(\Omega)$ separabilní pokud $p \in [1, \infty)$ a reflexivní, pokud $p \in (1, \infty)$.

Krok 3: Unitárnost
Na čtenáři necháváme ověření, že (2.1) je skalární součin. Díky úplnosti je tedy $W^{k,2}(\Omega)$ Hilbertův prostor. ∎

Na druhou stranu pro hodnoty $p = 1$ nebo $p = \infty$ Sobolevovy prostory (stejně jako Lebesgueovy) nejsou reflexivní respektive separabilní, jak uvádí další věta.

[3] Zobrazení I vytváří vektor všech možných parciálních derivací řádu nejvýše k.

Věta 2.1.15 — O nereflexivitě a neseparabilitě. Sobolevův prostor $W^{k,\infty}(\Omega)$ není separabilní a Sobolevovy prostory $W^{k,1}(\Omega)$ a $W^{k,\infty}(\Omega)$ nejsou reflexivní.

Důkaz. Důkaz prvního tvrzení je přenechán čtenáři, viz následující Cvičení 2.1.16. Druhé tvrzení lze nalézt např. v Kufner et al. [1977]. ■

Cvičení 2.1.16 ($W^{k,\infty}(\Omega)$ není separabilní)**.** Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a buď $\delta > 0$ takové, že $B_\delta(x_0) \subset \Omega$ pro jisté x_0. Uvažujte pro $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in B_\delta(x_0)$ funkce $\varphi_\xi = \min(1, |1 - \xi_1|)$. Ukažte, že φ_ξ je nespočetný systém funkcí z $W^{1,\infty}(\Omega)$ takový, že $\left\|\varphi_\xi - \varphi_{\widetilde{\xi}}\right\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \geq 1$ pro $\xi_1 \neq \widetilde{\xi}_1$.

V dalším zavedeme určité podprostory Sobolevových prostorů, jejichž prvky „jsou nulové" na hranici Ω. Tyto podprostory hrají důležitou roli při zavádění pojmu řešení některých okrajových úloh v teorii PDR stejně jako při rigorózním zdůvodnění integrace per partes pro sobolevovské funkce.

Definice 2.1.17 — Prostor $W_0^{k,p}(\Omega)$. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina, $p \in [1, \infty)$ a $k \in \mathbb{N}$. Označme

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}}.$$

Poznámka 2.1.18. Pokud bychom v definici připustili také případ $p = \infty$, dostali bychom prostor

$$\overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,\infty}} = \left\{u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) :\ \forall|\alpha| \leq k\, \forall x \in \partial\Omega\ D^\alpha u(x) = 0\right\},$$

což snadno nahlédneme z definice konvergence v normě $\|\cdot\|_{k,\infty}$.

Následující vztah mezi $W^{k,p}(\Omega)$ a $W_0^{k,p}(\Omega)$ přenecháváme čtenáři jako cvičení.

Cvičení 2.1.19. Ukažte, že $W_0^{k,p}(\Omega)$ je podprostor $W^{k,p}(\Omega)$. Zároveň ukažte, že $W^{k,p}(\Omega) \subsetneq W_0^{k,p}(\Omega)$ pro libovolnou otevřenou $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^d$.

Prostory $W_0^{k,p}(\Omega)$ sdílejí téměř všechny vlastnosti s $W^{k,p}(\Omega)$, což je uvedeno v následující větě.

Věta 2.1.20 — O vlastnostech prostorů $W_0^{k,p}(\Omega)$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $p \in [1, \infty)$ je $W_0^{k,p}(\Omega)$ Banachův prostor. Pro $p \in [1, \infty)$ je $W_0^{k,p}(\Omega)$ separabilní a pro $p \in (1, \infty)$ reflexivní.

Důkaz. Důkaz je, podobně jako důkaz Věty 2.1.14, založen na známých vlastnostech Lebesgueových prostorů $L^p(\Omega)$. Podrobnější důkaz je možno nalézt v Kufner et al. [1977]. ■

Konečně jako přímý důsledek definice odvodíme větu o integraci per partes pro prvky Sobolevových prostorů $W_0^{1,p}(\Omega)$ a $W^{1,p'}(\Omega)$.

Věta 2.1.21 — O integraci per partes I. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina, $k \in \mathbb{N}$ a $p \in [1, \infty)$. Potom pro každý multiindex α takový, že $|\alpha| \leq k$, pro každé $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ a každé[a] $v \in W^{k,p'}(\Omega)$ platí

$$\int_\Omega D^\alpha u\, v \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u\, D^\alpha v \,\mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

[a] Připomeňme, že $p' := \frac{p}{p-1}$ s konvencí, že pokud $p = 1$ pak $p' = \infty$.

Důkaz. S pomocí Hölderovy nerovnosti A.3.11 není těžké ověřit, že oba integrály v (2.4) jsou konečné. Dále z definice prostoru $W_0^{k,p}(\Omega)$ víme, že existuje posloupnost $\{u^n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ taková, že pro každý multiindex α, $|\alpha| \leq k$

$$D^\alpha u^n \to D^\alpha u \qquad \text{v } L^p(\Omega).$$

Protože navíc $D^\alpha v \in L^{p'}(\Omega)$, ihned obdržíme

$$\begin{aligned} \int_\Omega D^\alpha u\, v \,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega D^\alpha u^n\, v \,\mathrm{d}x, \\ \int_\Omega u\, D^\alpha v \,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u^n\, D^\alpha v \,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Konečně, přímo z definice slabé derivace (připomeňme, že $u^n \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$) odvodíme

$$\int_\Omega D^\alpha u^n\, v \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u^n\, D^\alpha v \,\mathrm{d}x$$

a dosazením této identity do (2.5) obdržíme (2.4). ■

Nakonec této kapitoly, inspirováni Definicí 2.1.17, zavedeme ještě alternativní prostory funkcí, které obdržíme jakožto uzávěr funkcí hladkých v příslušné sobolevovské normě.

Definice 2.1.22 — Zavedení Sobolevových prostorů jako uzávěr. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina, $p \in [1,\infty)$ a $k \in \mathbb{N}$. Prostor $\widetilde{W}^{k,p}(\Omega)$ definujme jako

$$\widetilde{W}^{k,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{k,p}}.$$

Poznámka 2.1.23. Analogicky jako v případě $W_0^{k,p}(\Omega)$ (viz Poznámku 2.1.18) nemá smysl definovat $\widetilde{W}^{k,\infty}(\Omega)$, protože bychom kvůli vlastnostem $\|\cdot\|_{k,\infty}$ dostali $\widetilde{W}^{k,\infty}(\Omega) = \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$.

Následující lemma shrnuje základní vlastnosti takto definovaného prostoru funkcí.

Lemma 2.1.24 — O vlastnostech prostorů $\widetilde{W}^{k,p}(\Omega)$. Buď $k \in \mathbb{N}$ a $p \in [1,\infty)$. Potom $\widetilde{W}^{k,p}(\Omega)$ je uzavřený (a tedy Banachův) podprostor $W^{k,p}(\Omega)$, který je separabilní a navíc pro $p \in (1,\infty)$ reflexivní. Speciálně tedy $\widetilde{W}^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$.

Důkaz. Důkaz uzavřenosti plyne přímo z definice. Ostatní vlastnosti se pak ukáží za pomoci Věty 2.1.14. Jejich důkaz je přenechán čtenáři jako užitečné cvičení. ■

Otázkou, kdy platí $\widetilde{W}^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$, se budeme zabývat v následující sekci. Platnost takového tvrzení však bude vyžadovat jisté předpoklady na kvalitativní vlastnosti Ω a nyní uvedeme pouze protipříklad takového tvrzení pro speciálně zvolenou (dostatečně „nehezkou“ otevřenou množinu Ω).

Cvičení 2.1.25 ($\widetilde{W}^{k,p}(\Omega) \neq W^{k,p}(\Omega)$)**.** Zadefinujte otevřenou omezenou $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ jako

$$\Omega := B_1(0) \setminus \{(x,0) : x \in [0,1)\}, \qquad \text{viz také Obr. 2.2 z Příkladu 2.2.12.}$$

Uvažujte funkci u definovanou

$$u(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \le 0, \\ 0 & \text{pokud } x > 0 \text{ a } y \ge 0, \\ x & \text{pokud } x > 0 \text{ a } y < 0. \end{cases}$$

Ukažte, že pro každé $p \in [1,\infty)$ platí $u \in W^{1,p}(\Omega)$, ale $u \notin \widetilde{W}^{1,p}(\Omega)$.

Nakonec poznamenejme, že zavedení Sobolevových prostorů pomocí Definice 2.1.6 není jedinou možností. V poslední sekci této kapitoly uvádíme pro úplnost alternativní, avšak zcela ekvivalentní zavedení pomocí tzv. Beppo Leviho prostorů.

2.2 Hustota hladkých funkcí

Cílem tohoto oddílu je ukázat, za jakých předpokladů na Ω můžeme funkce z prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ aproximovat v normě $\|\cdot\|_{k,p}$ funkcemi hladkými až do hranice (tím bude také zodpovězena otázka, kdy platí $\widetilde{W}^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$, viz Definici 2.1.22). Význam aproximace spočívá v tom, že některá tvrzení, která lze lehce ukázat pro hladké funkce, můžeme přenést i na funkce ze Sobolevových prostorů pomocí limitního přechodu.

Hlavním nástrojem bude, podobně jako pro funkce z Lebesgueových prostorů, vhodná regularizace (zhlazení) funkce, viz Větu A.3.32. Na rozdíl od Lebesgueových prostorů není zřejmé, že můžeme funkci z $W^{k,p}(\Omega)$ prodloužit nulou pro $x \notin \Omega$ tak, aby prodloužení stále patřilo do $W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$. Blíže se této problematice budeme věnovat v oddíle věnovaném operátoru rozšíření. Připomeňme nyní základní definici regularizace. V dalším textu bude η výhradně určeno pro zhlazovací jádro, tj. hladkou nezápornou radiálně symetrickou funkci s kompaktním nosičem v jednotkové kouli, jejíž střední hodnota (integrální průměr) je rovna jedné, viz též Definici A.3.27. Funkce $\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d}\eta(x/\varepsilon)$ pak značí její přeškálování a konečně pro $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ zavádíme zhlazení (regularizaci) u_ε jako (viz Definici A.3.29)

$$u_\varepsilon := \eta_\varepsilon \star u.$$

2.2.1 Lokální aproximace sobolevovských funkcí

Nejdříve se budeme zabývat lokální aproximací sobolevovských funkcí.

Věta 2.2.1 — O lokální aproximaci hladkými funkcemi. Buďte $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $p \in [1,\infty)$ a $u \in W^{k,p}(\Omega)$ libovolné. Dodefinujme u nulou vně Ω a označme $u_\varepsilon := \eta_\varepsilon \star u$ zhlazení funkce u. Potom platí

1. $D^\alpha u_\varepsilon = (D^\alpha u)_\varepsilon$ skoro všude v $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$,
2. $u_\varepsilon \to u$ v $W^{k,p}(\Omega')$ pro každou otevřenou $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$.

Důkaz. Počítejme podle definice

$$D^\alpha u_\epsilon(x) = D^\alpha \left(\int_{\mathbb{R}^d} \eta_\epsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y \right) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(D_x^\alpha \eta_\epsilon(x-y)\right) u(y)\,\mathrm{d}y.$$

Ověření předpokladů Věty o záměně derivace a integrálu je v tomto případě snadné, neboť η_ε je hladká funkce s kompaktním nosičem. Také jsme použili symbol D_x^α ke zdůraznění faktu, že derivaci chápeme podle proměné x. Nyní pro libovolné $x \in \Omega_\varepsilon$ využijeme skutečnosti, že pro každé $y \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ platí $\eta_\varepsilon(x-y) = 0$ a tedy pro tato x máme

$$\begin{aligned} D^\alpha u_\epsilon(x) &= \int_\Omega \left(D_x^\alpha \eta_\epsilon(x-y)\right) u(y)\,\mathrm{d}y = \int_\Omega \left((-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha \eta_\epsilon(x-y) \right) u(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_\Omega \eta_\epsilon(x-y) D_y^\alpha u(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} \eta_\epsilon(x-y) D_y^\alpha u(y)\,\mathrm{d}y = (D^\alpha u)_\varepsilon(x), \end{aligned}$$

kde jsme využili definice slabé derivace a faktu $\operatorname{supp} \eta_\varepsilon(x-y) \subset \Omega$. Tedy tvrzení 1 platí. Tvrzení 2 je už pak jednoduchý důsledek tvrzení 1 a vlastností zhlazení, viz bod 4 ve Větě A.3.32 aplikovaný postupně na všechny $D^\alpha u$ s $|\alpha| \le k$. ■

Tato věta, přestože hovoří pouze o lokální aproximaci, má několik netriviálních důsledků. Prvním z nich je přesná charakterizace $W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$.

Lemma 2.2.2 — Vztah $W_0^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ a $W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$. Buď $k \in \mathbb{N}$ a $p \in [1,\infty)$. Potom platí $W^{k,p}\left(\mathbb{R}^d\right) = W_0^{k,p}(\mathbb{R}^d)$.

Důkaz. Inkluze $W_0^{k,p}(\mathbb{R}^d) \subset W^{k,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$ je zřejmá a plyne přímo z definice prostoru $W_0^{k,p}(\mathbb{R}^d)$.

Nyní se soustředíme na opačnou inkluzi $W^{k,p}\left(\mathbb{R}^d\right) \subset W_0^{k,p}(\mathbb{R}^d)$. Máme ukázat, že pro každé $u \in W^{k,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$ existuje posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ tak, že $\|u-u_n\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

Není těžké ukázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje nezáporná funkce $\xi_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ taková, že $\xi_n = 1$ v $B_n(0)$, $\xi_n = 0$ v $\mathbb{R}^d \setminus B_{2n}(0)$ a splňující $\|\xi_n\|_{\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)} \le C(k,d)$, kde konstanta $C(k,d)$ nezávisí na n. Definujme si funkce $u_n := u\xi_n$. Díky výsledkům Cvičení 2.1.10 víme, že $u_n \in W^{k,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Navíc použitím bodu 4 z téhož cvičení ihned dostáváme odhad

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u - D^\alpha u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha u - D^\alpha(u\xi_n)|^p\,\mathrm{d}x \\ &\le (C(k,d))^p \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_n(0)} \sum_{\{\beta\colon |\beta| \le |\alpha|\}} |D^\beta u|^p\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Protože $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$, z výše uvedené nerovnosti vyplývá, že pro libovolné $\rho > 0$ můžeme najít $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\|u-u_n\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)} < \frac{\rho}{2}.$$

Nyní stačí funkci u_n, která již má na rozdíl od u kompaktní nosič $\operatorname{supp} u_n \subset B_{n+1}(0)$, zhladit podle Věty 2.2.1. Nebo-li, ke každému číslu $\rho > 0$, můžeme najít $\varepsilon_0 > 0$ tak, že pro každé $\varepsilon < \varepsilon_0$ platí

$$\|u_n - (u_n)_\varepsilon\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)} < \frac{\rho}{2}$$

a $(u_n)_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(B_{n+1+\varepsilon_0}(0)) \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Potom z trojúhelníkové nerovnosti dostáváme

$$\|u-(u_n)_\varepsilon\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)} \le \|u_n - (u_n)_\varepsilon\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)} + \|u-u_n\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)} < \rho,$$

což jsme chtěli ukázat. ■

Dalším, „intuitivně“ jasným důsledkem Věty o lokální aproximaci 2.2.1 je následující tvrzení o konstantnosti sobolevovských funkcí majících všechny slabé derivace prvního řádu nulové skoro všude.

Lemma 2.2.3 — O konstantních funkcích. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená souvislá množina, $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1,\infty]$ a $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$. Pak následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní.

1. u je konstantní skoro všude v Ω,
2. pro každý multiindex α délky jedna platí $D^\alpha u = 0$ skoro všude v Ω.

Důkaz. Implikace 1. $\Longrightarrow$ 2. plyne přímo z definice slabé derivace. V dalším se tedy budeme soustředit na důkaz 2. $\Longrightarrow$ 1. Buď $x_0 \in \Omega$ libovolný. Díky otevřenosti Ω existuje ε_0 tak, že $B_{2\varepsilon_0}(x_0) \subset \Omega$. Dodefinujme u nulou vně Ω a pomocí regularizátoru najděme zhlazení $u_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Použitím Věty 2.2.1 získáme, že pro každé $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ a každé $x \in \overline{B_\varepsilon(x_0)}$ platí

$$D^\alpha u_\varepsilon(x) = (D^\alpha u)_\varepsilon(x) \qquad \forall |\alpha| = 1.$$

Protože $D^\alpha u \equiv 0$ skoro všude, vidíme z definice $(D^\alpha u)_\varepsilon$, že díky volbě ε musí pro každé $x \in \overline{B_{\varepsilon_0}(x_0)}$ platit

$$D^\alpha u_\varepsilon(x) = (D^\alpha u)_\varepsilon(x) = 0.$$

Protože u_ε je hladká funkce, jejíž všechny první parciální (klasické) derivace jsou nulové, musí být nutně konstantní v $\overline{B_{\varepsilon_0}(x_0)}$. Protože $u \in W^{1,p}(\Omega)$, použitím vlastnosti 2 z Věty o vlastnostech regularizátoru (Věta A.3.32) dostáváme, že $const = u_\varepsilon \to u$ s.v. v $B_{\varepsilon_0}(x_0)$, tedy $u = const$ v $B_{\varepsilon_0}(x_0)$. Protože x_0 bylo libovolné a Ω je souvislá a otevřená, nutně musí platit tvrzení 1. z věty. ■

V předchozím lemmatu jsme si ukázali, že pokud má sobolevovská fukce nulový gradient na otevřené souvislé množině, pak je tam konstantní, přičemž obrácená implikace byla triviální. Nyní ukážeme, že pokud je funkce konstantní na **měřitelné** množině, pak už tam jsou všechny slabé derivace prvního řádu rovny nule skoro všude. To nám pak umožní vyslovit tvrzení o skládání lipschitzovských a sobolevovských funkcí[4]. Připomeňme, že χ_B značí charakteristickou funkci množiny B.

Věta 2.2.4 — O derivaci složené funkce. Buď Ω otevřená a $u \in W^{1,p}(\Omega)$ pro nějaké $p \in [1, \infty]$. Pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ označme

$$\Omega_a := \{x \in \Omega\colon\ u(x) = a\}.$$

Potom pro každé $i \in \{1, \dots, d\}$ platí, že $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ skoro všude na Ω_a.

Dále, buď $f \in \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R})$ taková, že $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Potom $f \circ u - f(0) \in W^{1,p}(\Omega)$ a platí

$$\frac{\partial f(u(x))}{\partial x_i} = f'(u(x)) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \chi_{\{x \in \Omega\colon u(x) \notin S_f\}} \qquad \text{skoro všude na } \Omega, \tag{2.6}$$

kde $S_f := \{s \in \mathbb{R}\colon\ \text{neexistuje klasická derivace } f'(s)\}$.

Poznamenejme, že dle Rademacherovy věty (Věta A.2.12) derivace f' existuje skoro všude v $\mathbb{R}$ a tedy množina S_f je množina nulové míry. Navíc pokud Ω je množina konečné míry, pak $f(0) \in W^{1,p}(\Omega)$ a tedy $f(u) \in W^{1,p}(\Omega)$. Konečně, jako snadný důsledek Věty 2.2.4, který je v podstatě částí důkazu, dostáváme následující tvrzení používané velmi často v teorii parciálních diferenciálních rovnic.

Důsledek 2.2.5. Buď $u \in W^{1,1}(\Omega)$ libovolná a označme $u^+ := \max(0, u)$ a $u^- := -\min(0, u)$. Pak pro všechna $i \in \{1, \dots, d\}$ a skoro všude v Ω platí, že slabé derivace splňují

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^+}{\partial x_i} &= \frac{\partial u}{\partial x_i} \chi_{\{x \in \Omega\colon u(x) > 0\}}, \\
\frac{\partial u^-}{\partial x_i} &= -\frac{\partial u}{\partial x_i} \chi_{\{x \in \Omega\colon u(x) < 0\}}, \\
\frac{\partial |u|}{\partial x_i} &= \operatorname{sign} u \frac{\partial u}{\partial x_i} \chi_{\{x \in \Omega\colon u(x) \neq 0\}}.
\end{aligned}$$

Důkaz Věty 2.2.4. Označme nejdříve $f_{Lip} := \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. Protože f je spojitá, $f(u)$ je měřitelná. Navíc, protože f je globálně lipschitzovská, máme

$$|f(u(x)) - f(0)| \le f_{Lip}|u(x) - 0| \le f_{Lip}|u(x)|.$$

Protože $u \in L^p(\Omega)$, nutně $f(u) - f(0) \in L^p(\Omega)$. Předpokládejme nyní, že $f(u)$ je sobolevovská a platí rovnost (2.6). Potom evidentně máme také, že $\|\frac{\partial f(u)}{\partial x_i}\|_p \le f_{Lip} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_p$ a tedy $(f(u) - f(0)) \in W^{1,p}(\Omega)$. Zbývá tedy ověřit platnost (2.6).

Začněme s případem, kdy je navíc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Chceme ukázat, že $f(u)$ má slabou derivaci a ta je určená dle formule (2.6). Buď $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ a u_ε regularizace u dle Věty 2.2.1 taková, že $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} \varphi, \partial\Omega) > 2\varepsilon$. Potom můžeme použít klasickou větu o derivaci složené funkce, vlastnost 1. z Věty 2.2.1 a po integraci per partes dostáváme

$$-\int_\Omega f(u_\varepsilon(x)) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f'(u_\varepsilon(x)) \frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_i} \varphi(x) \, \mathrm{d}x. \tag{2.7}$$

Nyní provedeme limitní přechod $\varepsilon \to 0_+$. Nejdříve se zaměříme na levou stranu. Protože $u_\varepsilon \to u$ v $L^1(\Omega \cap \operatorname{supp} \varphi)$ a f je globálně lipschitzovská, získáme díky Hölderově nerovnosti

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \to 0_+} \left| \int_\Omega \left(f(u_\varepsilon(x)) - f(u(x))\right) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x \right| \\
&\qquad \le f_{Lip} \|\varphi\|_{1,\infty} \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\Omega \cap \operatorname{supp} \varphi} |u_\varepsilon(x) - u(x)| \, \mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}$$

[4] Tyto vztahy se dají snadněji odvodit, pokud vyjdeme z ekvivalentní definice Sobolevových prostorů pomocí tzv. Beppo Leviho prostorů, jimž je věnována poslední sekce této kapitoly.

Pravou stranu (2.7) odhadneme

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega f'(u_\varepsilon(x))\frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_i}\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f'(u(x))\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_\Omega |f'(u_\varepsilon(x))|\left|\frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right||\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega |f'(u_\varepsilon(x)) - f'(u(x))|\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right||\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq f_{Lip}\|\varphi\|_\infty \int_{\Omega\cap\operatorname{supp}\varphi}\left|\frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|\mathrm{d}x \\
&\quad + \|\varphi\|_\infty \int_{\Omega\cap\operatorname{supp}\varphi} |f'(u_\varepsilon(x)) - f'(u(x))|\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

První člen jde k nule díky konvergenci $\nabla u_\varepsilon \to \nabla u$ v $L^1(\Omega\cap\operatorname{supp}\varphi)$. Pro konvergenci druhého členu si stačí uvědomit, že díky spojitosti f' a skoro všude konvergenci u_ε konverguje skoro všude i celý integrand. K limitnímu přechodu tedy můžeme použít Lebesgueovu větu o majorizované konvergenci (Věta A.3.3), neboť

$$|f'(u_\varepsilon(x)) - f'(u(x))|\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right| \leq 2f_{Lip}|\nabla u(x)| \in L^1(\Omega\cap\operatorname{supp}\varphi)$$

a našli jsme tedy integrovatelnou majorantu. Pro každou $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tedy máme

$$-\int_\Omega f(u(x))\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f'(u(x))\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.8}$$

což jsme chtěli ukázat.

Nyní se zaměříme na tvrzení, že $\nabla u = 0$ skoro všude na Ω_0. Uvažujme speciální funkci

$$f(x) := \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0, \end{cases}$$

tj. $f(u) := u^+$. Aproximujeme funkci f funkcemi

$$f_\varepsilon(x) := \begin{cases} \left(\varepsilon^2 + x^2\right)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Zřejmě $f_\varepsilon(u) \to u^+$ skoro všude na Ω a

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+} f'_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \leq 0, \end{cases}$$

z čehož ihned dostaneme

$$f'_\varepsilon(u) \to \chi_{\{x\in\Omega:\, u(x)>0\}} \text{ skoro všude.}$$

Použitím předchozího kroku ale máme, že

$$-\int_\Omega f_\varepsilon(u(x))\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f'_\varepsilon(u(x))\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nyní již díky skoro všude konvergenci $f'_\varepsilon(u)$ a $f_\varepsilon(u)$ a použitím Lebesguovy věty o majorizované konvergenci (Věta A.3.3) získáme

$$-\int_\Omega f(u(x))\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\varphi(x)\chi_{\{x\in\Omega:\, u(x)>0\}}\,\mathrm{d}x.$$

Tím je dokázán nejen vztah (2.6) pro speciální funkci f, ale i první ze vztahů z druhé části Důsledku 2.2.5. Navíc, díky rovnostem $u^- = (-u)^+$ a $|u| = u^+ + u^-$ okamžitě dostáváme platnost dalších vztahů z tohoto důsledku.

Konečně, protože $u = u^+ - u^-$, pak $\nabla u = \nabla u^+ - \nabla u^-$ skoro všude. Ale na množině Ω_0 je jak ∇u^+ tak ∇u^- rovný nule skoro všude. Tedy i $\nabla u = 0$ skoro všude na Ω_0. Navíc po přičtení libovolné konstanty, tj. když $\tilde{u} := u + c$, potom $\nabla\tilde{u} = \nabla u$ a tedy nutně musí platit, že $\nabla u = 0$ skoro všude na Ω_c a první část věty je tím dokázána.

Věnujme se nyní důkazu (2.6) pro obecné $f \in \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R})$. Díky vlastnostem zhlazení (viz Větu A.3.32) víme, že existují posloupnost $\varepsilon \to 0_+$ a posloupnost $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ takové, že[5]

$$\begin{aligned} f_\varepsilon &\rightrightarrows f && \text{na } \mathbb{R}, \\ f'_\varepsilon &\to f' && \text{skoro všude na } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

[5]K důkazu druhé konvergence je zapotřebí zkombinovat Rademacherovu větu (Věta A.2.12) a Větu o lokální aproximaci (Věta 2.2.1).

Navíc platí

$$|f_\varepsilon(x)| \le |f(x)| + C\varepsilon \qquad \text{a} \qquad \|f'_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le f_{Lip}.$$

Protože f_ε je hladká funkce, můžeme použít (2.8) a dostáváme

$$-\int_\Omega f_\varepsilon(u(x))\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f'_\varepsilon(u(x))\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.9}$$

Je tedy třeba provést limitní přechod pro $\varepsilon \to 0_+$. Ve členu na levé straně jde o stejný limitní přechod jako výše. Pro člen na pravé straně chceme opět využít Lebesgueovu větu o majorizované konvergenci (Věta A.3.3). Díky odhadu $\|f'_\varepsilon\|_\infty \le f_{Lip}$ není těžké najít majorantu a tedy nám zbývá ukázat, že

$$f'_\varepsilon(u(x))\nabla u(x) \to f'(u(x))\nabla u(x)\chi_{\{x\in\Omega:\, u(x)\notin S_f\}}$$

pro skoro všechna $x \in \Omega$. To je zřejmé, kdykoliv $u(x) \notin S_f$. Nechť naopak $a := u(x) \in S_f$. Pak již víme, že $\nabla u = 0$ skoro všude na Ω_a, a je snadné ověřit, že výše uvedená rovnost platí, protože S_f má nulovou míru. ■

Obecně složením dvou funkcí ze Sobolevových prostorů nevznikne funkce, která by opět patřila do Sobolevova prostoru.

Příklad 2.2.6. Uvažujme funkci $u(x) = x^3 \sin^3\left(\frac{1}{x}\right) \in W^{1,\infty}((-1,1))$ a funkci $f(z) = \sqrt[3]{z} \in W^{1,q}((-1,1))$ pro $q < \frac{3}{2}$. Potom funkce $(f\circ u)(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ dokonce nepatří ani do $W^{1,1}((-1,1))$.

2.2.2 Globální aproximace sobolevovských funkcí funkcemi z $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$

V této části si ukážeme, že Větu 2.2.1 lze podstatným způsobem zesílit tak, že aproximující posloupnost bude náležet do $\mathcal{C}^\infty(\Omega)\cap W^{k,p}(\Omega)$. Poznamenejme, že toto „zesílení“ se obejde bez jakýchkoliv dodatečných předpokladů na Ω, na druhou stranu však výsledek této části nic nenapoví o globální aproximaci pomocí $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ funkcí. Tomuto tématu bude věnována až další část.

K tomu, abychom mohli dokázat kýženou větu o aproximaci, budeme potřebovat následující lemma o rozkladu jednotky.

Lemma 2.2.7 — O rozkladu jednotky I. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina a $\{V_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ její (obecně nespočetné) otevřené pokrytí. Pak existuje spočetný systém funkcí $\{\varphi_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ takový, že platí

1. $\varphi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ pro všechna $j \in \mathcal{J}$,
2. pro každé $j \in \mathcal{J}$ existuje $i \in \mathcal{I}$, že $\operatorname{supp}\varphi_j \subset V_i$,
3. $0 \le \varphi_j \le 1$ pro všechna $j \in \mathcal{J}$,
4. pro každé $x \in \Omega$ je $\sum_{j\in\mathcal{J}}\varphi_j(x) = 1$ a navíc pro každý kompakt $K \subset \Omega$ je $\varphi_j \ne 0$ pouze pro konečně mnoho j.

Důkaz. Viz např. Yosida [1980]. ■

Nyní již můžeme přistoupit k hlavnímu výsledku této části.

Věta 2.2.8 — O aproximaci hladkými funkcemi na Ω. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená otevřená množina, $p \in [1,\infty)$ a $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Pak existuje posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega)\cap W^{k,p}(\Omega)$ taková, že $u_n \to u$ ve $W^{k,p}(\Omega)$.

Důkaz. **Krok 1:** definice pokrytí
Definujeme si množiny

$$\Omega_i := \left\{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) > \frac{1}{i}\right\},\ i \in \mathbb{N}.$$

Tyto množiny jsou otevřené, od určitého indexu i neprázdné, splňující $\Omega_k \subset \Omega_j \subset \overline{\Omega}_j \subset \Omega$ pro $j > k$ a $\Omega = \bigcup_{i=1}^\infty \Omega_i$. Dále si pro každé $i \in \mathbb{N}$ definujeme otevřené množiny

$$V_i := \Omega_{i+3}\setminus\overline{\Omega}_{i+1} = \left\{x \in \Omega : \frac{1}{i+3} < \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) < \frac{1}{i+1}\right\}.$$

Nyní vhodně dodefinujeme V_0 tak, aby tato množina byla otevřená, $\overline{V}_0 \subset \Omega$ a aby platilo $\Omega = \bigcup_{i=0}^\infty V_i$. Zjevně také platí, že $\overline{V}_i \subset \Omega$. Konečně, dle předchozího Lemmatu 2.2.7, sestrojíme k pokrytí $\{V_i\}_{i=0}^\infty$ rozklad jednotky $\{\varphi_i\}_{i=0}^\infty$.

Krok 2: vnitřní aproximace na V_i
Pro dané $u \in W^{k,p}(\Omega)$ a $i \in \mathbb{N}$ definujeme funkce $u_i := u\varphi_i$. Je zřejmé, že platí $u_i \in W^{k,p}(\Omega)$ a $\operatorname{supp} u_i \subset V_j \subset \Omega$ pro nějaké $j \in \mathbb{N}$ (v dalším pro každé i uvažujeme tato j). Nyní si zvolme libovolně $\rho > 0$. K tomuto číslu najdeme takové ε_i, že pro zhlazenou funkci $(u_i)_{\varepsilon_i} = \eta_{\varepsilon_i} \star (\varphi_i u)$ platí

$$\|u_i - (u_i)_{\varepsilon_i}\|_{W^{k,p}(V_j)} < \frac{\rho}{2^{i+1}};$$

to je jistě možné, stačí využít Větu o lokální aproximaci hladkými funkcemi (Věta 2.2.1). Toto ε_i ještě případně zmenšíme tak, aby „rozmazání“ funkce u_i bylo „malé“, přesněji aby platilo $\operatorname{supp}((u_i)_{\varepsilon_i}) \subset \Omega_{j+4} \setminus \overline{\Omega}_j$. Poznamenejme, že to je zcela jistě možné, neboť $\overline{V_j} \subset \Omega_{j+4} \setminus \overline{\Omega}_j$. Samozřejmě platí, že $(u_i)_{\varepsilon_i} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Krok 3: definice aproximující funkce
Definujeme

$$v := \sum_{i=0}^{\infty} (u_i)_{\varepsilon_i}.$$

Tato definice má smysl, neboť součet je vždy (rozumějte pro pevné $x \in \Omega$) konečný, protože pokrytí $\{V_i\}$, které jsme sestrojili, je lokálně konečné (viz vlastnost 4 z Lemmatu 2.2.7, tj. $\forall K \subset \Omega$, K kompaktní, je pouze konečně mnoho indexů j, pro které platí $\varphi_j \neq 0$). Samozřejmě platí, že[6] $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Krok 4: funkce v je dobrá aproximace
Zřejmě platí $u = u \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i$. Mějme nyní libovolnou otevřenou množinu $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$. Pak ovšem, díky kompaktnosti Ω',

$$\begin{aligned}
\|v - u\|_{W^{k,p}(\Omega')} &= \left\| \sum_{i=0}^{\infty} (u_i)_{\varepsilon_i} - u \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i \right\|_{W^{k,p}(\Omega')} \\
&\leq \sum_{i \in \mathbb{N}_0;\, V_{j(i)} \cap \Omega' \neq \emptyset} \|(u_i)_{\varepsilon_i} - u_i\|_{W^{k,p}(V_j)} < \rho \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \rho.
\end{aligned}$$

Díky spojité závislosti integrálu na integrační oblasti nyní stačí přejít k supremu přes všechny množiny Ω', tj., $\Omega' \nearrow \Omega$, a dostaneme

$$\|v - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \rho.$$

Z této nerovnosti ihned plyne, že $v \in W^{k,p}(\Omega)$, což dosud jasné nebylo. Nyní je navíc zcela zřejmé, že funkci u můžeme libovolně dobře (v závislosti na ρ) aproximovat funkcí $v \in W^{k,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ a tedy důkaz je hotov. ■

2.2.3 Globální aproximace sobolevovských funkcí funkcemi z $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$

V této části se pokusíme použít Větu 2.2.1 pro konstrukci posloupnosti funkcí hladkých až do hranice, která by v normě $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ aproximovala funkce z prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ (globálně, tj. až do hranice). Budeme tedy chtít ukázat, že $\widetilde{W}^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$. Jak jsme viděli ve Cvičení 2.1.25, tato rovnost obecně neplatí a je potřeba předpokládat další kvalitativní vlastnosti na Ω. Nejdříve se budeme zabývat speciální třídou oblastí, tzv. hvězdicovitých oblastí, pro kterou požadovanou rovnost ukážeme. Výhodou je, že důkaz je velice jednoduchý, a přesto obsahuje základní myšlenku, která nám umožní analogickou konstrukci pro oblasti mnohem obecnější.

Definice 2.2.9 — Hvězdicovitá oblast. řekneme, že otevřená množina $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je hvězdicovitá (vzhledem k bodu x_0) právě tehdy, když existuje bod $x_0 \in \Omega$ takový, že pro každé $x \in \Omega$ polopřímka vycházející z x_0 a procházející bodem x má s hranicí Ω společný právě jeden bod, tzn.

$$\left\{y \in \mathbb{R}^d : \exists \tau \in \mathbb{R}_+ \; y = \tau(x - x_0) + x_0\right\} \cap \partial\Omega \text{ obsahuje právě jeden bod.}$$

Příkladem hvězdicovité oblasti je například koule v $\mathbb{R}^d$ nebo, jak název napovídá, i rovinný útvar — symetrická hvězda. Připomeňme, že hvězdicovitá množina je nutně souvislá.

Věta 2.2.10 — O aproximaci až do hranice pro hvězdicovité oblasti. Buď Ω hvězdicovitá oblast a $u \in W^{k,p}(\Omega)$ pro $p \in [1, \infty)$. Pak existuje posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ taková, že $u_n \to u$ v $W^{k,p}(\Omega)$.

Důkaz. Hlavní myšlenka důkazu spočívá v tom, že pro hvězdicovité oblasti můžeme funkci u poměrně jednoduše „vysunout“ vně Ω a tuto „vysunutou“ funkci pak zhladit. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že oblast Ω je hvězdicovitá vůči počátku, tzn. $x_0 = 0$ (v obecném případě stačí provést substituci $y = x - x_0$). Naším cílem je ukázat, že pro libovolné $\rho > 0$ existuje $u_\rho \in \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ tak, že

$$\|u - u_\rho\|_{k,p} \leq \rho. \tag{2.10}$$

Krok 1: vysunutí
Pro $\tau \in (0, 1)$ definujme vysunutí funkce $u_\tau(x) := u(\tau x)$ a označme otevřenou množinu

$$\Omega_\tau := \left\{x \in \mathbb{R}^d : \; \tau x \in \Omega\right\}.$$

Navíc díky „hvězdicovitosti vzhledem k počátku“ platí, že pro každé $\tau \in (0, 1)$ je $\overline{\Omega} \subset \Omega_\tau$. Zřejmě je $u_\tau \in W^{k,p}(\Omega_\tau)$ (ověřte podrobně) a pro každé $x \in \Omega_\tau$ platí, že

$$D^\alpha(u_\tau)(x) = \tau^{|\alpha|} \left(D^\alpha u\right)_\tau (x).$$

[6] Na druhou stranu ale vidíme, že obecně neplatí $v \in \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$.

Díky tomu lze poměrně snadno ukázat, viz Cvičení A.3.26, že

$$u_\tau \to u \quad \text{ve } W^{k,p}(\Omega) \quad \text{pro } \tau \to 1_-. \tag{2.11}$$

Použitím trojúhelníkové nerovnosti tedy dostaneme

$$\begin{aligned}\|D^\alpha (u-u_\tau)\|_{L^p(\Omega)} &= \left\| D^\alpha u - \tau^{|\alpha|}(D^\alpha u)_\tau \right\|_{L^p(\Omega)} \\ &= \left\| (D^\alpha u - (D^\alpha u)_\tau) + (1-\tau^{|\alpha|})\,(D^\alpha u)_\tau \right\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le \left(1-\tau^{|\alpha|}\right) \|(D^\alpha u)_\tau\|_{L^p(\Omega)} + \|D^\alpha u - (D^\alpha u)_\tau\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Díky (2.11) vidíme, že pro $\tau \to 1_-$ pravá strana konverguje k nule a tedy pro libovolné $\rho > 0$ lze tedy najít $\tau \in (0,1)$ (které bude od této chvíle pevné) tak, že

$$\|u-u_\tau\|_{W^{k,p}(\Omega)} \le \frac{\rho}{2}.$$

Krok 2: zhlazení
Funkce u_τ je prvkem $W^{k,p}(\Omega_\tau)$ a $\overline{\Omega} \subset \Omega_\tau$. Pro námi zvolené (pevné) τ můžeme použít Větu o lokální aproximaci (Věta 2.2.1) a pro $\rho > 0$ najdeme $\varepsilon > 0$ tak, že platí

$$\|u_\tau - (u_\tau)_\varepsilon\|_{W^{k,p}(\Omega)} \le \frac{\rho}{2},$$

kde $(u_\tau)_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ a tedy i $(u_\tau)_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.
Krok 3: aproximace
Nakonec definujeme $u_\rho := (u_\tau)_\varepsilon$ a ověříme (2.10). Použitím trojúhelníkové nerovnosti získáme

$$\|u-u_\rho\|_{W^{k,p}(\Omega)} \le \|u-u_\tau\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u_\tau - (u_\tau)_\varepsilon\|_{W^{k,p}(\Omega)} \le \rho,$$

což jsme chtěli ukázat. ■

Hvězdicovitá množina je však příliš specifický pojem, který nezahrnuje celou třídu (jinak pěkných) množin. V dalším si ukážeme, že tvrzení o globální aproximaci sobolevovských funkcí funkcemi hladkými a další význačné vlastnosti, platí pro „rozumné“ množiny a pro jednoduchost budeme uvažovat pouze otevřené souvislé množiny, tj. oblasti v $\mathbb{R}^d$. Klíčovým pojmem pro zavedení „rozumných množin“ je následující definice.

Definice 2.2.11 — Oblast s hranicí $\mathcal{C}^{k,\mu}$. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená oblast, $k \in \mathbb{N}_0$ a $\mu \in [0,1]$[a]. řekneme, že Ω je oblast s hranicí $\mathcal{C}^{k,\mu}$ (zkráceně oblast typu $\mathcal{C}^{k,\mu}$ a značíme $\Omega \in \mathcal{C}^{k,\mu}$) právě tehdy, když existují kladná čísla α, β a M kartézských souřadných systémů, tj. souřadnice libovolného bodu $x \in \mathbb{R}^d$ v r-tém souřadnicovém systému označíme $x = (x_{r_1}, \dots, x_{r_d}) := (x'_r, x_{r_d})$, a M funkcí $a_r : \Delta_r \to \mathbb{R}$ třídy $\mathcal{C}^{k,\mu}$, kde pro každé $r \in \{1, \dots, M\}$ definujme

$$\Delta_r := \left\{x'_r \in \mathbb{R}^{d-1} : \ i = 1, \dots, d-1 : \ |x_{r_i}| < \alpha\right\},$$

takových, že:

1. Pokud označíme T_r zobrazení (otočení a posunutí) realizující přechod od r-tého kartézského souřadného systému (x'_r, x_{r_d}) ke globálnímu souřadnému systému (x', x_d), pak pro každé $x \in \partial\Omega$ existuje souřadný systém (tj. existuje $r \in \{1, \dots, M\}$), tak, že $x = T_r(x'_r, a_r(x'_r))$ pro nějaké $x'_r \in \Delta_r$.

2. Definujeme-li

$$\begin{aligned} V_r^+ &:= \left\{(x'_r, x_{r_d}) \in \mathbb{R}^d : \ x'_r \in \Delta_r, \ a_r(x'_r) < x_{r_d} < a_r(x'_r) + \beta\right\}, \\ V_r^- &:= \left\{(x'_r, x_{r_d}) \in \mathbb{R}^d : \ x'_r \in \Delta_r, \ a_r(x'_r) - \beta < x_{r_d} < a_r(x'_r)\right\}, \\ \Lambda_r &:= \left\{(x'_r, x_{r_d}) \in \mathbb{R}^d : \ x'_r \in \Delta_r, \ a_r(x'_r) = x_{r_d}\right\}, \end{aligned}$$

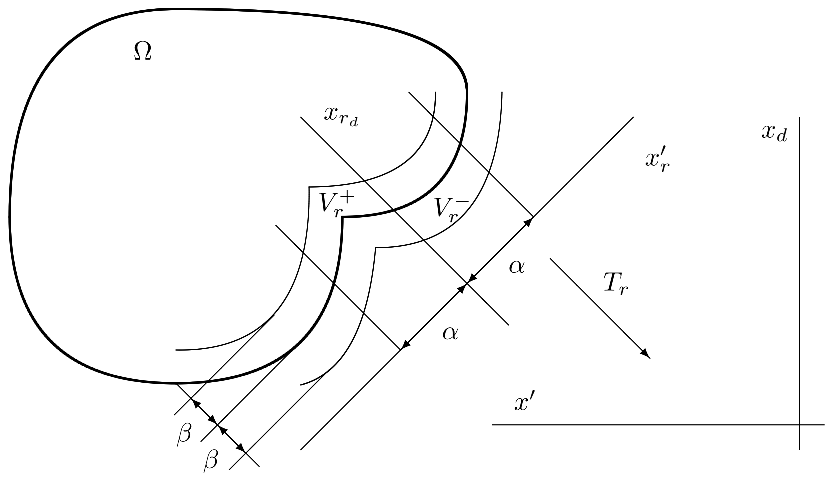
pak $T_r(V_r^+) \subset \Omega$, $T_r(V_r^-) \subset \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ a $T_r(\Lambda_r) \subset \partial\Omega$.

Z vlastnosti 1. navíc plyne, že $\partial\Omega = \bigcup_{r=1}^M T_r(\Lambda_r)$. Označíme-li otevřenou množinu $V_r := V_r^+ \cup V_r^- \cup \Lambda_r$ pak $\partial\Omega \subset \bigcup_{r=1}^M T_r(V_r)$ a $\{T_r(V_r)\}_{r=1}^M$ je konečné otevřené pokrytí $\partial\Omega$.

[a] Pro $\mu = 0$ mluvíme o oblastech s hranicí $\mathcal{C}^k$.

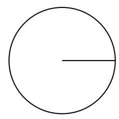
K názorné představě, jak rozumíme výše uvedené definici, nám poslouží Obr. 2.1.

Příklad 2.2.12. Příklady konkrétních oblastí:



Obrázek 2.1: Oblast Ω s hranicí $\mathcal{C}^{k,\mu}$

1. Zřejmě oblast typu $(0,a)^d$, $a > 0$ (tj. d-dimenzionální krychle) je oblast s hranicí $\mathcal{C}^{0,1}$.
2. Koule v $\mathbb{R}^d$ je oblast s hranicí $\mathcal{C}^\infty$.
3. Koule v $\mathbb{R}^d$ s vyjmutou částí průměru (viz Obr. 2.2) není ani oblastí s hranicí $\mathcal{C}^0$.



Obrázek 2.2: Oblast, která není typu $\mathcal{C}^0$

Poznamenejme, že třetí příklad je přesně oblast uvažovaná v Cvičení 2.1.25, pro kterou neplatí $\widetilde{W}^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$. Na druhou stranu, jak uvidíme níže, tato vlastnost platí pro $\Omega \in \mathcal{C}^0$ a klíčovou vlastností této třídy množin je, že můžeme hovořit o **vnitřku** oblasti (reprezentovaného $T_r(V_r^+)$) a **vnějšku** oblasti (reprezentovaného $T_r(V_r^-)$), což nám dovolí vhodným způsobem modifikovat důkaz pro hvězdicovité oblasti.

Poznámka 2.2.13. Některé význačné množiny se standardně místo výše uvedeného značení nazývají „celým jménem“, o $\Omega \in \mathcal{C}^0$ hovoříme vždy jako o oblasti se spojitou hranicí a o $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ jako o oblasti s lipschitzovskou hranicí.

Před tím než přistoupíme k hlavní větě této části, uvedeme ještě jednodušší verzi Lemmatu o rozkladu jednotky 2.2.7, kterou ale dokážeme (lze nalét např. i v Kufner et al. [1977]).

Lemma 2.2.14 — O rozkladu jednotky II. Buď $\{G_i\}_{i=1}^k$ konečný systém otevřených množin v $\mathbb{R}^d$ takových, že $\overline{\Omega} \subset \cup_{i=1}^k G_i$. Potom existují nezáporné funkce $\phi_i \in \mathcal{C}_0^\infty(G_i)$, $i = 1, \ldots, k$ takové, že pro každé i je $\|\phi_i\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \leq 1$ a pro každé $x \in \overline{\Omega}$ platí

$$\sum_{i=1}^k \phi_i(x) = 1.$$

Důkaz. Vezměme otevřené množiny $G_i' \subset\subset G_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ tak, že $\{G_i'\}_{i=1}^k$ tvoří stále pokrytí $\overline{\Omega}$. Potom zřejmě existuje otevřená množina G_{k+1} taková, že $\cup_{i=1}^{k+1} G_i = \mathbb{R}^d$ a $\operatorname{dist}(G_{k+1}, \Omega) > 0$. Vezměme $h > 0$ dostatečně malé tak, aby $\operatorname{dist}(G_i', G_i) > h$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, k$ a $\operatorname{dist}(G_{k+1}, \Omega) > h$. Položme

$$\omega(x; h) := \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{|x|^2}{|x|^2 - h^2}} & \text{pro } |x| < h \\ 0 & \text{pro } |x| \geq h. \end{cases}$$

Pokryjme každé $\overline{G_i'}$ a $\overline{G_{k+1}}$ koulemi o středech y_{ij} ležících v uvedených množinách a poloměru h (toto pokrytí lze volit konečné pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ a lokálně konečné na G_{k+1}) a položme

$$\psi_i(x) = \sum_j \omega(x - y_{ij}; h) \qquad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, k+1.$$

Zřejmě $\psi_i \in \mathcal{D}(G_i)$ pro $i = 1, 2, \ldots, k+1$ a pro každé $x \in K$ je $\sum_{i=1}^{k} \psi_i(x) \neq 0$ a $\psi_{k+1}(x) = 0$. Položme

$$\phi_i(x) := \frac{\psi_i(x)}{\sum_{j=1}^{k+1} \psi(x)}.$$

Potom systém funkcí $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^{k}$ tvoří požadovaný rozklad jednotky na $\overline{\Omega}$. ■

Nyní můžeme přistoupit k hlavní větě této sekce.

Věta 2.2.15 — O aproximaci až do hranice pro $\Omega \in \mathcal{C}^0$. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^0$, $p \in [1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$ a $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Potom existuje posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcí z $\mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$ taková, že $u_n \to u$ ve $W^{k,p}(\Omega)$. Neboli, $\widetilde{W}^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$.

Důkaz. Naším cílem je ukázat, že pro každou $u \in W^{k,p}(\Omega)$ a pro libovolně zvolené $\rho > 0$ najdeme $u^{\rho} \in \mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$ takové, že

$$\|u - u^{\rho}\|_{k,p} \leq \rho.$$

V dalším jsou tedy u a ρ pevně zvoleny.

Krok 1: rozklad jednotky

Pro $r = 1, \ldots, M$ si označme otevřené množiny z definice oblasti se spojitou hranicí $O_r := T_r(V_r)$. Pak zcela jistě můžeme najít otevřenou množinu O_{M+1} takovou, že $O_{M+1} \subset \overline{O_{M+1}} \subset \Omega$ a navíc splňující $\overline{\Omega} \subset \cup_{r=1}^{M+1} O_r$. Použijeme předchozí Lemma o rozkladu jednotky II (Lemma 2.2.14) na systém $\{O_r\}_{r=1}^{M+1}$ a označíme $u_r := u\phi_r \in W^{k,p}(\Omega)$. Pro $x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ automaticky definujeme $u_r(x) := 0$.

Krok 2: aproximace uvnitř

Funkce $u_{M+1} \in W^{k,p}(\Omega)$ má kompaktní nosič ležící uvnitř Ω a tedy po dodefinování nulou vně Ω máme $u_{M+1} \in W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$. Můžeme tedy přímo použít Lemma o globální aproximaci funkcí na $\mathbb{R}^d$ (Lemma 2.2.2) a pro dané ρ najít $u^{\rho}_{M+1} \in \mathcal{C}^{\infty}_0(\mathbb{R}^d)$ takové, že

$$\left\|u_{M+1} - u^{\rho}_{M+1}\right\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \frac{\rho}{M+1}.$$

Krok 3: „vysunutí“ funkce ven

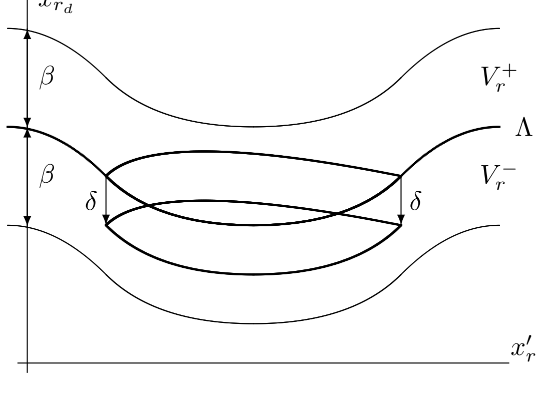
Pro libovolné $\delta \in (0, \frac{\beta}{2})$ definujeme $u_{r,\delta}(x) := u_r(T_r(x'_r, x_{r_d} + \delta))$ vysunutí funkce u_r vně Ω, viz Obr. 2.3. Hlavní důvodem k takovému „vysunutí“ je fakt, že funkce u_r je definována na okolí hranice $\partial\Omega$ a tudíž budeme moci využít Větu o lokální aproximaci (Věta 2.2.1).

Přesněji, protože ϕ_r má kompaktní nosič v $T_r(V_r)$, vidíme, že po dodefinování u_r nulou vně Ω platí $u_r \in W^{k,p}(\Omega_r)$, kde $\Omega_r := \mathbb{R}^d \setminus T_r(\overline{V^-_{\frac{r}{2}}})$ je otevřená a

$$V^-_{\frac{r}{2}} := \left\{(x'_r, x_{r_d}) \in \mathbb{R}^d : \ x'_r \in \Delta_r, \ a_r(x'_r) - \frac{\beta}{2} < x_{r_d} < a_r(x'_r)\right\} \subset V^-_r.$$

Navíc pokud definujeme (otevřenou množinu) $\Omega_{r,\delta} := \{y \in \mathbb{R}^d : \exists x \in \Omega_r, \, y = T_r(x'_r, x_{r_d} - \delta)\}$, pak $u_{r,\delta} \in W^{k,p}(\Omega_{r,\delta})$. Zřejmě pro každý multiindex α takový, že $|\alpha| \leq k$ a každé $x \in \Omega_{r,\delta}$ máme $D^{\alpha} u_{r,\delta}(x) = D^{\alpha} u_r(T_r(x'_r, x_{r_d} + \delta))$. Díky Větě o spojitosti v průměru v p-té mocnině (Věta A.3.25) pak můžeme zvolit $\delta > 0$ takové, že platí

$$\|u_{r,\delta} - u_r\|_{W^{k,p}(\Omega_r \cap \Omega_{r,\delta})} < \frac{\rho}{2(M+1)}.$$



Obrázek 2.3: Posunutí funkce

Krok 4: regularizace

Abychom mohli využít větu o lokální aproximaci, ukážeme nejdříve, že $\overline{\Omega} \subset \Omega_{r,\delta}$. Předpokládejme tedy pro spor, že existuje $y \in \overline{\Omega}$ takové, že $y \notin \Omega_{r,\delta}$. Nebo-li, že pro každé $x = T_r(x_r', x_{r_d}) \in \Omega_r$ platí $y \neq T_r(x_r', x_{r_d} - \delta)$. Převedením y do r-tého souřadného systému, tj. $y = T_r(y_r', y_{r_d})$ pak $y \neq T_r(x_r', x_{r_d} - \delta)$ je ekvivalentní $(y_r', y_{r_d} + \delta) \neq (x_r', x_{r_d})$, což neznamená nic jiného než $(y_r', y_{r_d} + \delta) \in \overline{V_{\frac{r}{2}}^-}$. Tento vztah se dá díky spojitosti a a definice $V_{\frac{r}{2}}^-$ zapsat jako

$$a_r(y_r') - \frac{\beta}{2} \leq y_{r_d} + \delta \leq a_r(y_r').$$

Vzhledem k tomu, že $\delta < \frac{\beta}{2}$, vidíme, že

$$a_r(y_r') - \beta < y_{r_d} < a_r(y_r')$$

a tedy $y \in T_r(V_r^-)$ a tudíž $y \notin \overline{\Omega}$, což je spor.

Nyní můžeme použít Větu o lokální aproximaci (Věta 2.2.1) a pro $u_{r,\delta} \in W^{k,p}(\Omega_{r,\delta})$ najdeme $u_r^\rho \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ (připomeňme, že $\overline{\Omega} \subset \Omega_{r,\delta}$) tak, že

$$\|u_{r,\delta} - u_r^\rho\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \frac{\rho}{2(M+1)}.$$

Krok 5: konstrukce aproximující posloupnosti
Položme

$$u^\rho := \sum_{r=1}^{M+1} u_r^\rho.$$

Zřejmě je $u^\rho \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ a s využitím Kroků 1,2,3 (poznamenejme, že $\Omega \subset \Omega_{r,\delta} \cap \Omega_r$) a 4 a trojúhelníkové nerovnosti získáme

$$\begin{aligned}
\|u^\rho - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} &\leq \left\| \sum_{r=1}^{M+1} (u_r^\rho - u_r) \right\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \sum_{r=1}^{M+1} \|u_r^\rho - u_r\|_{W^{k,p}(\Omega)} \\
&\leq \frac{\rho}{M+1} + \sum_{r=1}^{M} \|u_r^\rho - u_r\|_{W^{k,p}(\Omega)} \\
&\leq \frac{\rho}{M+1} + \sum_{r=1}^{M} \|u_r^\rho - u_{r,\delta}\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \sum_{r=1}^{M} \|u_{r,\delta} - u_r\|_{W^{k,p}(\Omega)} \\
&< \frac{\rho}{M+1} + 2\sum_{r=1}^{M} \frac{\rho}{2(M+1)} = \rho.
\end{aligned}$$

Důkaz je hotov. ■

Poznámka 2.2.16. V krocích 3 a 4 se projevily obě důležité vlastnosti. Jednak jsme potřebovali jednoznačně určený směr dovnitř a ven (krok 3), spojitost a_r se projevila při popisu $\overline{V_{\frac{r}{2}}^-}$.

2.3 Souvislost slabé derivace a diferencí

V předešlé sekci jsme viděli, že sobolevovské funkce mohou být aproximovány funkcemi hladkými libovolně přesně (ve smyslu $W^{1,p}$-normy). Navíc již víme, že pokud má funkce spojité klasické derivace, pak už tyto derivace jsou i derivacemi slabými. Nyní se budeme zabývat opačným vztahem aneb zda lze slabou derivaci chápat jako jistou aproximaci derivace klasické.

Pro libovolné $i = 1, \ldots, d$ a $h \in \mathbb{R}$ označme tzv. diferenční podíl

$$\Delta_i^h u(x) := \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}, \tag{2.12}$$

kde e_i je jednotkový vektor ve směru osy x_i. Je zřejmé, že pokud má funkce u v bodě x parciální derivaci podle proměnné x_i, potom

$$\lim_{h \to 0} \Delta_i^h u(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Cílem tohoto odstavce je ukázat, že něco podobného „v průměru“ platí i pro slabou derivaci a dokonce skoro všude v Ω. Prvním hlavním výsledkem této části je následující charakterizace.

Věta 2.3.1 — O souvislosti diferenčního podílu a slabé derivace I. Buď Ω otevřená, $p \in [1, \infty]$ a $u \in L^p(\Omega)$. Pro libovolné $\delta > 0$ označme

$$\Omega_\delta := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}.$$

Potom platí:

1. Pokud $u \in W^{1,p}(\Omega)$, pak pro každé $i \in \{1,\dots,d\}$, $\delta \in (0,1)$ a $h \in (0, \frac{\delta}{2})$ platí
$$\left\|\Delta_i^h u\right\|_{L^p(\Omega_\delta)} \le \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)}.$$

2. Buď $p \in (1,\infty]$ a konstanty $\{C_i\}_{i=1}^d$ takové, že pro každé $i \in \{1,\dots,d\}$, $\delta \in (0,1)$ a $h \in (0, \frac{\delta}{2})$ platí
$$\left\|\Delta_i^h u\right\|_{L^p(\Omega_\delta)} \le C_i.$$
Potom $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Navíc pro každé $i \in \{1,\dots,d\}$ máme odhad
$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)} \le C_i.$$

Důkaz. Důkaz první části věty: Buď nejdříve $p \in [1,\infty)$ a $u \in W^{1,p}(\Omega)$, které rozšíříme nulou[7] vně Ω. Z Věty o lokální aproximaci (Věta 2.2.1) víme, že
$$u \star \eta_\varepsilon =: u_\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0_+}{\to} u \text{ ve } W^{1,p}(\Omega_{\frac{\delta}{2}}). \tag{2.13}$$
Protože u_ε jsou hladké funkce, máme pro každé $i \in \{1,\dots,d\}$ a každé $x \in \Omega_\delta$
$$\Delta_i^h u_\varepsilon(x) = \frac{1}{h}\int_0^h \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x+te_i)\,\mathrm{d}t.$$
Použitím Hölderovy nerovnosti tedy získáme
$$\left|\Delta_i^h u_\varepsilon(x)\right|^p \le \frac{1}{h^p}\left|\int_0^h \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x+te_i)\,\mathrm{d}t\right|^p \le \frac{1}{h}\int_0^h \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x+te_i)\right|^p \,\mathrm{d}t.$$
Tuto nerovnost zintegrujeme přes Ω_δ a použijeme Fubiniho větu. Výsledkem je
$$\begin{aligned}\left\|\Delta_i^h u_\varepsilon(x)\right\|^p_{L^p(\Omega_\delta)} &\le \frac{1}{h}\int_{\Omega_\delta}\left(\int_0^h \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x+te_i)\right|^p \,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{h}\int_0^h\int_{\Omega_\delta} \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x+te_i)\right|^p \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
Pomocí věty o substituci můžeme poslední integrál odhadnout (zvětšujeme integrační oblast)
$$\frac{1}{h}\int_0^h\int_{\Omega_\delta} \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x+te_i)\right|^p \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{h}\int_0^h\int_{\Omega_{\frac{\delta}{2}}} \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x)\right|^p \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right\|^p_{L^p(\Omega_{\frac{\delta}{2}})}.$$
Nyní můžeme použít (silnou) konvergenci (2.13) a kombinací předchozích dvou nerovností získáme
$$\left\|\Delta_i^h u(x)\right\|^p_{L^p(\Omega_\delta)} \le \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^p_{L^p(\Omega_{\frac{\delta}{2}})} \le \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^p_{L^p(\Omega)}.$$
Poslední nerovnost jsme získali pouhým zvětšením integrační oblasti. Důkaz první části tvrzení pro $p \in [1,\infty)$ je hotov.

Buď nyní $p = \infty$. Označme nyní $\Omega^R := \Omega \cap B_R(0)$, která je opět otevřená a navíc omezená. Pokud $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, pak nutně musí platit $u \in W^{1,p}(\Omega^R)$ pro každé $R > 0$ a $p \in [1,\infty)$. Pokud označíme v podobném duchu jako výše Ω^R_δ, pak můžeme použít předchozí krok a obdržet
$$\left\|\Delta_i^h u(x)\right\|_{L^p(\Omega^R_\delta)} \le \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega^R)}.$$
Nyní můžeme vzít $p \to \infty$ (viz Větu A.3.16) a dostaneme
$$\left\|\Delta_i^h u(x)\right\|_{L^\infty(\Omega^R_\delta)} \le \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^\infty(\Omega^R)}.$$
Konečně limitní přechod $R \to \infty$ dokončuje důkaz prvního tvrzení i pro $p = \infty$.

Důkaz druhé části věty: Začněme nejdříve s případem $p \in (1,\infty)$. Dodefinujme opět u nulou vně Ω a vezměme posloupnost $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ jdoucí k nule. Definujme funkce
$$v_i^n := \Delta_i^{h_n} u \chi_{\Omega_{2h_n}}.$$

[7] Poznamenejme, že po tomto rozšíření nebude funkce u sobolevovská.

Z předpokladů vidíme, že pro každé i platí $\|v_i^n\|_{L^p(\Omega)} \le C_i$. Protože prostory L^p jsou reflexivní (zde použijeme předpoklad $p \in (1,\infty)$), můžeme vybrat podposloupnost, kterou nepřeznačíme, tak, že

$$v_i^n \rightharpoonup v_i \text{ slabě v } L^p(\Omega).$$

Navíc ze slabé zdola polospojitosti normy (nebo také ze slabé zdola polospojitosti konvexních funkcionálů, viz Větu A.3.42) ihned plyne

$$\|v_i\|_{L^p(\Omega)} \le C_i.$$

Zbývá tedy ukázat, že v_i jsou slabé derivace u, tj.

$$v_i(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \text{ ve slabém smyslu a skoro všude v } \Omega,$$

což podle definice znamená, že pro každou $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ platí

$$\int_\Omega v_i(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.14}$$

Protože φ má kompaktní nosič, existuje n_0 takové, že pro všechna $n \ge n_0$ $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega_{2h_n}$. Z definice slabé konvergence tedy dostáváme, že

$$\begin{aligned}\int_\Omega v_i(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega v_i^n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_{2h_n}} \Delta_i^{h_n}u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\Delta_i^{h_n}u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}u(x)\Delta_i^{-h_n}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}u(x)\frac{\varphi(x-h_ne_i)-\varphi(x)}{-h_n}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

čímž jsme ověřili (2.14) a důkaz pro $p \in (1,\infty)$ je tedy hotov. Ve výše uvedené limitní přechodu jsme použily Lebesgueovu větu o majorizované konvergenci (Věta A.3.3) pro poslední rovnost a zároveň identitu

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Delta_i^h u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d}u(x)\Delta_i^{-h}\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

jejíž ověření přenecháváme čtenáři jako lehké cvičení.

Případ $p = \infty$ se ukáže obdobně jako v předchozím kroku a je opět přenechán laskavému čtenáři. ■

Důsledek 2.3.2. Všimněte si (ověřte podrobně, že jsou splněny předpoklady druhé části Věty 2.3.1), že lipschitzovské funkce patří do $W^{1,\infty}(\Omega)$. Dokonce platí vnoření $\mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\Omega)$. Obrácené vnoření obecně neplatí a je k němu zapotřebí větší hladkost hranice, jak bude ukázáno později.

Poznámka 2.3.3. Druhá část Věty 2.3.1 vskutku neplatí pro $p = 1$, jak si čtenář může sám ověřit na funkci $u(x) := \operatorname{sign} x$ na intervalu $(-1,1)$. Nicméně, funkce splňující předpoklady druhé části věty s $p = 1$ patří do prostoru $BV(\Omega)$ — funkce s omezenou variací[8].

V důkazu předchozí věty jsme ukázali, že diferenční podíl konverguje slabě ke slabé derivaci kdykoliv $p \in (1,\infty)$. Toto tvrzení nyní zesílíme na silnou konvergenci.

Věta 2.3.4 — O souvislosti diferenčního podílu a slabé derivace II. Buď Ω otevřená, $p \in [1,\infty)$ a $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Pro $\delta > 0$ označme

$$\Omega_\delta := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) > \delta\}.$$

Potom pro libovolné $\delta > 0$ platí

$$\lim_{h\to 0}\left\|\Delta_i^h u - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega_\delta)} = 0. \tag{2.15}$$

Důkaz. Budeme používat stejné značení jako v důkazu Věty 2.3.1. Buď tedy $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Stejně jako výše zavedeme zhlazení u_ε, pro které obdržíme

$$\Delta_i^h u_\varepsilon(x) = \frac{1}{h}\int_0^h \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x+te_i)\,\mathrm{d}t.$$

Nyní pro pevné $\delta > 0$ zafixujeme $h_1, h_2 \in (0, \frac{\delta}{2})$. Pro rozdíl odpovídajících diferenčních podílů dostaneme z definice diferenčního podílu a pomocí standardní věty o substituci

$$\begin{aligned}\Delta_i^{h_1}u_\varepsilon(x) - \Delta_i^{h_2}u_\varepsilon(x) &= \frac{1}{h_1}\int_0^{h_1}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x+te_i)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h_2}\int_0^{h_2}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x+te_i)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x+th_1e_i) - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x+th_2e_i)\right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

[8] Prostor $BV(\Omega)$ je definován jako podprostor funkcí z $L^1(\Omega)$, jejichž všechny parciální distributivní derivace prvního řádu jsou Radonovy míry, viz Kufner et al. [1977] či Lukeš and Malý [1995].

Nyní můžeme odhadnout L^p-normu členu na levé straně pomocí Fubiniho věty, Hölderovy nerovnosti a trojúhelníkové nerovnosti jako

$$\begin{aligned}&\|\Delta_i^{h_1} u_\varepsilon - \Delta_i^{h_2} u_\varepsilon\|^p_{L^p(\Omega_\delta)}\\ &\le \int_{\Omega_\delta}\int_0^1 \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x+th_1e_i) - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x+th_2e_i)\right|^p \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\ &\le \int_0^1 \left(\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(\cdot+th_1e_i) - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega_\delta)} + \left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(\cdot+th_2e_i) - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega_\delta)}\right)^p \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Díky vlastnostem zhlazení můžeme dále přejít s $\varepsilon \to 0_+$ (připomeňme, že $h_1, h_2 < \frac{\delta}{2}$) a získáme odhad

$$\begin{aligned}&\|\Delta_i^{h_1} u - \Delta_i^{h_2} u\|^p_{L^p(\Omega_\delta)}\\ &\le \int_0^1 \left(\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}(\cdot+th_1e_i) - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega_\delta)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}(\cdot+th_2e_i) - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega_\delta)}\right)^p \mathrm{d}t\\ &\le 2^p \sup_{t\in(0,\max(h_1,h_2))} \int_{\Omega_\delta} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x+te_i) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^p \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Nyní ukážeme, na základě výše uvedené nerovnosti, že posloupnost diferencí je cauchyovská. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Protože $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$, můžeme dle Věty o spojitosti v průměru (Věta A.3.25) nalézt $h_\varepsilon \le \frac{\delta}{2}$ takové, že pro všechna $h \in (0, h_\varepsilon)$ platí

$$\int_{\Omega_\delta} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x+he_i) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^p \mathrm{d}x \le \frac{\varepsilon^p}{2^p}.$$

Dosazením do předchozí nerovnosti tedy konečně obdržíme, že pro každé $h_1, h_2 \in (0, h_\varepsilon)$ platí

$$\|\Delta_i^{h_1} u - \Delta_i^{h_2} u\|_{L^p(\Omega_\delta)} \le \varepsilon$$

a tedy posloupnost je cauchyovská. Protože prostory L^p jsou úplné, posloupnost diferencí $\Delta_i^h u$ konverguje silně v $L^p(\Omega_\delta)$ k nějakému $v_i \in L^p(\Omega_\delta)$. Stejným způsobem jako v důkazu předešlé věty se dá ověřit, že

$$v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ skoro všude v } \Omega_\delta$$

a důkaz je hotov. ■

Poznámka 2.3.5. Protože silná konvergence implikuje skoro všude konvergenci, Věta 2.3.4 garantuje, že pro libovolnou posloupnost $h_n \to 0$ existuje množina nulové míry $N \subset \Omega$ taková, že (pro vybranou podposloupnost)

$$\lim_{h_n\to 0}\left|\Delta_i^{h_n} u(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right| = 0 \qquad \text{pro všechna } x \in \Omega\setminus N.$$

Toto tvrzení nezaručuje existenci klasické derivace, neboť funkci u můžeme změnit na množině nulové míry, která je však hustá v Ω a tedy u po této změně nebude spojitá v žádném bodě a tedy nebude mít klasickou derivaci. Jiná situace je pro $p > d$, kde už existuje spojitý reprezentant funkce. Tomuto případu se budeme věnovat později.

Na druhou stranu, z výše uvedeného, můžeme zesílit Lemma 2.1.4, ve kterém předpokládáme spojitost derivací, následujícím způsobem.

Lemma 2.3.6 — Souvislost slabé a klasické derivace II. Buď Ω otevřená množina a $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Označme množinu $D \subset \Omega$

$$D := \{x \in \Omega : \text{ existuje klasická parciální derivace podle } x_i\}$$

Pak slabá a klasická derivace podle x_i splývají skoro všude v D.

Důkaz. Důkaz tohoto tvrzení je založen na předchozí větě a je opět přenechán čtenáři jako cvičení. ■

Jako poslední tvrzení této části uvedeme lehké zobecnění Věty 2.3.1.

Lemma 2.3.7 — O souvislosti diferenčního podílu a slabé derivace III. Buď Ω otevřená, $p \in [1, \infty]$ a $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Pro libovolné $\delta > 0$, $h > 0$ a libovolný jednotkový vektor $e \in \mathbb{R}^d$ označme

$$\Omega_\delta := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\},$$
$$\Delta_e^h u(x) := \frac{u(x+he) - u(x)}{h}.$$

Potom platí

$$\left\|\Delta_e^h u\right\|_{L^p(\Omega_{2|h|})} \le \|\nabla u \cdot e\|_{L^p(\Omega)} .$$

Důkaz. Důkaz je přenechán čtenáři. ■

2.4 Rozšíření $W^{1,p}(\Omega)$ na $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

Ve Větě 2.2.15 jsme museli řešit zhlazení funkcí z $W^{k,p}(\Omega)$ pomocí „vysunutí“, protože na rozdíl od Lebesgueových prostorů jsme nemohli funkce nějak jednoduše prodloužit tak, aby prodloužená funkce měla stejnou hladkost jako funkce původní. V této kapitole si ukážeme, jak lze tento problém vyřešit. Budeme ale potřebovat jistou hladkost hranice oblasti a minimální požadavek bude lipschitzovská spojitost. Hlavním výsledkem této části je následující věta.

Věta 2.4.1 — Operátor rozšíření. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ a $p \in [1, \infty]$. Pak existuje spojitý lineární operátor

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

tak, že

1. $Eu = u$ na Ω,
2. Eu má kompaktní nosič v $\mathbb{R}^d$,
3. existuje $C = C(d, \Omega) > 0$ tak, že
$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \le C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} .$$

Poznámka 2.4.2. V dalším budeme nazývat Eu rozšířením $u \in W^{1,p}(\Omega)$ na $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ a operátor E budeme nazývat operátorem rozšíření.

Ještě než přistoupíme k samotnému důkazu Věty 2.4.1, zavedeme tzv. „narovnání“ hranice, což je obecná technika použitá nejen v důkazu Věty 2.4.1, ale i v dalších partiích teorie Sobolevových prostorů a navíc i v samotné teorii parciálních diferenciálních rovnic.

Předpokládejme, že část hranice je explicitně popsána rovnicí (pro jednoduchost zde neuvažujeme přechod mezi různými systémy souřadnic)

$$x_d = a(x'),\ x' \in \Delta = \left\{x' \in \mathbb{R}^{d-1} : \forall i \in \{1, \dots, d-1\}\ |x_i| < \alpha\right\}.$$

Připomeňme si označení z Definice 2.2.11

$$\begin{aligned} V^+ &= \left\{(x', x_d) \in \mathbb{R}^d :\ x' \in \Delta,\ a(x') < x_d < a(x') + \beta\right\}, \\ V^- &= \left\{(x', x_d) \in \mathbb{R}^d :\ x' \in \Delta,\ a(x') - \beta < x_d < a(x')\right\}, \\ \Lambda &= \left\{(x', x_d) \in \mathbb{R}^d :\ x' \in \Delta,\ a(x') = x_d\right\}, \\ V &= V^+ \cup V^- \cup \Lambda. \end{aligned}$$

Nyní se budeme věnovat přechodu od původní hranice k hranici „narovnané“. Definujeme nové proměnné (y', y_d) a zobrazení $F : (-1, 1)^d \to V$ vztahy

$$\begin{aligned} x' &= \alpha y', \\ x_d &= a(\alpha y') + \beta y_d, \quad (\text{tj. } x = F(y)), \end{aligned} \tag{2.16}$$

respektive

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\alpha} x', \\ y_d &= \frac{1}{\beta} x_d - \frac{1}{\beta} a(x'), \quad (\text{tj. } y = F^{-1}(x)). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Dále označme

$$\begin{aligned} C^+ &:= (-1, 1)^{d-1} \times (0, 1), \\ C^- &:= (-1, 1)^{d-1} \times (-1, 0). \end{aligned}$$

Potom F zobrazuje C^+ na V^+, C^- na V^- a $(-1, 1)^{d-1} \times \{0\}$ na Λ. Navíc, pokud a je lipschitzovská funkce, platí následující klíčové lemma.

Lemma 2.4.3 — Narovnání hranice. Buďte F a F^{-1} definované pomocí (2.16) a (2.17). Buď $a(\cdot)$ funkce lipschitzovsky spojitá na $\overline{\Delta}$. Potom transformace F i její inverze F^{-1} jsou lipschitzovsky spojité.

Navíc existují kladné konstanty $C_1 = C_1(a, \alpha, \beta, d)$ a $C_2 = C_2(a, \alpha, \beta, d)$ takové, že pro každé $u \in W^{1,p}(V^+)$ pro $p \in [1, \infty)$, funkce $U := u \circ F \in W^{1,p}(C^+)$ a platí

$$C_1 \|u\|_{W^{1,p}(V^+)} \leq \|U\|_{W^{1,p}(C^+)} \leq C_2 \|u\|_{W^{1,p}(V^+)} . \tag{2.18}$$

Důkaz. Důkaz lipschitzovské spojitosti $F(y) := (F_1(y), \dots, F_d(y))$ a $F^{-1}(x) = (F_1^{-1}(x), \dots, F_d^{-1}(x))$ je přenechán čtenáři jako lehké cvičení.

Dokážeme zbývající tvrzení. Nejdříve poznamenejme, že díky lipschitzovské spojitosti a víme (viz Rademacherovu větu A.2.12), že a je diferencovatelná skoro všude v Δ a existuje konstanta a_{Lip} taková, že pro každé $i = 1, \dots, d-1$

$$|a_i(x')| := \left|\frac{\partial a(x')}{\partial x_i}\right| \leq \sup_{\{x', y' \in \Delta :\, x' \neq y'\}} \frac{|a(x') - a(y')|}{|x' - y'|} =: a_{Lip}. \tag{2.19}$$

Nyní tedy můžeme označit derivace (skoro všude v C^+, respektive ve V^+) zobrazení F a F^{-1} pomocí

$$G_{ij}(y) := \frac{\partial F_i(y)}{\partial y_j} = \begin{cases} \alpha\delta_{ij} & \text{pro } i = 1, \dots, d-1, \\ \alpha a_j(\alpha y') & \text{pro } i = d \text{ a } j = 1, \dots, d-1, \\ \beta & \text{pro } i = j = d, \end{cases}$$

$$G_{ij}^{-1}(x) := \frac{\partial F_i^{-1}(x)}{\partial x_j} = \begin{cases} \alpha^{-1}\delta_{ij} & \text{pro } i = 1, \dots, d-1, \\ -\beta^{-1} a_j(x') & \text{pro } i = d \text{ a } j = 1, \dots, d-1, \\ \beta^{-1} & \text{pro } i = j = d. \end{cases}$$

Odtud není těžké ukázat, že pro jakobiány zobrazení F a F^{-1} platí

$$\begin{aligned} J_F(y) &:= \det G(y) = \alpha^{d-1}\beta, \\ J_{F^{-1}}(x) &:= \det G^{-1}(x) = \frac{1}{\alpha^{d-1}\beta}. \end{aligned}$$

Konečně, protože F je bi-lipschitzovské zobrazení a u je měřitelná, pak i U je měřitelná a použitím věty o substituci (viz [Lukeš and Malý, 1995, Theorem 34.18]), získáme

$$\begin{aligned} \|U\|_{L^p(C^+)}^p &:= \int_{C^+} |U(y)|^p \, \mathrm{d}y = \int_{C^+} |u(F(y))|^p \, \mathrm{d}y \\ &= \int_{V^+} |u(x)|^p J_{F^{-1}}(x) \, \mathrm{d}x = \frac{\|u\|_{L^p(V^+)}^p}{\alpha^{d-1}\beta}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Předpokládejme nyní, že slabá derivace U existuje a platí

$$\frac{\partial U(y)}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_j}(F(y)) G_{ji}(y) \qquad \text{skoro všude v } C^+. \tag{2.21}$$

Poznamenejme, že díky měřitelnosti $D^\alpha u$ a vlastnostem F je výraz na pravé straně měřitelná funkce. Navíc, pokud by u a a měly spojité derivace prvního řádu, byla by díky řetízkovému pravidlu identita (2.21) splněna všude v C^+. Opětovnou aplikací věty o substituci tak dostáváme

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial U}{\partial y_i}\right\|_{L^p(C^+)}^p &= \int_{C^+} \left|\frac{\partial U(y)}{\partial y_i}\right|^p \mathrm{d}y = \int_{C^+} \left|\sum_{j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_j}(F(y)) G_{ji}(y)\right|^p \mathrm{d}y \\ &\leq d^{p-1} \sum_{j=1}^d \int_{C^+} \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(F(y))\right|^p |G_{ji}(y)|^p \, \mathrm{d}y \\ &\leq d^{p-1} \sum_{j=1}^d \|G_{ij}\|_\infty^p \int_{C^+} \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(F(y))\right|^p \mathrm{d}y \\ &= d^{p-1}\alpha^{d-1}\beta \sum_{j=1}^d \|G_{ij}\|_\infty^p \int_{V^+} \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right|^p \mathrm{d}x \\ &\leq C^p(\alpha, \beta, a, d) \|u\|_{W^{1,p}(V^+)}^p. \end{aligned}$$

Kombinací tohoto odhadu a (2.20) získáme druhou nerovnost z (2.18). Invertováním vztahu (2.21) (matice G je regulární) a opakováním stejného postupu získáme i první nerovnost z (2.18).

Zbývá tedy ověřit, že (2.21) platí ve slabém smyslu. Myšlenkou důkazu je vhodně aproximovat u hladkou funkcí, pro níž už bude platit (2.21), a poté vhodně přejít k limitě. Protože V^+ je oblast s lipschitzovskou hranicí (ověřte podrobně), můžeme aproximovat u pomocí $\{u^n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{V^+})$ tak, že $u^n \to u$ ve $W^{1,p}(V^+)$. Nyní můžeme zavést aproximaci U pomocí

$$U^n(y) := u^n(F(y)).$$

Protože u^n je hladká funkce a F lipschitzovsky spojitá (díky lipschitzovskosti a), je i U^n lispchitzovsky spojitá a dle Rademacherovy věty (Věta A.2.12) má skoro všude **klasickou** derivaci, tj.

$$\frac{\partial U^n(y)}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial u^n}{\partial x_k}(F(y))G_{ji}(y) \quad \text{skoro všude v } C^+. \tag{2.22}$$

Navíc dle Důsledku 2.3.2 víme, že $U^n \in W^{1,\infty}(V^+)$ a tedy i $U^n \in W^{1,p}(V^+)$ pro každé $p \in [1,\infty)$. Konečně, protože klasická derivace existuje skoro všude a U^n je sobolevovská funkce, můžeme použít Lemma 2.3.6 a vidíme, že klasická derivace v (2.22) je rovna derivaci slabé skoro všude.

Zopakováním výše uvedeného postupu můžeme odvodit

$$\|U^n - U^m\|_{W^{1,p}(C^+)} \le C(a,\alpha,\beta,d)\|u^n - u^m\|_{W^{1,p}(V^+)},$$

a protože u^n je cauchyovská, je i U^n cauchyovská. Vzhledem k úplnosti Sobolevových prostorů (Věta 2.1.14) existuje tedy $U \in W^{1,p}(C^+)$ taková, že $U^n \to U$ a tedy nutně i

$$\frac{\partial U^n}{\partial y_i} \to \frac{\partial U}{\partial y_i} \quad \text{skoro všude v } C^+.$$

Konečně limitním přechodem v (2.22) (ve členu na pravé straně přejdeme lehce díky silné a následně tedy i skoro všude konvergenci ∇u^n) získáme (2.21). ■

Jako užitečné cvičení přenecháváme čtenáři důkaz následujícího tvrzení, které plyne z důkazu Lemmatu 2.4.3.

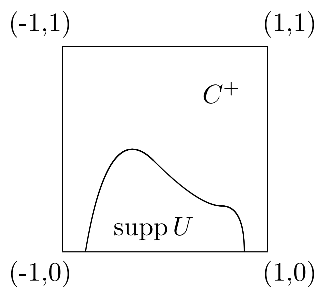
Lemma 2.4.4 Buďte F a F^{-1} definované pomocí (2.16) a (2.17), $a(\cdot)$ funkce lipschitzovsky spojitá na $\overline{\Delta}$, $p \in [1,\infty)$ a funkce $U : (-1,1)^d \to \mathbb{R}$ a $u : V \to \mathbb{R}$ splňující $U := u \circ F$. Potom $U \in W^{1,p}(C)$ právě tehdy, když $u \in W^{1,p}(V)$. Navíc existují kladné konstanty $C_1 = C_1(a,\alpha,\beta,d)$ a $C_2 = C_2(a,\alpha,\beta,d)$ takové, že

$$C_1 \|u\|_{W^{1,p}(V)} \le \|U\|_{W^{1,p}(C)} \le C_2 \|u\|_{W^{1,p}(V)}. \tag{2.23}$$

Nyní se můžeme přejít k důkazu hlavní věty této části.

Důkaz Věty 2.4.1. Uvažujeme nejprve $p \in [1,\infty)$.

Krok 1: Hladká funkce na krychli:
Buď $U \in \mathcal{C}^1(\overline{C^+})$ taková, že $\operatorname{supp} U \cap \partial C^+ \subset (-1,1)^{d-1} \times \{0\}$, viz Obr. 2.4.



Obrázek 2.4: Nosič funkce U

Pro takovou funkci U pak definujeme její rozšíření jako

$$EU(x) := \begin{cases} U(x) & x \in \overline{C^+}, \\ -3U(x_1,\dots,x_{d-1},-x_d) + 4U(x_1,\dots,x_{d-1},-\frac{x_d}{2}) & x \in \overline{C^-} \setminus \overline{C^+}, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{C}. \end{cases}$$

Zřejmě $\operatorname{supp} EU \subset C = (-1,1)^d$. Ukážeme, že $EU \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$. Stačí prozkoumat chování funkce EU při přechodu z C^+ do C^-, tedy ověřit, že pro pro libovolné $(x_1,\dots,x_{d-1})$ limita $EU(x_1,\dots,x_d)$ a jejích všech parciálních derivací jsou stejné pokud $x_d \to 0_\pm$. Z definice ihned dostáváme, že (neboť U je $\mathcal{C}^1(\overline{C^+})$)

$$\lim_{x_d\to 0_-} EU(x_1,\dots,x_{d-1},x_d) = (-3+4)U(x_1,\dots,x_{d-1},0) = U(x_1,\dots,x_{d-1},0)$$

a tedy nutně i $EU \in \mathcal{C}(\overline{C})$. Pro všechna $i = 1, \dots d-1$ stejným způsobem získáme

$$\begin{aligned}
&\lim_{x_d \to 0_-} \frac{\partial(EU)}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{d-1}, x_d) \\
&= -3 \lim_{x_d \to 0_-} \frac{\partial U}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{d-1}, -x_d) + 4 \lim_{x_d \to 0_-} \frac{\partial U}{\partial x_i}\left(x_1, \dots, x_{d-1}, -\frac{x_d}{2}\right) \\
&= \frac{\partial U}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{d-1}, 0).
\end{aligned}$$

Konečně pak pro derivaci podle x_d přímo z definice EU obdržíme

$$\begin{aligned}
&\lim_{x_d \to 0_-} \frac{\partial(EU)}{\partial x_d}(x_1, \dots, x_{d-1}, x_d) \\
&= 3 \lim_{x_d \to 0_-} \frac{\partial U}{\partial x_d}(x_1, \dots, x_{d-1}, -x_d) - 2 \lim_{x_d \to 0_-} \frac{\partial U}{\partial x_d}\left(x_1, \dots, x_{d-1}, -\frac{x_d}{2}\right) \\
&= \frac{\partial U}{\partial x_d}(x_1, \dots, x_{d-1}, 0).
\end{aligned}$$

Navíc evidentně platí

$$\|EU\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} = \|EU\|_{W^{1,p}(C)} \le K \|U\|_{W^{1,p}(C^+)}, \tag{2.24}$$

kde K je pevná konstanta, která nezávisí ani na d ani na p.

Krok 2: Funkce ze Sobolevova prostoru na krychli:
Buď $U \in W^{1,p}(C^+)$ taková, že $\operatorname{supp} U \cap \partial C^+ \subset (-1,1)^{d-1} \times \{0\}$, viz Obr. 2.4. Potom podle Věty o globální aproximaci (Věta 2.2.15) existuje posloupnost funkcí $\{U_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{C^+})$ taková, že $U_n \to U$ v $W^{1,p}(C^+)$. Navíc z důkazu Věty 2.2.15 plyne, že $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} U_n, \operatorname{supp} U) \to 0$. Pro dostatečně velká n pak víme, že $\operatorname{supp} U_n \cap \partial C^+ \subset (-1,1)^{d-1} \times \{0\}$ a pro funkce U_n můžeme použít předchozí krok. Existují tedy $EU_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ takové, že $\operatorname{supp} EU_n \in C$. Díky linearitě operátoru E, pak z (2.24) máme

$$\|EU_n - EU_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} = \|EU_n - EU_m\|_{W^{1,p}(C)} \le K \|U_n - U_m\|_{W^{1,p}(C^+)}.$$

Tedy je-li U_n cauchyovská posloupnost, pak je cauchyovská i posloupnost EU_n. Hledané rozšíření proto zadefinujeme jako limitu posloupnosti EU_n (připomeňme, že prostor $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ je úplný, viz Větu 2.1.14). Rozšíření má zřejmě všechny požadované vlastnosti a konstanta C z 3. bodu věty nezávisí na d a p.

Krok 3: Funkce ze Sobolevova prostoru na části okolí hranice:
V dalším budeme používat značení z Definice 2.2.11. Buď $u \in W^{1,p}(V^+)$ taková, že $\operatorname{supp} u \cap \partial V^+ \subset \Lambda$. Situace je zřejmě analogická situaci na krychli, pouze hranice není rovná. Použijeme schéma narovnání hranice a Lemma 2.4.3. Označíme $U := u \circ F$ a pro funkci U definujeme rozšíření EU tak, jako v předchozím kroku. Rozšíření funkce u pak definujeme jako $Eu := EU \circ F^{-1}$. Rozšíření má zřejmě všechny požadované vlastnosti, což plyne z Lemmatu 2.4.4, a konstanta c ze třetího bodu věty nyní bude ovšem záviset i na a, α, β, d, neboli na d a V^+.

Krok 4: Funkce ze Sobolevova prostoru na Ω:
Podobně jako v důkazu Věty 2.2.15 označme pro $r = 1, \dots, M$ množiny $O_r := T_r(V_r)$ a $O_r^+ := T_r(V_r^+)$, kde T_r jsou zobrazení z lokálního systému souřadnic (x_r', x_{r_d}) do pevného systému (x', x_d). Potom $\bigcup_{r=1}^M O_r$ je otevřené pokrytí jistého okolí hranice a na tomto okolí použijeme Lemma o rozkladu jednotky II (Lemma 2.2.14).

Buďte $\phi_r \in \mathcal{C}_0^\infty(O_r)$ funkce tvořící rozklad jednotky na jistém okolí $\partial\Omega$. Označme $u_r = (u\phi_r) \circ T_r$. Funkce $u_r \in W^{1,p}(V^+)$ splňuje předpoklady předcházejícího kroku a existuje tedy příslušné rozšíření Eu_r. Potom zadefinujeme finální operátor rozšíření E jako

$$Eu := \sum_{r=1}^M (Eu_r) \circ T_r^{-1}.$$

Z kroků 1–3 pak vyplývá, že takové rozšíření má všechy požadované vlastnosti z Věty 2.4.1, kde konstanta c z bodu 3. bude záviset pouze na d a na Ω. Tím je věta je dokázána pro $p \in [1, \infty)$.

Buď nyní $p = \infty$. Protože je Ω omezená, je $W^{1,\infty}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ a podle předchozího proto existuje prodloužení Eu funkce u pro každé $p < \infty$. Máme

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \le c \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le c_1 \|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)},$$

přičemž konstantu c_1 lze volit nezávislou na p. Z Věty A.3.16 potom plyne, že $Eu \in W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^d\right)$ a Eu splňuje požadavky z věty pro $p = \infty$. Důkaz je hotov. ■

Cvičení 2.4.5 (operátor rozšíření $W^{k,p}(\Omega) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$)**.** Ukažte, že pro $\Omega \in \mathcal{C}^{k-1,1}$ existuje operátor rozšíření z $W^{k,p}(\Omega) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$. Modifikujete krok jedna předchozího důkazu tak, aby $EU \in \mathcal{C}^k(\overline{C})$ pokud $U \in \mathcal{C}^k(\overline{C^+})$. Ověřte poté, že celý důkaz bude téměř beze změn, pouze v kroku tři budeme potřebovat hladší hranici.

Další význačné pozorování, založené na předchozí konstrukci je uvedeno v následujícím cvičení.

Cvičení 2.4.6. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^1$. Ukažte, že operátor E definovaný ve Větě 2.4.1 je také spojitý lineární operátor z $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ do $\mathcal{C}^1_0(\mathbb{R}^d)$.

Rozšíření provedené v prním kroku důkazu Věty 2.4.1 (rozšíření na krychli) bylo zkontruováno jakožto $\mathcal{C}^1$ funkce. Nicméně, pokud nám jde pouze o rozšíření pro Sobolevovy prostory, můžeme postupovat přímočařeji, jak uvádí následující cvičení.

Cvičení 2.4.7. Modifikujte první krok důkazu Věty 2.4.1 následujícím způsobem.

$$EU(x) := \begin{cases} U(x) & x \in \overline{C^+}, \\ U(x_1, \dots, x_{d-1}, -x_d) & x \in C^-, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^d \setminus C. \end{cases}$$

Ukažte, že $U \in W^{1,\infty}(C) \cap W^{1,1}_0(C)$. Rozmyslete si, že celý zbytek důkazu Věty 2.4.1 se pak nezmění.

Poznámka 2.4.8. Podmínka na hladkost hranice v Cvičení 2.4.5 je poněkud restriktivní. Existuje ještě jiná metoda rozšíření funkcí z $W^{k,p}(\Omega)$, tzv. Calderónova metoda (metodě z Věty 2.4.1 se říká Nikolského metoda) a ke konstrukci rozšíření pro libovolné k a $p \in (1, \infty)$ stačí $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. Touto metodou však nelze zkonstruovat rozšíření pro $p = 1$ a $p = \infty$.[9]

2.5 Věty o spojitém a kompaktním vnoření

V této části budeme studovat různá (spojitá, či kompaktní) vnoření Sobolevových prostorů. Z definice Sobolevova prostoru je zřejmé, že každá $u \in W^{k,p}(\Omega)$ patří i do $L^p(\Omega)$. Hlavním cílem je ukázat, že samotná u pak leží v prostoru „mnohem“ lepším, pokud Ω má lipschitzovskou hranici.

Připomeňme si Příklad 2.1.12. V něm jsme studovali pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ patří funkce

$$f(x) := |x|^{-\alpha}$$

do $W^{1,p}(B_1(0))$, resp. do $L^q(B_1(0))$. Ukázali jsme, že pokud $\alpha < \frac{d-p}{p}$, potom $f \in W^{1,p}(B_1(0))$, ale současně $f \in L^q(B_1(0))$ pro každé $q \in [1, \frac{dp}{d-p}]$. To na jednu stranu může naznačovat, že je-li funkce $u \in W^{1,p}(\Omega)$, pro $p < d$, potom je i $u \in L^q(\Omega)$ pro $q \in [1, \frac{dp}{d-p}]$. Na druhou stranu tento příklad říká, že pro $p < d$ můžeme nanejvýš dokázat, že $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, kde $q \leq \frac{dp}{d-p}$, vyšší exponent by totiž byl v rozporu s citovaným příkladem.

Konečně, pokud $p > d$, potom předpoklad $u \in W^{1,p}(\Omega)$ implikuje, že $-\alpha > 1 - \frac{d}{p} > 0$. Poznamenejme, že pro tato α už platí $f \in \mathcal{C}^{0,|\alpha|}(\overline{B_1(0)})$.

Tento jednoduchý příklad nás tedy vede k domněnce, že pro „rozumné“ oblasti Ω by mohlo platit

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega) & \text{pro } p \in [1, d), \\ \mathcal{C}^{0,1-\frac{d}{p}}(\overline{\Omega}) & \text{pro } p \in (d, \infty). \end{cases}$$

V dalším textu pak ukážeme, že tato domněnka je nejenom správná, ale že vnoření uvedená výše jsou optimální. Navíc ukážeme, že výše uvedená spojitá vnoření můžeme zesílit na kompaktní vnoření, tj. pro omezené dostatečně hladké oblasti dokážeme

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \begin{cases} L^q(\Omega) & \text{pro všechna } q \in [1, \frac{dp}{d-p}) \text{ pokud } p < d, \\ \mathcal{C}^{0,\mu}(\overline{\Omega}) & \text{pro všechna } \mu \in [0, 1 - \frac{d}{p}) \text{ pokud } p \in (d, \infty). \end{cases}$$

Na závěr této úvodní části tedy shrňme hlavní výsledky této kapitoly. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, potom platí následující:

1. Je-li $p \in [1, d)$, potom $\forall q \in [1, \frac{dp}{d-p}]$ platí $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, přičemž vnoření je kompaktní pro $q \in [1, \frac{dp}{d-p})$.

2. Je-li $p = d$, potom $\forall q \in [1, \infty)$ platí $W^{1,d}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ (ale $W^{1,d}(\Omega) \not\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$).

3. Je-li $p \in (d, \infty)$, potom $\forall \mu \in [0, 1 - \frac{d}{p}]$ platí $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\mu}(\Omega)$ přičemž vnoření je kompaktní pro $\mu \in [0, 1 - \frac{d}{p})$.

4. Je-li $p = \infty$, potom $W^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1}(\Omega)$ a tudíž $W^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\mu}(\Omega)$ pro libovolné $\mu \in [0, 1)$.

[9] Calderónova metoda je založena na integrální reprezentaci funkcí. Podrobnější informace (pro $p = 2$) je možné nalézt v Nečas [1967] či Ženíšek [2001], zobecnění pro $p \neq 2$ si čtenář ovládající teorii Fourierových multiplikátorů může provést sám. Omezení $p \neq 1$ a $p \neq \infty$ souvisí s tím, že $L^p - L^p$ odhady singulárních integrálů pro $p = 1$ a $p = \infty$ obecně neplatí.

2.5.1 Věty o spojitém vnoření

Jak již bylo naznačeno v úvodu této sekce, věty o spojitém (i kompaktním) vnoření se budou lišit v závislosti na tom, zda $p < d$ nebo naopak. Pro přehlednost uvedeme základní věty o vnoření (odpovídající přesně naší domněnce z úvodu této sekce) nyní a v dalším se pak budeme zabývat jejich důkazem. Nejdříve se zabývejme případem $p < d$. Definujme

$$p^\star := \frac{dp}{d-p}. \tag{2.25}$$

Potom máme

Věta 2.5.1 — Věta o vnoření $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pro $p < d$. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ a $p \in [1, d)$. Potom pro každé $q \in [1, p^\star]$ platí

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Přesněji, pro každé $q \in [1, p^\star]$ existuje konstanta C závislá pouze na p, d, q a Ω taková, že pro každé $u \in W^{1,p}(\Omega)$ platí

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{2.26}$$

Výše uvedená věta neříká nic o případu $p = d$, nicméně pro omezené oblasti je následující výsledek snadným důsledkem Věty 2.5.1.

Věta 2.5.2 — Věta o vnoření $W^{1,d}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. Pak pro každé $q \in [1, \infty)$ platí

$$W^{1,d}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Zabývejme se nyní případem $p > d$. Definujme

$$\mu^\star := 1 - \frac{d}{p}, \tag{2.27}$$

kde pro $p = \infty$ položíme $\mu^\star := 1$. Hlavním výsledkem je pak následující věta.

Věta 2.5.3 — Věta o vnoření $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ pro $p > d$. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ a $p \in (d, \infty]$. Pak pro každé $\alpha \in [0, \mu^\star]$ platí

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Přesněji, pro každé $\alpha \in [0, \mu^\star]$ existuje konstanta C závislá pouze na α, p, d a Ω taková, že pro každé $u \in W^{1,p}(\Omega)$ existuje reprezentant $u^\star \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, tj. $u^\star \in [u]$, splňující

$$\|u^\star\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \le C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Z výše uvedených vět je vidět, že případ $p = d$ je svým způsobem speciální a vnoření uvedené ve Větě 2.5.2 není „ostré“. Nicméně, jak je ilustrováno v následujícím cvičení, lepší vnoření (ve smyslu Lebesgueových prostorů) očekávat nelze.[10]

Cvičení 2.5.4. Ukažte, že funkce $f(x) := \ln\left(\ln\left(1 + \frac{1}{|x|}\right)\right)$ je pro $d \ge 2$ prvkem $W^{1,d}(B_1(0))$, ale není prvkem $L^\infty(B_1(0))$. Tedy $W^{1,d}(\Omega) \not\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

[10] V části 2.7 ukážeme, že je-li Ω omezená množina, potom

$$\left(\int_\Omega \left| u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u \,\mathrm{d}y \right|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \le C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Volbou $\Omega = B_1(0)$ a substitucí $z = x + ry$, $y \in B_1(0)$ dostaneme (proveďte podrobně)

$$\left(\int_{B_r(x)} \left| u - \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} u \,\mathrm{d}y \right|^p \mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{p}} \le Cr \|\nabla u\|_{L^p(B_r(x))}.$$

Speciálně pro $p = 1$ potom

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} \left| u - \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} u \,\mathrm{d}y \right| \mathrm{d}z &\le Cr \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} |\nabla u| \,\mathrm{d}z \\ &\le Cr \frac{1}{|B_r(x)|}\left(\int_{B_r(x)} |\nabla u|^d \,\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{d}} |B_r(x)|^{1-\frac{1}{d}} \le C \|\nabla u\|_{L^d(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Levá strana však charakterizuje prostor $BMO(\mathbb{R}^d)$ (bounded mean oscilations). Tento prostor je Banachův a funkcionál

$$[u]_{BMO(\mathbb{R}^d)} = \sup_{B_r(x) \subset \mathbb{R}^d} \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} \left| u - \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} u \,\mathrm{d}y \right| \mathrm{d}z$$

je seminormou na tomto prostoru. Tento prostor hraje významnou roli v harmonické analýze, kde často nahrazuje roli prostoru $L^\infty(\Omega)$, viz např. Stein [1993].

Důkaz věty o vnoření pro $p \leq d$

Zabývejme se nejdříve případem $p < d$, cílem je tedy dokázat Věty 2.5.1–2.5.2, kde Ω je oblast s lipschitzovskou hranicí (a tedy omezená oblast). Přesto některé výsledky, které jsou uvedeny níže, zůstanou v platnosti i pro Ω neomezenou. Nejdříve poznamenejme, že pokud $|\Omega| < \infty$, pak přímo z Hölderovy nerovnosti plyne $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pro $q \in [1, p]$. Cílem tedy bude ukázat, že q může být větší než p.

Nejdříve připomeňme (viz Poznámku 2.1.8) značení

$$\nabla u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right).$$

Potom velikost ∇u definujeme jako

$$|\nabla u| := \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2}$$

a také

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} := \||\nabla u|\|_{L^p(\Omega)}.$$

Potom si není těžké uvědomit, že výraz

$$\|u\|_p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

je ekvivalentní normou na $W^{1,p}(\Omega)$. Pro zjednodušení a také zkrácení zápisu budeme v následujícím pracovat s ∇u namísto toho, abychom detailně rozepisovali všechny parciální derivace popř. multiindexy.

Příklad 2.5.5. Pokusme se najít nutnou podmínku na q pro platnost následujícího tvrzení: Buď $p \in [1, d)$, pak existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro každou $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$ platí

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.28}$$

Vezměme si $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, pro které platí (2.28), a definujme si funkce

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x), \qquad \text{s libovolným } \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Nerovnost (2.28) má platit pro všechny funkce z $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$ s konstantou C nezávislou na u. Speciálně proto musí platit pro každou funkci u_λ. Snadným výpočtem dostaneme pomocí věty o substituci, že

$$\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} = \lambda^{-\frac{d}{q}} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$$
$$\|\nabla u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \lambda^{1-\frac{d}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

a z nerovnosti (2.28) (aplikované na u_λ) tedy plyne

$$\lambda^{-\frac{d}{q}} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C\lambda^{1-\frac{d}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Protože parametr λ lze volit libovolně, je pro platnost výše uvedené nerovnosti nezbytné, aby bylo

$$1 + \frac{d}{q} - \frac{d}{p} = 0, \text{ neboli } q = \frac{dp}{d-p}.$$

Ukážeme nyní, že nerovnost (2.28) skutečně platí pro $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Nejdříve dokážeme následující pomocné tvrzení.

Lemma 2.5.6 — Gagliardovo. Buď $i = 1, \dots, d$ a $\hat{u}_i \in L^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$ libovolné funkce s kompaktním nosičem. Pro každé i pak definujme $u_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ pomocí

$$u_i(x) := \hat{u}_i(\hat{x}_i), \qquad \text{kde} \qquad \hat{x}_i := (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d).$$

Potom pro $d \geq 2$ platí

$$\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^{d} |u_i(x)| \,\mathrm{d}x \leq \prod_{i=1}^{d} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\hat{u}_i(\hat{x}_i)|^{d-1} \widehat{\mathrm{d}x_i} \right)^{\frac{1}{d-1}} = \prod_{i=1}^{d} \|\hat{u}_i\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})},$$

kde

$$\widehat{\mathrm{d}x_i} := \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{i-1} \,\mathrm{d}x_{i+1} \cdots \mathrm{d}x_d.$$

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle dimenze d.

Krok 1: Případ $d = 2$:
Platnost lemmatu pro $d = 2$ je snadným důsledkem Fubiniho věty

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u_1(x)||u_2(x)| \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{u}_1(x_2)||\hat{u}_2(x_1)| \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2$$
$$= \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}_1(x_2)| \,\mathrm{d}x_2 \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}_2(x_1)| \,\mathrm{d}x_1 .$$

Krok 2: Indukce podle dimenze d:
Předpokládejme, že tvrzení platí pro $d-1$, a dokážeme, že platí i pro d. Díky tomu, že u_d nezávisí na x_d, získáváme identitu

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u_1| \dots |u_d| \,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_d = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\hat{u}_d| \left(\int_{\mathbb{R}} |u_1| \dots |u_{d-1}| \,\mathrm{d}x_d \right) \widehat{\mathrm{d}x_d}.$$

Vnitřní integrál přes $\mathbb{R}$ odhadneme užitím zobecněné Hölderovy nerovnosti (viz Lemma A.3.12) se všemi $p_i = d-1$ následovně

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\hat{u}_d| \left(\int_{\mathbb{R}} |u_1| \dots |u_{d-1}| \,\mathrm{d}x_d \right) \widehat{\mathrm{d}x_d} \leq \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\hat{u}_d| \prod_{i=1}^{d-1} \left(\int_{\mathbb{R}} |u_i|^{d-1} \,\mathrm{d}x_d \right)^{\frac{1}{d-1}} \widehat{\mathrm{d}x_d}.$$

Nyní použijeme Hölderovou nerovnost na integrál přes $\mathbb{R}^{d-1}$ a dostaneme ($p = d-1$, $p' = \frac{d-1}{d-2}$)

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\hat{u}_d| \prod_{i=1}^{d-1} \left(\int_{\mathbb{R}} |u_i|^{d-1} \,\mathrm{d}x_d \right)^{\frac{1}{d-1}} \widehat{\mathrm{d}x_d}$$
$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\hat{u}_d|^{d-1} \widehat{\mathrm{d}x_d} \right)^{\frac{1}{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \prod_{i=1}^{d-1} \left(\int_{\mathbb{R}} |u_i|^{d-1} \,\mathrm{d}x_d \right)^{\frac{1}{d-2}} \widehat{\mathrm{d}x_d} \right)^{\frac{d-2}{d-1}}$$
$$= \|\hat{u}_d\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \prod_{i=1}^{d-1} g_i(x_1, \dots, x_{d-1}) \,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{d-1} \right)^{\frac{d-2}{d-1}},$$

kde

$$g_i(x_1, \dots, x_{d-1}) := \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{u}_i(x_1, \dots, x_d)|^{d-1} \,\mathrm{d}x_d \right)^{\frac{1}{d-2}}$$

jsou funkce nezávislé na x_i a tedy jim příslušné $\hat{g}_i \in L^\infty(\mathbb{R}^{d-2})$ mají kompaktní nosič. Pro tato g_i pak podle indukčního předpokladu platí

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \prod_{i=1}^{d-1} g_i \,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{d-1} \leq \prod_{i=1}^{d-1} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-2}} |\hat{g}_i|^{d-2} \widehat{\mathrm{d}x_i \,\mathrm{d}x_d} \right)^{\frac{1}{d-2}}$$
$$= \prod_{i=1}^{d-1} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\hat{u}_i|^{d-1} \widehat{\mathrm{d}x_i} \right)^{\frac{1}{d-2}} = \prod_{i=1}^{d-1} \|\hat{u}_i\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})}^{\frac{d-1}{d-2}}.$$

Celkem tedy po dosazení máme

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u_1| \dots |u_d| \,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_d \leq \|\hat{u}_d\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})} \left(\prod_{i=1}^{d-1} \|\hat{u}_i\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})}^{\frac{d-1}{d-2}} \right)^{\frac{d-2}{d-1}}$$
$$= \prod_{i=1}^{d} \|\hat{u}_i\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})},$$

což jsme chtěli ukázat. ■

Nyní už můžeme přistoupit k základnímu tvrzení o vnoření pro hladké funkce s kompaktním nosičem. Připomeňme značení $p^\star$ z (2.25).

Věta 2.5.7 — Gagliardo–Nirenbergova. Buď $p \in [1, d)$. Pak pro každou $u \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^d)$ platí

$$\|u\|_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{p(d-1)}{d-p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} . \tag{2.29}$$

Důkaz. **Krok 1:** Případ $p = 1$:
Pro $p = 1$ je exponent $p^\star = \frac{d}{d-1}$. Dále pro hladké funkce s kompaktním nosičem zřejmě platí

$$u(x) = u(x_1, \dots, x_d) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_d\right) \mathrm{d}s$$

a tedy po zvětšení integračních mezí máme pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ odhad

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\nabla u\left(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_d\right)\right| \mathrm{d}s.$$

Odtud snadno nahlédneme, že

$$|u(x)|^{\frac{d}{d-1}} \leq \prod_{i=1}^{d} \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\nabla u\left(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_d\right)\right| \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{d-1}}.$$

Tuto nerovnost zintegrujeme přes $\mathbb{R}^d$ a dostaneme

$$\|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)}^{\frac{d}{d-1}} \leq \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^{d} \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\nabla u\left(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_d\right)\right| \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{d-1}} \mathrm{d}x.$$

Na pravou stranu nerovnosti použijeme Gagliardovo lemma (Lemma 2.5.6), kde volíme

$$\hat{u}_i\left(\hat{x}_i\right) := \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\nabla u\left(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_d\right)\right| \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{d-1}},$$

a výsledkem je

$$\|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)}^{\frac{d}{d-1}} \leq \prod_{i=1}^{d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u| \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{d-1}} = \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{d}{d-1}},$$

což jsme chtěli ukázat.

Krok 2: Důkaz pro libovolné $p \in (1, d)$:
Buď $v \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^d)$ a definujme si funkci $u := |v|^\gamma$. Pak pro $\gamma > 1$ je funkce $u \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^d)$. Z Kroku 1 tedy plyne, že

$$\left\||v|^\gamma\right\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} = \|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} \leq \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \left\|\nabla |v|^\gamma\right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla |v|^\gamma\right| \mathrm{d}x.$$

Ve výrazu na pravé straně spočteme gradient a použijme Hölderovu nerovnost (na pravé straně chceme mít $\|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla |v|^\gamma\right| \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \gamma |v|^{\gamma-1} |\nabla v| \,\mathrm{d}x \leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{p-1}{p}} \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Máme tedy

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |v|^{\gamma \frac{d}{d-1}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{d-1}{d}} = \left\||v|^\gamma\right\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} \leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{p-1}{p}} \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Nyní zvolíme γ tak, aby exponenty u $|v|$ byly na obou stranách stejné. Požadujeme tedy

$$\gamma \frac{d}{d-1} = (\gamma - 1) \frac{p}{p-1},$$

což je ekvivalentní volbě

$$\gamma = \frac{p\,(d-1)}{d-p} > 1,$$

kde nerovnost platí díky předpokladu $p \in (1, d)$. Finální nerovnost pak přejde na

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |v|^{\frac{pd}{d-p}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{d-1}{d}} \leq \frac{p\,(d-1)}{d-p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v|^{\frac{pd}{d-p}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{p-1}{p}} \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

z čehož ihned plyne

$$\|v\|_{L^{\frac{pd}{d-p}}(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v|^{\frac{pd}{d-p}} \right)^{\frac{d-p}{pd}} \leq \frac{p\,(d-1)}{d-p} \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

a důkaz je hotov. ∎

Na základě hustoty hladkých funkcí s kompaktním nosičem tak získáme:

Důsledek 2.5.8 (Vnoření prostorů $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ a $W_0^{1,p}(\Omega)$ pro $p \in [1,d)$). Buď $p \in [1,d)$. Potom platí:

1. $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow L^{p^\star}(\mathbb{R}^d)$ a každá $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$ splňuje nerovnost (2.29).
2. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená. Pak $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^\star}(\Omega)$ a každá $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ splňuje po dodefinování nulou vně Ω nerovnost (2.29).

Důkaz. V obou případech jsou v daném prostoru husté hladké funkce s kompaktním nosičem (u prostoru $W_0^{1,p}(\Omega)$ je to přímo definice a pro obdobné tvrzení pro $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ viz Lemma 2.2.2). Tvrzení je proto důsledkem úplnosti Lebesgueových prostorů a nerovnosti (2.29), detaily jsou ponechány čtenáři jako cvičení. ■

Nyní již můžeme přistoupit k důkazu Vět 2.5.1–2.5.2.

Důkaz Věty 2.5.1 a Věty 2.5.2. Nejdříve se zabývejme případem $p \in [1,d)$, tj. důkazem Věty 2.5.1. Protože $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, existuje podle věty o rozšíření (Věta 2.4.1) operátor rozšíření $E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$ takový, že

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \leq c\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

kde konstanta c nezávisí na u a navíc nosič rozšířené funkce Eu je kompaktní množina v $\mathbb{R}^d$.

Z Důsledku 2.5.8 pak plyne

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^{p^\star}(\Omega)} \leq \|Eu\|_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^d)} &\leq \frac{p\,(d-1)}{d-p}\,\|\nabla(Eu)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \frac{p\,(d-1)}{d-p}\,\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \leq c\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Tvrzení věty je pak důsledkem této nerovnosti, triviálního vnoření $L^{p^\star}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pro Ω omezenou a $q \in [1, p^\star]$ (viz Lemma A.3.13) a tranzitivnosti spojitého vnoření.

Uvažujme nyní případ $p = d$. Je-li $q \in [1,d]$ je důkaz zřejmý, neboť Ω je omezená, a proto $L^d(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$. Buď tedy $q > d$. Potom existuje $p_q \in [1,d)$ takové, že $q = p_q^\star = \frac{dp_q}{d-p_q}$ (tj. $p_q = \frac{dq}{d+q}$) a podle Věty 2.5.1 je

$$W^{1,p_q}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Dále pro Ω omezenou a $p_q < d$ platí $W^{1,d}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p_q}(\Omega)$. Celkem tedy

$$W^{1,d}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p_q}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

a důkaz je hotov. ■

Poznámka 2.5.9. Je důležité si uvědomit, že zatímco na $\mathbb{R}^d$ platí (2.29), pro omezenou množinu Ω s lipschitzovskou hranicí máme pouze (2.26), tj. na pravé straně (2.26) je celá norma v $W^{1,p}(\Omega)$, nikoliv pouze norma gradientu, jako je tomu v případě (2.29). Nerovnost typu (2.29) nemůže obecně platit, protože pravá strana se nezmění po změně u o konstantu. Na omezených množinách lze nerovnost typu (2.29) očekávat pouze ve speciálních případech, kdy přidání této konstanty je vyloučeno, jako je tomu například v případě $W_0^{1,p}(\Omega)$ (viz Důsledek 2.5.8).

Naproti tomu, na celém prostoru máme pouze $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d)$ pro $q \in [p, p^\star]$. Nelze totiž obecně očekávat, že bude $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$ pro $q < p$.

Přirozená otázka, která se také nabízí, je, zda předpoklad $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ je skutečně nutný. V následujícím příkladu ukážeme, že tomu tak skutečně je, pokud chceme dostat optimální vnoření.

Příklad 2.5.10. Ukážeme, že nutná podmínka pro platnost $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^\star}(\Omega)$ v třídě množin $\Omega \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$ s $\alpha \in [0,1]$ je $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. Předpokládejme, že $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ má část hranice popsanou na okolí bodu $(0,0)$ rovnicí $|y| = x^\mu$, kde $\mu > 1$ a $x \in (0,1)$, a že zbytek hranice je hladký, viz Obr. 2.5. Rozmyslete si podrobně, že potom $\Omega \in \mathcal{C}^{0,\frac{1}{\mu}}$ (je třeba uvažovat popis $x = |y|^{\frac{1}{\mu}}$, $y \in [-1,1]$).

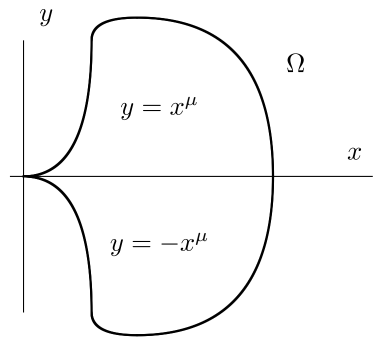
Nyní, podobně jako v Příkladu 2.1.12, uvažujme funkce typu $u(x,y) := x^{-a}$, přičemž se budeme zabývat pouze okolím počátku tj. množinou $\Omega := \{(x,y) : x \in (0,1),\, y \in (-x^\mu, x^\mu)\}$, neboť vně tuto množinu je uvažovaná funkce hladká. Potom

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^q(\Omega)}^q &= \int_0^1 \left(\int_{-x^\mu}^{x^\mu} x^{-aq}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^{\mu-aq}\,\mathrm{d}x, \\ \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p &= |a|^p \int_0^1 \left(\int_{-x^\mu}^{x^\mu} x^{-(a+1)p}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = 2|a|^p \int_0^1 x^{\mu-(a+1)p}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Odsud ihned dostáváme, že

$$\begin{aligned}u \in L^q(\Omega) &\iff q < \frac{1+\mu}{a}, \\ u \in W^{1,p}(\Omega) &\iff a < \frac{1+\mu-p}{p}.\end{aligned}$$

Tento příklad ukazuje, že pro dvoudimenzionální oblast $\Omega \in \mathcal{C}^{0,\frac{1}{\mu}}$ máme v nejlepším případě $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_\mu}(\Omega)$, kde $q_\mu = \frac{(1+\mu)p}{1+\mu-p}$. Tento příklad se dá jednoduše zobecnit do obecné dimenze d, kde je potom správná volba $q_\mu = \frac{(d-1+\mu)p}{d-1+\mu-p}$. Je vidět, že q_μ je klesající funkcí proměnné μ, nabývající v 1, tj. pro lipschitzovskou oblast, optimální hodnotu $q_1 = p^\star$, a v nekonečnu (tj. pro oblast se spojitou hranicí) pouze hodnoty $q_\infty = p$.



Obrázek 2.5: Oblast Ω z Příkladu 2.5.10

Na závěr této části si ukážeme, že nerovnost (2.29) umožňuje dokazovat interpolační tvrzení typu

$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \le C \|\nabla u\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|u\|^{1-\alpha}_{L^q(\mathbb{R}^d)},$$

pro vhodně zvolená q, r, p a α.

Příklad 2.5.11. Ukážeme, že[11]

1. Pro $d = 2$ je $\|v\|_{L^4(\mathbb{R}^2)} \le 2^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^2)}$.

2. Pro $d = 3$ je $\|v\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} \le \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{3}{4}} \|\nabla v\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|v\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}$.

Budeme vycházet z nerovnosti (2.29) pro $p = 1$. Vezměme pro $d = 2$ $u = |v|^2$ a počítejme za pomocí Hölderovy nerovnosti

$$\int_{\mathbb{R}^2} |v|^4 \, \mathrm{d}x \le \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla |v|^2| \, \mathrm{d}x \right)^2 \le 4 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v||v| \, \mathrm{d}x \right)^2 \le 4 \|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Odmocněním dostaneme požadovanou nerovnost.

Pro $d = 3$ volme $u = |v|^{\frac{8}{3}}$, pak

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |v|^4 \, \mathrm{d}x &\le \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |v|^{\frac{8}{3}}| \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{3}{2}} \le \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v||v|^{\frac{5}{3}} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{3}{2}} \\
&\le \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v||v|^{\frac{1}{3}}|v|^{\frac{4}{3}} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{3}{2}} \\
&\le \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \|\nabla v\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|v\|^2_{L^4(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

Nyní stačí vydělit $\|v\|^2_{L^4(\mathbb{R}^3)}$ a odmocněním dostaneme požadovanou nerovnost pro $d = 3$.

Na základě analogických úvah je možné dokázat obecné tvrzení, jež je přenecháno čtenáři jako cvičení.

Cvičení 2.5.12 (Obecná interpolační nerovnost)**.** Ukažte, že pro libovolné $\alpha \in [0, 1)$ a libovolná $r, p, q \in [1, \infty]$ splňující

$$\frac{1}{r} = \alpha \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{d} \right) + (1 - \alpha) \frac{1}{q}$$

existuje konstanta $C = C(p, q, r, d)$ taková, že pro každé $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ platí

$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \le C \|\nabla u\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|u\|^{1-\alpha}_{L^q(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.30}$$

Navíc, pokud $p < d$, lze volit i $\alpha = 1$. Z hustoty je potom možné rozšířit tyto nerovnosti i na funkce $u \in L^r(\mathbb{R}^d)$, pro které je $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

[11]Konstanty, které získáme, nejsou optimální a dají se najít lepší, viz např. Temam [2001].

Důkaz věty o vnoření pro $p > d$

V této části se budeme zabývat důkazem Věty 2.5.3. Začneme s klíčovým tvrzením, ze kterého pak odvodíme veškeré důsledky.

Lemma 2.5.13 — Morreyovo I. Buď $u \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^d)$. Pro libovolné $\mu \in (0,1]$ označme

$$[\nabla u]_{L^{1,\mu}(\mathbb{R}^d)} := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{\rho>0} \int_{[0,\rho]^d} \frac{|\nabla u(x+y)|}{\rho^{d-1+\mu}}\,\mathrm{d}y. \tag{2.31}$$

Potom pro každé $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ platí

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq \frac{2\sqrt{d}}{\mu}|x_1 - x_2|^{\mu}[\nabla u]_{L^{1,\mu}(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.32}$$

Důkaz. Zvolme si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ libovolně, ale pevně a označme C_ρ uzavřenou krychli o hraně délky ρ takovou, že x_1 a x_2 leží na protilehlých stranách této krychle. Pak platí

$$\rho \leq |x_1 - x_2| \leq \sqrt{d}\rho. \tag{2.33}$$

Díky hladkosti u dále pro každé $x \in C_\rho$ a $i = 1, 2$ získáme odhad

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(x_i)| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{ds}u(x_i + s(x - x_i))\,\mathrm{d}s\right| \\
&= \left|\int_0^1 \nabla u(x_i + s(x - x_i)) \cdot (x - x_i)\,\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \int_0^1 |\nabla u(x_i + s(x - x_i))|\,|x - x_i|\,\mathrm{d}s \\
&\leq \sqrt{d}\rho \int_0^1 |\nabla u(x_i + s(x - x_i))|\,\mathrm{d}s,
\end{aligned} \tag{2.34}$$

kde jsme v poslední nerovnosti využili odhad (2.33).

Dále nás bude zajímat „vzdálenost“ střední hodnoty u na krychli C_ρ od hodnot v bodech x_i. Využitím vlastností Lebesgueova integrálu získáme

$$\left|\int_{C_\rho} \frac{u(x)}{\rho^d}\,\mathrm{d}x - u(x_i)\right| = \left|\int_{C_\rho} \frac{u(x) - u(x_i)}{\rho^d}\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{C_\rho} \frac{|u(x) - u(x_i)|}{\rho^d}\,\mathrm{d}x.$$

Díky odhadu (2.34) a Fubiniho větě můžeme tuto nerovnost dále upravit do tvaru

$$\left|\int_{C_\rho} \frac{u(x)}{\rho^d}\,\mathrm{d}x - u(x_i)\right| \leq \sqrt{d}\int_0^1 \int_{C_\rho} \frac{|\nabla u(x_i + s(x - x_i))|}{\rho^{d-1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s. \tag{2.35}$$

Nyní provedeme substituci

$$z := x_i + s(x - x_i), \quad C^i_{\rho s} := \left\{z \in \mathbb{R}^d : z = x_i + s(x - x_i) \text{ pro nějaké } x \in C_\rho\right\},$$

kde $C^i_{\rho s}$ je nyní krychle o hraně délky ρs, a výsledný integrál pak má tvar

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{C_\rho} \frac{|\nabla u(x_i + s(x - x_i))|}{\rho^{d-1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s &= \int_0^1 \int_{C^i_{\rho s}} \frac{|\nabla u(z)|}{s^d\rho^{d-1}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}s \\
&= \rho^\mu \int_0^1 s^{\mu-1}\left(\int_{C^i_{\rho s}} \frac{|\nabla u(z)|}{(\rho s)^{d-1+\mu}}\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Konečně tedy dosazením této nerovnosti do (2.35) a využitím předpokladů na u dostaneme

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_\rho} \frac{u(x)}{\rho^d}\,\mathrm{d}x - u(x_i)\right| &\leq \sqrt{d}\rho^\mu \int_0^1 s^{\mu-1}\left(\int_{C^i_{\rho s}} \frac{|\nabla u(z)|}{(\rho s)^{d-1+\mu}}\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}s \\
&\leq \sqrt{d}[\nabla u]_{L^{1,\mu}(\mathbb{R}^d)}\rho^\mu \int_0^1 s^{\mu-1}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{\sqrt{d}}{\mu}[\nabla u]_{L^{1,\mu}(\mathbb{R}^d)}\rho^\mu.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Pomocí trojúhelníkové nerovnosti pak už lehce dokončíme celý důkaz. Vskutku

$$
\begin{aligned}
|u(x_1) - u(x_2)| &= \left| \int_{C_\rho} \frac{u(x)}{\rho^d} \,\mathrm{d}x - u(x_2) - \int_{C_\rho} \frac{u(x)}{\rho^d} \,\mathrm{d}x + u(x_1) \right| \\
&\le \left| \int_{C_\rho} \frac{u(x)}{\rho^d} \,\mathrm{d}x - u(x_2) \right| + \left| \int_{C_\rho} \frac{u(x)}{\rho^d} \,\mathrm{d}x - u(x_1) \right| \\
&\le \frac{2\sqrt{d}}{\mu} [u]_{L^{1,\mu}(\mathbb{R}^d)} \rho^\mu
\end{aligned}
$$

a tedy (2.32) platí. ■

Je důležité si uvědomit, že pro odhad (2.32) není na pravé straně zapotřebí informace na celém $\mathbb{R}^d$, ale stačí kvalitativně stejný člen beroucí v úvahu pouze nějaké okolí bodů x_1 a x_2. Toto zobecnění nyní ukážeme.

Lemma 2.5.14 — Morreyovo II. Buď $u \in \mathcal{C}^1((-2R, 2R)^d)$. Potom pro každé $x_1, x_2 \in (-R, R)^d$ platí

$$
|u(x_1) - u(x_2)| \le \frac{2\sqrt{d}}{\mu} |x_1 - x_2|^\mu \sup_{x \in (-R,R)^d} \sup_{\rho \in (0,R)} \int_{(-\rho,\rho)^d} \frac{|\nabla u(x+y)|}{\rho^{d-1+\mu}} \,\mathrm{d}y. \tag{2.37}
$$

Důkaz. Důkaz snadno plyne z předchozího lehkou modifikací odhadu (2.35) a je přenechán čtenáři jako cvičení. ■

S pomocí Morreyova lemmatu I (Lemma 2.5.13) nyní už poměrně lehce ukážeme následující odhad dávající do souvislosti normy prostorů $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{C}_0^{0,\mu}(\mathbb{R}^d)$.

Věta 2.5.15 — Morreyova I. Buď $p \in (d, \infty)$ a volme $\mu := 1 - \frac{d}{p}$. Potom pro každou $u \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^d)$ platí

$$
\|u\|_{\mathcal{C}_0^{0,\mu}(\mathbb{R}^d)} \le \frac{4\sqrt{d}}{\mu} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.38}
$$

Důkaz. Připomeňme si definici normy v $\mathcal{C}_0^{0,\mu}(\mathbb{R}^d)$, viz (A.4), tj.

$$
\|u\|_{\mathcal{C}_0^{0,\mu}(\mathbb{R}^d)} := \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \sup_{\{x,y \in \mathbb{R}^d:\, x \neq y\}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\mu}.
$$

Krok 1: Odhad diferencí:
V tomto kroku použijeme Morreyovo lemma I (Lemma 2.5.13). Nejdříve díky Hölderově nerovnosti a naší volbou μ získáme odhad

$$
\int_{(0,\rho)^d} \frac{|\nabla u(x+y)|}{\rho^{d-1+\mu}} \,\mathrm{d}y \le \left(\int_{(0,\rho)^d} |\nabla u(x+y)|^p \,\mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \frac{\rho^{\frac{d}{p'}}}{\rho^{d-1+\mu}} \le \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},
$$

což okamžitě vede k nerovnosti (připomeňme definici (2.31))

$$
[\nabla u]_{L^{1,\mu}(\mathbb{R}^d)} \le \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.
$$

S využitím (2.32) tedy získáme

$$
|u(x_1) - u(x_2)| \le \frac{2\sqrt{d}}{\mu} |x_1 - x_2|^\mu \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},
$$

neboli

$$
\sup_{\{x_1,x_2 \in \mathbb{R}^d:\, x_1 \neq x_2\}} \frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\mu} \le \frac{2\sqrt{d}}{\mu} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.39}
$$

Krok 2: Odhad $\|u\|_\infty$:
Zvolme si libovolně $x, y \in \mathbb{R}^d$. Pak je dle (2.39)

$$
|u(x) - u(y)| \le \frac{2\sqrt{d}}{\mu} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} |x-y|^\mu,
$$

odkud s užitím trojúhelníkové nerovnosti získáme

$$
|u(x)| \le |u(y)| + \frac{2\sqrt{d}}{\mu} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} |x-y|^\mu.
$$

Tuto nerovnost zintegrujeme podle y na množině $C_\rho := \{y : \forall i\ 2|y_i - x_i| \le \rho\}$ a výsledkem je

$$|u(x)||C_\rho| \le \int_{C_\rho} |u(y)|\,\mathrm{d}y + |C_\rho| \frac{2\rho^\mu \sqrt{d}\,\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}}{\mu}.$$

Integrál na pravé straně odhadneme Hölderovou nerovností tak, abychom dostali normu u v $L^p(\mathbb{R}^d)$

$$|u(x)||C_\rho| \le |C_\rho|^{\frac{p-1}{p}} \|u\|_{L^p(C_\rho)} + |C_\rho| \frac{2\rho^\mu \sqrt{d}\,\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}}{\mu}, \tag{2.40}$$

odkud (volíme například $\rho = 1$)

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |u(x)| \le \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \frac{2\sqrt{d}}{\mu} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.41}$$

Z nerovností (2.39) a (2.41) pak pro $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ plyne

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\mu}(\mathbb{R}^d)} \le C(p,d) \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \tag{2.42}$$

a důkaz je hotov. ■

Stejně jako v případě Morreyova lemmatu můžeme výše uvedený odhad lokalizovat.

Věta 2.5.16 — Morreyova II. Buď $p \in (d,\infty)$ a volme $\mu := 1 - \frac{d}{p}$. Potom pro každou $u \in \mathcal{C}^1((-2R,2R)^d)$ platí

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\mu}([-R,R]^d)} \le \frac{\|u\|_{L^p((-2R,2R)^d)}}{R^{1-\mu}} + (1+R^\mu)\frac{2\sqrt{d}}{\mu} \|u\|_{W^{1,p}((-2R,2R)^d)}. \tag{2.43}$$

Důkaz. Důkaz je opět snadnou modifikací předchozího důkazu, zejména volby ρ v (2.40), a je přenechán čtenáři jako cvičení. ■

Díky hustotě $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ v $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$ platí nerovnost (2.38) i pro $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Zde si ale musíme dát pozor, neboť $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$ znamená, že třída ekvivalentních funkcí, které se mohou lišit na množině míry nula, patří do $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Proto musíme být opatrní a pracovat s vhodným reprezentantem této třídy a níže uvedeme důsledek předchozích vět.

Důsledek 2.5.17. Buď $p \in (d,\infty)$. Pak pro $\mu = 1 - \frac{d}{p}$ platí

$$W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\mu}(\mathbb{R}^d).$$

Přesněji, pro každé $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$ existuje reprezentant $u^\star \in \mathcal{C}^{0,\mu}(\mathbb{R}^d)$, $u^\star \in [u]$, takový, že

$$\|u^\star\|_{\mathcal{C}^{0,\mu}(\mathbb{R}^d)} \le \frac{4\sqrt{d}}{\mu} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}.$$

Důkaz. Ponecháváme na rozmyšlenou čtenáři. ■

Z důsledku například plyne, že pro $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$, $p > d$, jsou všechny body $\mathbb{R}^d$ Lebesgueovy body (viz Definici A.3.18) funkce $u^\star$ a tudíž

$$u^\star(x) = \lim_{r\to 0+} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u(y)\,\mathrm{d}y.$$

Nyní již přistoupíme k důkazu hlavní věty této části.

Důkaz Věty 2.5.3. Protože $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, existuje podle Věty 2.4.1 spojitý lineární operátor rozšíření

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

a existuje $C = C(d,\Omega)$ tak, že pro každé $p \in [1,\infty]$ platí

$$Eu = u \quad \text{skoro všude v } \Omega \qquad \|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

a nosič prodloužené funkce Eu je kompaktní množina v $\mathbb{R}^d$.

Zabývejme se nejdříve případem $p \in (d,\infty)$. Z Důsledku 2.5.17 pak plyne ($\mu^\star := 1 - \frac{d}{p}$)

$$\|u^\star\|_{\mathcal{C}^{0,\mu^\star}(\overline{\Omega})} = \|(Eu)^\star\|_{\mathcal{C}^{0,\mu^\star}(\overline{\Omega})} \le \frac{4\sqrt{d}}{\mu^\star} \|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \le \frac{C(d,\Omega)}{\mu^\star} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Tvrzení věty pro $p \in (d, \infty)$ je pak důsledkem této nerovnosti, vnoření $\mathcal{C}^{0,\mu^\star}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ pro Ω omezenou a $\alpha \le \mu^\star$ (viz Cvičení A.2.11) a tranzitivnosti spojitého vnoření.

Nyní dokončíme důkaz pro $p = \infty$. Protože je Ω omezená množina, je zřejmě $W^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$ pro libovolné $p < \infty$. Tudíž z předchozího plyne, že

$$\|u^\star\|_{\mathcal{C}^{0,1-\frac{d}{p}}(\overline{\Omega})} \le \frac{C(d,\Omega)}{1-\frac{d}{p}} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} .$$

Limitním přechodem $p \to \infty$ pak snadno obdržíme tvrzení věty. ■

Důsledek 2.5.18 (Pokud $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ pak $\mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega}) = W^{1,\infty}(\Omega)$). Nechť $\Omega \in C^{0,1}$. Potom $\mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega}) = W^{1,\infty}(\Omega)$.

Důkaz. Již víme (viz Důsledek 2.3.2), že pro každou otevřenou množinu platí $\mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\Omega)$. Na druhou stranu, pro lipschitzovské oblasti jsme právě obdrželi, že $W^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega})$ a tedy pro tyto oblasti nutně platí $\mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega}) = W^{1,\infty}(\Omega)$. ■

Jedinou „slabinou“ výše uvedeného postupu je použití Rademacherovy věty v důkazu věty o rozšíření. Tuto slabinu nyní odstraníme a dokážeme mnohem obecnější tvrzení.

Jak jsme již zjistili, viz Lemma 2.1.4, slabá derivace sobolevovské funkce souhlasí s klasickou ve skoro všech bodech, kde klasická derivace existuje. Navíc (viz Poznámku 2.3.5) víme, že slabá derivace je skutečně velmi dobrou aproximací derivace klasické. Nyní tyto dvě tvrzení zobecníme a ukážeme existenci totálního diferenciálu skoro všude pro funkce $u \in W^{1,p}(\Omega)$ s $p > d$. Tím zároveň jako speciální tvrzení dokážeme i Rademacherovu větu. Připomeňme, že funkce u má v x totální diferenciál pokud existuje $a \in \mathbb{R}^d$ tak, že

$$\lim_{y \to x} \frac{|u(y) - u(x) - a \cdot (y-x)|}{|x-y|} = 0.$$

Poznamenejme, že v tomto případě je a rovno gradientu u v bodě x v klasickém smyslu. V tomto oddílu budeme vždy uvažovat spojitého reprezentanta třídy $[u]$, neboť dle Věty 2.5.3 platí $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$.

Věta 2.5.19 Buď $u \in W^{1,p}(\Omega)$ a $p \in (d, \infty]$. Potom má funkce u totální diferenciál skoro všude na Ω a klasická derivace je v bodech, kde totální diferenciál existuje, rovná derivaci slabé.

Důkaz. Buď nejdříve $p \in (d,\infty)$ a $x \in \Omega$ libovolný. Předpokládejme dále, že $r > 0$ je tak malé, aby $B_{4r}(x) \subset \Omega$. Z hustoty hladkých funkcí víme, že můžeme u libovolně přesně aproximovat pomocí hladkých funkcí na $B_{2r}(x)$. Můžeme tedy použít Morreyovo lemma II (Lemma 2.5.14) a pro libovolné $y \in B_r(x)$ a $v \in W^{1,p}(B_{2r}(x))$ máme odhad[12]

$$|v(x) - v(y)| \le C(d,p)|x-y|^\mu \sup_{z \in B_r(x)} \sup_{\rho \in (0,r)} \int_{B_\rho(z)} \frac{|\nabla v(z')|}{\rho^{d-1+\mu}} \, \mathrm{d}z'.$$

Dále můžeme odhadnout výraz na pravé straně díky Hölderově nerovnosti jako

$$\int_{B_\rho(z)} \frac{|\nabla v(z')|}{\rho^{d-1+\mu}} \, \mathrm{d}z' \le C(d) \rho^{1-\mu-\frac{d}{p}} \left(\int_{B_\rho(z)} |\nabla v(z')|^p \, \mathrm{d}z' \right)^{\frac{1}{p}}$$

a tedy

$$|v(x) - v(y)| \le C(d,p) r^{1-\frac{d}{p}} \left(\int_{B_{2r}(x)} |\nabla v(z)|^p \, \mathrm{d}z \right)^{\frac{1}{p}} . \tag{2.44}$$

V dalším se omezíme na množinu Lebesgueových bodů $\nabla u(x)$ a $|\nabla u(x)|^p$, tj na množinu takových $x \in \Omega$ pro která platí

$$\lim_{r \to 0+} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} \left(|\nabla u(x) - \nabla u(z)| + |\nabla u(x) - \nabla u(z)|^p \right) dz = 0.$$

Z Věty o Lebesgueových bodech (viz Větu A.3.19 a Cvičení A.3.23) plyne, že výše uvedený vztah platí pro skoro všechna $x \in \Omega$. Pro libovolný bod $x \in \Omega$, pro který platí výše uvedený vztah, položme

$$v(y) := u(y) - u(x) - \nabla u(x) \cdot (y - x).$$

Pak zřejmě $\nabla v(y) = \nabla u(y) - \nabla u(x)$ a $v \in W^{1,p}(B_{4r}(x))$ pro dostatečně malá $r > 0$. Navíc víme, že v je spojitá a $v(x) = 0$. Pro každé $y \in B_r(x)$ tedy máme

$$|u(y) - u(x) - \nabla u(x) \cdot (y-x)| = |v(y)| = |v(y) - v(x)|.$$

[12] Přestože je Morreyovo lemma formulováno pro krychle, lehkým přeškálováním můžeme obdržet obdobné tvrzení i pro koule.

Volme nyní $y \in \partial B_r(x)$ libovolně (a tedy $r = |x-y|$) a z nerovnosti (2.44) dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{|u(y)-u(x)-\nabla u(x)\cdot(y-x)|}{|x-y|} &= \frac{|v(x)-v(y)|}{r}\\ &\le C(p,d)\left(\int_{B_{2r}(x)} \frac{|\nabla v(z)|^p}{r^d}\,\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= C(p,d)\left(\int_{B_{2r}(x)} \frac{|\nabla u(x)-\nabla u(z)|^p}{r^d}\,\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le C(p,d)\left(\frac{1}{|B_{2r}(x)|}\int_{B_{2r}(x)} |\nabla u(x)-\nabla u(z)|^p\,\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Uvažujme nyní $y \to x$, a tedy $r \to 0+$ ve výše uvedené nerovnosti. Protože uvažujeme pouze taková x, která jsou Lebesgueovy body ∇u, vidíme, že

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to x} \frac{|u(y)-u(x)-\nabla u(x)\cdot(y-x)|}{|x-y|}\\ &\le C(p,d)\lim_{r\to 0}\left(\frac{1}{|B_{2r}(x)|}\int_{B_{2r}(x)} |\nabla u(x)-\nabla u(z)|^p\,\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{p}} = 0.\end{aligned}$$

Funkce u má tedy klasický totální diferenciál v bodě x. Navíc tento **klasický** totální diferenciál je roven **slabému** gradientu $\nabla u(x)$. Zbývající část tvrzení pro $p \in (d,\infty)$ je zřejmá.

Krok 2: $p = \infty$
Je-li $u \in W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)$, potom zřejmě $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ pro všechna $p < \infty$ a můžeme proto použít první část důkazu. ■

2.5.2 Věty o kompaktním vnoření

Nyní zesílíme tvrzení předchozí sekce a zcela v souladu s úvodem této kapitoly dokážeme příslušná kompaktní vnoření pro Sobolevovy prostory funkcí definovaných na lipschitzovských oblastech. Navíc ukážeme, že některá tvrzení platí i pro méně hladké oblasti, speciálně pro oblasti se spojitou hranicí. Opět budeme zvlášť studovat případy $p < d$, $p = d$ a $p > d$. Připomeňme nejdříve značení $p^\star = \frac{dp}{d-p}$ a $\mu^\star = 1 - \frac{d}{p}$. Hlavním výsledkem této části pro $p < d$ je následující věta.

Věta 2.5.20 — O kompaktním vnoření $W^{1,p}(\Omega)$ pro $p < d$. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ a $p \in [1,d)$. Potom pro každé $q \in [1,p^\star)$ platí

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Pro $p \ge d$ pak máme následující výsledek.

Věta 2.5.21 — O kompaktním vnoření $W^{1,p}(\Omega)$ pro $p \ge d$. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ a $p \in [d,\infty)$. Pak pro každé $q \in [1,\infty)$ platí

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Pokud je navíc $p > d$, pak pro každé $\alpha \in [0,\mu^\star)$ platí

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$$

a tedy $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Jak bylo ukázáno v Příkladu 2.5.10, předpoklad na lipschitzovskost hranice je klíčový, jinak nemůžeme dostat (kompaktní) vnoření do kýžených prostorů. Na druhou stranu ten samý příklad indikuje, že pro oblasti s hölderovsky spojitou hranicí přeci jenom jisté vylepšení integrovatelnosti lze očekávat a tedy podobně i jistý druh kompaktního vnoření. Že tomu tak skutečně je, pak uvádí následující věta, která bude klíčová pro důkaz Věty 2.5.20.

Věta 2.5.22 Buď $\Omega \in \mathcal{C}^0$ a $p \in [1,\infty)$. Potom platí

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Jako triviální důsledek (rozmyslete podrobně) tak dostáváme.

Důsledek 2.5.23. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^0$ a $p \in [1,d)$. Pak pro všechna $q \in [1,p]$ platí

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Nyní se budeme věnovat důkazům výše uvedených vět.

Důkaz Věty 2.5.22. Z definice plyne, že $W^{1,p}(\Omega)$ je spojitě vnořen do $L^p(\Omega)$. K důkazu kompaktnosti takového vnoření nám tedy stačí ukázat, že množiny omezené ve $W^{1,p}(\Omega)$ jsou totálně omezené v $L^p(\Omega)$. Nechť $C^* > 0$ a $A \subset W^{1,p}(\Omega)$ jsou taková, že pro každé $u \in A$ platí $\|u\|_{1,p} \le C^*$. Naším cílem je ukázat, že tato množina je totálně omezená v $L^p(\Omega)$. K tomu použijeme ekvivalentní charakterizaci pomocí Kolmogorovovy věty (Věta A.3.39). Dodefinujme každé $u \in A$ nulou vně Ω a ověřme předpoklady Kolmogorovovy věty. Předpoklad 1., tj. stejná omezenost, je splněn triviálně, neboť $\|u\|_p \le \|u\|_{1,p}$. Předpoklad 3., tj. stejnoměrný pokles v nekonečnu, je opět splněn triviálně, neboť Ω je omezená množina. Věnujme se tedy ověření předpokladu 2., tedy stejné spojitosti v průměru.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné, ale pevné. Definujme $\delta_0 := \frac{\varepsilon}{2C^*}$ a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\delta_0 < 1$. Pro libovolné $h \in \mathbb{R}^d$ můžeme najít jednotkový vektor $e \in \mathbb{R}^d$ takový, že $h = |h|e$. V dalším tedy pro každé h budeme uvažovat tento předpis. Nyní použijeme Lemma o souvislosti diferenčního podílu a slabé derivace III (Lemma 2.3.7) a pokud $|h| \le \delta_0$, získáme (připomeňme, že $|e| = 1$ a $\|u\|_{1,p} \le C^*$)

$$\begin{aligned} \|r_h u - u\|_{L^p(\Omega_{2|h|})} &= |h| \|\Delta_e^{|h|} u\|_{L^p(\Omega_{2|h|})} \le |h| \, \|\nabla u \cdot e\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le \delta_0 \, \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \le \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Proto díky trojúhelníkové nerovnosti a vlastnostem posunutí máme (připomeňme, že vně Ω je u dodefinováno nulou)

$$\begin{aligned} \|r_h u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &\le \|r_h u - u\|_{L^p(\Omega_{2|h|})} + \|r_h u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^d \setminus \Omega_{2|h|})} \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + 2\|u\|_{L^p(\Omega \setminus \Omega_{4|h|})}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Nyní se soustředíme na odhad druhého členu, který se týká chování u hranice. Přidržíme se značení z Definice 2.2.11. Díky spojitosti hranice Ω máme M kartézských souřadných systémů a zobrazení T_r z lokálního souřadného systému (x'_r, x_{r_d}) do (x', x_d) a množiny

$$V_r^+ = \left\{ (x'_r, x_{r_d}) \in \mathbb{R}^d | \; x'_r \in \Delta_r, \; a_r(x'_r) < x_{rd} < a_r(x'_r) + \beta \right\},$$

kde a_r jsou spojité funkce. Díky spojitosti funkcí a_r existuje $\delta_1 > 0$ takové, že kdykoliv $|h| \le \delta_1$ pak $\Omega \setminus \Omega_{4|h|} \subset \bigcup_{r=1}^M T_r(V_r^+)$. Dále, buď systém $\{\phi_r\}_{r=1}^{M+1}$ rozdělení jednotky z Věty 2.2.15, kde funkce $\phi_r \in \mathcal{C}_0^\infty(T_r(V_r))$ pro všechna $r = 1, \dots, M$ a $\phi_{M+1} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Položme $u_r := u\phi_r$ (a tedy $u = \sum_{r=1}^{M+1} u_r$). Pak zcela jistě existuje $\delta_2 > 0$ takové, že pro všechna $|h| \le \delta_2$ platí $\operatorname{supp} u_{M+1} \cap (\Omega \setminus \Omega_{4|h|}) = \emptyset$. Navíc existuje konstanta $C(\Omega)$ taková, že pro všechna $r = 1, \dots, M$

$$\|u_r\|_{W^{1,p}(T_r(V_r^+))} \le C(\Omega) \|u\|_{1,p} \le C(\Omega) C^*. \tag{2.47}$$

Z výše uvedeného navíc plyne, že poslední člen na pravé straně (2.46) můžeme odhadnout jako

$$\|u\|_{L^p(\Omega \setminus \Omega_{4|h|})} \le \sum_{r=1}^M \|u_r\|_{L^p(T_r(V_r^+) \setminus \Omega_{4|h|})}.$$

Nakonec si pro libovolé $\gamma \le \beta$ označme následující podmožiny V_r^+

$$V_{r,\gamma}^+ := \left\{ (x'_r, x_{r_d}) \in \mathbb{R}^d | \; x'_r \in \Delta_r, \; a_r(x'_r) < x_{r_d} < a_r(x'_r) + \gamma \right\}.$$

Nyní opět využijeme spojitosti a_r. Není těžké ukázat, že existuje spojitá rostoucí fukce γ taková, že $\gamma(0) = 0$, a splňující navíc

$$\Omega \setminus \Omega_{4|h|} \subset \bigcup_{r=1}^M T_r(V_{r,\gamma(4|h|)}^+),$$

pro každé $|h| < \min(\delta_1, \delta_2)$. Odtud a pomocí věty o substituci získáme

$$\|u\|_{L^p(\Omega \setminus \Omega_{4|h|})} \le \sum_{r=1}^M \|u_r\|_{L^p(T_r(V_{r,\gamma(4|h|)}^+))} = \sum_{r=1}^M \|\tilde{u}_r\|_{L^p(V_{r,\gamma(4|h|)}^+)}, \tag{2.48}$$

kde $\tilde{u}_r(x'_r, x_{r_d}) := u_r(T_r(x'_r, x_{r_d}))$.

Zřejmě tedy stačí odhadnout jednotlivé integrály na pravé straně právě uvedené nerovnosti. Díky spojitosti hranice Ω máme hustotu hladkých funkcí a můžeme formálně pokračovat[13]. Pro libovolné, ale pevné $r \in \{1, \dots, M\}$, a libovolné $x_r \in V_r^+$ máme (připomeňme, že $\tilde{u}_r(x'_r, a_r(x'_r + \beta)) = 0$) díky Hölderově nerovnosti

$$|\tilde{u}_r(x'_r, x_{r_d})|^p = \left| \int_{x_{r_d}}^{a_r(x'_r)+\beta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \tilde{u}_r(x'_r, s) \, \mathrm{d}s \right|^p \le \beta^{p-1} \int_{a_r(x'_r)}^{a_r(x'_r)+\beta} |\nabla \tilde{u}_r(x'_r, s)|^p \, \mathrm{d}s.$$

[13]Přesněji, u_r můžeme aproximovat posloupností hladkých funkcí, pro které dokážeme rigorózně kýžené odhady, které nicméně po limitním přechodu $n \to \infty$ zůstanou v platnosti i pro původní u_r.

Tuto nerovnost nyní zintegrujeme přes $V^+_{r,\gamma(4|h|)}$ a tedy

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}_r\|^p_{L^p(V^+_{r,\gamma(4|h|)})} &= \int_{V^+_{r,\gamma(4|h|)}} |\tilde{u}_r(x'_r, x_{r_d})|^p \, dx'_r \, dx_{r_d} \\
&\le \beta^{p-1} \int_{\Delta_r} \int_{a(x'_r)}^{a(x'_r)+\gamma(4|h|)} \int_{a_r(x'_r)}^{a_r(x'_r)+\beta} |\nabla \tilde{u}_r(x'_r, s)|^p \, ds \, dx_{r_d} \, dx'_r \\
&= \beta^{p-1}\gamma(4|h|) \int_{V^+_r} |\nabla \tilde{u}_r(x_r)|^p \, dx_r \\
&= \beta^{p-1}\gamma(4|h|) \int_{T_r(V^+_r)} |\nabla u(x)|^p \, dx \le \beta^{p-1}\gamma(4|h|)(C^*)^p,
\end{aligned}$$

kde jsme pro poslední nerovnost využili (2.47). Dosazením do (2.46) a (2.48) tak získáme (připomeňme, že u je dodefinovaná nulou vně Ω)

$$\|r_h u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le \frac{\varepsilon}{2} + 2\beta^{\frac{1}{p'}} C^* (\gamma(4|h|))^{\frac{1}{p}}.$$

Definujme tedy konečně

$$\delta_3 := \frac{1}{4}\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon^p}{4^p \beta^{p-1}(C^*)^p}\right) > 0.$$

Potom pro každé $|h| < \min(\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ platí

$$\|r_h u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$$

a důkaz je hotov. ■

Poznámka 2.5.24. Nejobtížnější částí důkazu bylo odhadnutí členu u hranice. Pokud bychom ale zesílili předpoklady nebo zeslabili tvrzení, důkaz by se významně zjednodušil. Pokud bychom například uvažovali oblast s lipschitzovskou hranicí, pak bychom z vět o spojitém vnoření věděli, že $\|u\|_q \le C$ pro nějaké $q > p$, a tedy z Hölderovy nerovnosti

$$\|u\|_{L^p(\Omega\setminus\Omega_{4|h|})} \le \|u\|_q |\Omega \setminus \Omega_{4|h|}|^{\frac{q-p}{qp}}.$$

Vidíme, že člen na pravé straně může být jakkoliv malý v závislosti na velikosti $|h|$. Obdobným způsobem bychom také mohli „jednodušeji“ dokázat kompaktní vnoření $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ pro $\Omega \in C^0$, kdykoliv $1 \le q < p$.

Nyní konečně přistoupíme k důkazům hlavních vět této sekce.

Důkaz Věty 2.5.20. Buď $p < d$. Je-li navíc $q < p$, je důkaz snadný, neboť z Věty 2.5.22 víme

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \implies W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Zabývejme se tedy případem $q \in (p, p^\star)$. Protože $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, z Věty o spojitém vnoření pro $p < d$ (Věta 2.5.1) víme, že $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^\star}(\Omega)$. Použitím Interpolační Hölderovy nerovnosti (viz Lemma A.3.14) dostáváme pro každé $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le \|u\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\alpha}_{L^{p^\star}(\Omega)} \le C(p,\Omega) \|u\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\alpha}_{1,p},$$

kde $\alpha \in (0,1)$ je zvoleno tak, aby $\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^\star}$. Buď nyní $A \subset W^{1,p}(\Omega)$ libovolná omezená uzavřená množina. Díky Větě 2.5.22 víme, že tato množina je kompaktní v $L^p(\Omega)$ a tedy pro každé $\varepsilon > 0$ existuje ε-síť $\{u_i\}_{i=1}^k \subset A$, tj. pro každé $u \in A$ platí

$$\min_i \|u - u_i\|_p \le \varepsilon.$$

Díky výše uvedené interpolaci dostáváme, že

$$\min_i \|u - u_i\|_q \le C(p,\Omega)\|u - u_i\|^{\alpha}_p \|u - u_i\|^{1-\alpha}_{1,p} \le C(p,q,\Omega,A)\varepsilon^{\alpha}.$$

Vidíme tedy, že pro dané A a $q < p^\star$ můžeme zkonstruovat konečné pokrytí libovolně malými koulemi a důkaz je hotov. ■

Důkaz Věty 2.5.21. První tvrzení je zřejmým důsledkem Věty 2.5.2 a Věty 2.5.20. Druhé tvrzení pak plyne z Věty 2.5.3 a kompaktního vnoření mezi prostory hölderovsky spojitých funkcí (viz Větu A.2.10). ■

2.5.3 Obecná sobolevovská vnoření

V minulé sekci jsme se zabývali pouze vnořeními prostorů $W^{1,p}(\Omega)$. Nyní tato tvrzení zobecníme

Věta 2.5.25 — Obecná sobolevovská vnoření. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $k \in \mathbb{N}$ a $p \in [1, \infty]$. Buď dále $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ libovolné. Označme

$$m_0 := \frac{1}{p} - \frac{k-j}{d} \qquad \text{a je–li } m_0 \neq 0 \qquad m := \frac{1}{m_0}.$$

Potom platí následující:

1. Je-li $m_0 > 0$, pak
   (a) $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,m}(\Omega)$,
   (b) pro každé $m_1 \in [1, m)$ platí $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{j,m_1}(\Omega)$.
2. Je-li $m_0 = 0$, pak pro každé $q \in [1, \infty)$ platí $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$.
3. Je-li $m_0 < 0$, definujme $\mu := -dm_0$ a platí
   (a) pokud $\mu \in (0, 1)$, pak $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{j,\mu}(\overline{\Omega})$ a pro každé $\alpha \in [0, \mu)$ máme $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}^{j,\alpha}(\overline{\Omega})$,
   (b) pokud $\mu = 1$, pak
   $$\begin{cases} p \neq \infty: \ \forall \alpha \in [0,1): \ W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}^{j,\alpha}(\overline{\Omega}) \\ p = \infty: \ W^{k,\infty}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k-1,1}(\overline{\Omega}), \end{cases}$$
   (c) pokud $\mu > 1$, pak pro každé $\alpha \in [0, 1]$ platí $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}^{j,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Důkaz. Důkaz je založen na matematické indukci a vět o vnoření pro prostory $W^{1,p}(\Omega)$. Proto je ponechán čtenáři jako lehké cvičení. ■

Výše uvedená věta, jak již bylo řečeno, je založena na matematické indukci a výsledcích o vnoření pro $W^{1,p}(\Omega)$. Tyto výsledky, jak jsme ukázali, jsou přesné a nemohou být vylepšeny[14]. Proto se může zdát, že výsledky Věty 2.5.25 jsou optimální. Obecně tomu tak také je vyjma jediného případu $W^{d,1}(\Omega)$. V tomto případě můžeme indukcí obdržet vnoření $W^{d,1}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,d}(\Omega)$. Poznamenejme, že toto vnoření je skutečně přesné a nemůže být lepší v řeči Sobolevových prostorů. O prostoru $W^{1,d}(\Omega)$ však víme, že není vnořen do prostoru spojitých ba ani omezených funkcí. Na druhou stranu jsme se však při každém kroku indukce dopustili „nepatrné“ chyby „neviditelné“ pro Sobolevovy prostory. Vše tedy uvedeme na pravou míru poslední větou o sobolevovských vnořeních.

Věta 2.5.26 — O vnoření $W^{d,1}(\Omega)$. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. Pak $W^{d,1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^0_B(\Omega)$, kde

$$\mathcal{C}^0_B(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}(\Omega); \sup_{x \in \Omega} |u(x)| =: \|u\|_{\mathcal{C}^0_B(\Omega)} < \infty\}.$$

Důkaz. Důkaz je založen na následujícím lemmatu, ve kterém je výše uvedené vnoření ukázáno pro případ kvádrů, a na vlastnostech oblastí s lipschitzovskou hranicí, speciálně na tom, že každou takovou oblast mohu (až na množinu míry nula) napsat jako nejvýše spočetné sjednocení otevřených kvádrů. ■

Zbývá dokázat výše zmíněné lemma. Označme d-dimenzionální kvádr pomocí R, tedy

$$R = \{x \in \mathbb{R}^d; a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \dots, d\}$$

a d-1-dimenzionální kvádr jako R', tedy

$$R' = \{x \in \mathbb{R}^{d-1}; a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \dots, d-1\}.$$

Potom můžeme dokázat následující výsledek.

Lemma 2.5.27 Platí:

$$W^{d,1}(R) \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{R}).$$

Důkaz. Protože hladké funkce až do hranice jsou husté ve $W^{d,1}(R)$, stačí dokázat vnoření pro tyto funkce. Použitím věty o střední hodnotě máme

$$\|u\|_{L^1(R)} = \int_{a_d}^{b_d} \Big(\int_{R'} |u(x', x_d)| \, \mathrm{d}x' \Big) \, \mathrm{d}x_d = (b_d - a_d) \int_{R'} |u(x', \sigma)| \, \mathrm{d}x'$$

pro jisté $\sigma \in (a_d, b_d)$. Potom pro libovolné $x_d \in (a_d, b_d)$

$$|u(x', x_d)| \le |u(x', \sigma)| + \int_\sigma^\xi |D_d u(x', t)| \, \mathrm{d}t.$$

[14] na škále Lebesgueových prostorů; pro obecnější prostory funkcí jako jsou například Besovovy prostory viz např. Bahouri et al. [2011].

Integrací přes R' a poté přes (a_d, b_d) tedy máme

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,\xi)\|_{L^1(R')} \leq & \|u(\cdot,\sigma)\|_{L^1(R')} + \|D_d u\|_{L^1(R)} \\ \leq & (b_d - a_d)^{-1}\|u\|_{L^1(R)} + \|D_d u\|_{L^1(R)}.\end{aligned}$$

Proto pro x_d jako výše

$$\|u(\cdot,x_d)\|_{W^{n-1,1}(R')} \leq C\|u\|_{W^{n,1}(R)},$$

kde C závisí pouze na $(b_d - a_d)$. Indukcí tedy dostaneme

$$\|u(\cdot,x_2,x_3,\ldots,x_d)\|_{W^{1,1}((a_1,b_1))} \leq C\|u\|_{W^{n,1}(R)}.$$

Věta o střední hodnotě nám proto dává existenci $\sigma \in (a_1, b_1)$ takového, že

$$\|u(\cdot,x_2,x_3,\ldots,x_d)\|_{W^{1,1}((a_1,b_1))} = (b_1 - a_1)u(\sigma,x_2,\ldots,x_d).$$

Proto

$$\begin{aligned}|u(x)| &\leq |u(\sigma,x_2,\ldots,x_d)| + \int_\sigma^{x_1} |D_1(t,x_2,\ldots,x_d)|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{1}{(b_1-a_1)}\|u(\cdot,x_2,x_3,\ldots,x_d)\|_{W^{1,1}((a_1,b_1))} \\ &\quad + \|D_1 u(\cdot,x_2,\ldots,x_d)\|_{W^{1,1}((a_1,b_1))} \\ &\leq C\|u\|_{W^{n,1}(R)},\end{aligned}$$

čímž je důkaz ukončen. ■

2.6 Věty o stopách

Protože Sobolevovy prostory zavádíme kvůli formulaci okrajových úloh pro parciální diferenciální rovnice, musíme mít možnost hovořit o hodnotách sobolevovských funkcí na hranici oblasti Ω. Tento problém je možné řešit dvojím způsobem. Jednak je možné použít pojmu kapacita množiny (tento přístup je možno nalézt například v Mazja [1985]), častější je ovšem postup založený na rozšíření jistého lineárního operátoru. Tento postup použijeme zde.

Jestliže je $u \in W^{1,p}(\Omega)$ pro $p > d$, potom za patřičných předpokladů na hladkost Ω existuje reprezentant $u^\star \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ tak, že $u = u^\star$ skoro všude na Ω. Hodnota na hranici je tudíž dobře definovaná a víme, že funkce je omezená (a dokonce hölderovsky spojitá). Proto se v celém oddílu soustředíme pouze na případ $p \leq d$.

V tomto případě již není jasné, co je hodnota funkce na hranici, neboť d-dimenzionální míra hranice je nula. Na druhou stranu víme, že v $W^{1,p}(\Omega)$ jsou husté funkce hladké až do hranice (alespoň pro $\Omega \in \mathcal{C}^0$), zúžení funkce $u \in W^{1,p}(\Omega)$ na $\partial\Omega$ má tedy smysl pro hustou podmnožinu $W^{1,p}(\Omega)$. Stačí proto studovat, jestli je operátor zúžení funkce $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ na $\partial\Omega$ omezený jako operátor z $W^{1,p}(\Omega)$ do jistého prostoru funkcí definovaného na hranici. Ukážeme nyní, že tomu tak skutečně je.

2.6.1 Plošný integrál a prostory $L^p(\partial\Omega)$

V celém oddílu budeme, pokud nebude řečeno jinak, pracovat pouze s hranicí typu $\mathcal{C}^{0,1}$ a budeme důsledně používat značení z Definice 2.2.11. Dále nechť $\{\phi_r\}_{r=1}^M$ je rozklad jednotky na jistém okolí $\partial\Omega$ odpovídající námi zvolenému pokrytí. Nejdříve si zadefinujeme pojem množiny nulové míry.

Definice 2.6.1 — Množina nulové míry na $\partial\Omega$. Buď $A \subset \partial\Omega$. řekneme, že A je nulové míry právě tehdy, když pro každé $r \in \{1,\ldots,M\}$ platí

$$|\{x' \in \Delta_r : T_r(x'_r, a_r(x'_r)) \in A\}| = 0.$$

Podobně jako v případě standardní Lebesgueovy míry, budeme v dalším používat terminologii **skoro všude na $\partial\Omega$**, pokud dané tvrzení platí pro všechna $x \in \partial\Omega \setminus A$, kde A je množina nulové míry.

Dále pokračujeme s definicí měřitelné funkce.

Definice 2.6.2 — Měřitelné funkce na $\partial\Omega$. Buď $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$. řekneme, že funkce f je měřitelná právě tehdy, když pro každé $r \in \{1,\ldots,M\}$ platí, že $f \circ T_r$ je měřitelná na Δ_r vzhledem k $d-1$ rozměrné Lebesgueově míře.

Konečně nyní přistoupíme k definici plošného integrálu.

Definice 2.6.3 — Integrál $\int_{\partial\Omega} \mathrm{d}S$. Buď $u : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ měřitelná. Označme $u_r(x) := u(x)\phi_r(x)$. Potom integrál přes $\partial\Omega$ funkce u je definován jako

$$\int_{\partial\Omega} u\,\mathrm{d}S := \sum_{r=1}^M \int_{\Delta_r} u_r(T_r(x'_r, a_r(x'_r)))\sqrt{1 + |\nabla a_r(x'_r)|^2}\,\mathrm{d}x'_r, \tag{2.49}$$

pokud každý z integrálů na pravé straně existuje a je konečný.

Poznámka 2.6.4. Poznamenejme, že v předchozí definici je každý integrand na pravé straně (2.49) měřitelná funkce. Je tomu tak proto, že u je měřitelná a tedy díky hladkosti ϕ_r je i u_r měřitelná. Navíc, protože a_r jsou lipschitzovské, pak dle Rademacherovy věty (Věta A.2.12) existuje ∇a_r skoro všude na Δ_r a navíc je měřitelný.

Výše zadefinovaný plošný integrál závisí na první pohled na tom, jakou parametrizaci (popis) $\partial\Omega$ jsme zvolili. Že tomu tak ale není, je uvedeno v následující klíčové větě.

Věta 2.6.5 — Nezávislost plošného integrálu na parametrizaci. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ libovolná. Buď $\{a_{r1}, \Delta_{r1}, T_{r1}\}_{r=1}^{M_1}$ a $\{a_{r2}, \Delta_{r2}, T_{r2}\}_{r=1}^{M_2}$ dva libovolné (vyhovující Definici 2.2.11) popisy hranice. Buď dále $\{\phi_{r1}\}_{r=1}^{M_1}$ a $\{\phi_{r2}\}_{r=1}^{M_2}$ jim odpovídající dvě (libovolné) rozdělení jedničky. Potom u je měřitelná vzhledem k první parametrizaci právě tehdy, když je měřitelná k druhé parametrizaci. Navíc pro každou měřitelnou u platí

$$\begin{aligned}&\sum_{r1=1}^{M_1}\int_{\Delta_{r1}} u_{r1}(T_{r1}(x'_{r1}, a_{r1}(x'_{r1})))\sqrt{1+|\nabla a_{r1}(x'_{r1})|^2}\,\mathrm{d}x'_{r1}\\ &=\sum_{r2=1}^{M_2}\int_{\Delta_{r2}} u_{r2}(T_{r2}(x'_{r2}, a_{r2}(x'_{r2})))\sqrt{1+|\nabla a_{r2}(x'_{r2})|^2}\,\mathrm{d}x'_{r2}\end{aligned} \tag{2.50}$$

a tedy plošný integrál z u nezávisí na volbě parametrizace $\partial\Omega$.

Důkaz. Důkaz první části věty o měřitelnosti je přenechán čtenáři. V dalším se soustředíme na důkaz rovnosti (2.50). Protože $\{\phi_{r1}\}$ a $\{\phi_{r2}\}$ jsou rozdělení jedničky v okolí hranice $\partial\Omega$, dostáváme identitu

$$\begin{aligned}&\sum_{r2=1}^{M_2}\int_{\Delta_{r2}} u_{r2}(T_{r2}(x'_{r2}, a_{r2}(x'_{r2})))\sqrt{1+|\nabla a_{r2}(x'_{r2})|^2}\,\mathrm{d}x'_{r2}\\ &=\sum_{r2=1}^{M_2}\int_{\Delta_{r2}} u\phi_{r2}(T_{r2}(x'_{r2}, a_{r2}(x'_{r2})))\sqrt{1+|\nabla a_{r2}(x'_{r2})|^2}\,\mathrm{d}x'_{r2}\\ &=\sum_{r2=1}^{M_2}\sum_{r1=1}^{M_1}\int_{\Delta_{r2}} u\phi_{r1}\phi_{r2}(T_{r2}(x'_{r2}, a_{r2}(x'_{r2})))\sqrt{1+|\nabla a_{r2}(x'_{r2})|^2}\,\mathrm{d}x'_{r2}\\ &=\sum_{r2=1}^{M_2}\sum_{r1=1}^{M_1}\int_{\Delta_{r2}} u_{r1}\phi_{r2}(T_{r2}(x'_{r2}, a_{r2}(x'_{r2})))\sqrt{1+|\nabla a_{r2}(x'_{r2})|^2}\,\mathrm{d}x'_{r2}.\end{aligned} \tag{2.51}$$

Nyní se budeme soustředit na poslední integrál. Označme si nyní

$$(\partial\Omega)^{r1,r2} := \partial\Omega \cap \operatorname{supp}\phi_{r1} \cap \operatorname{supp}\phi_{r2}.$$

V dalším budeme uvažovat pouze případy, kdy $(\partial\Omega)^{r1,r2}$ je množina nenulové míry (jinak by byl příslušný integrál v (2.51) identicky roven nule. Pro tyto množiny pak zadefinujeme jim příslušné lokální popisy hranice

$$\begin{aligned}\Lambda_{r1}^{r2} &:= (T_{r1})^{-1}(\partial\Omega)^{r1,r2}, \quad \Delta_{r1}^{r2} := \{x'_{r1} \in \Delta_{r1} : x'_{r1} = a_{r1}(x'_{r1})\},\\ \Lambda_{r2}^{r1} &:= (T_{r2})^{-1}(\partial\Omega)^{r1,r2}, \quad \Delta_{r2}^{r1} := \{x'_{r2} \in \Delta_{r2} : x'_{r2} = a_{r2}(x'_{r2})\}.\end{aligned}$$

Zadefinujme nyní zobrazení $\varphi : \Delta_{r2}^{r1} \to \Delta_{r1}^{r2}$ předpisem

$$\varphi(x'_{r2}) := \big((T_{r1})^{-1}(T_{r2}(x'_{r2}, a_{r2}(x'_{r2})))\big)'.$$

Lze snadno ověřit, že toto zobrazení je prosté a na (důkaz tohoto tvrzení je přenechán čtenáři). Navíc s pomocí tohoto zobrazení můžeme přepsat poslední integrál v (2.51) jako

$$\begin{aligned}&\int_{\Delta_{r2}} u_{r1}\phi_{r2}(T_{r2}(x'_{r2}, a_{r2}(x'_{r2})))\sqrt{1+|\nabla a_{r2}(x'_{r2})|^2}\,\mathrm{d}x'_{r2}\\ &=\int_{\Delta_{r2}} u_{r1}\phi_{r2}(T_{r1}(\varphi(x'_{r2}), a_{r1}(\varphi(x'_{r2}))))\sqrt{1+|\nabla a_{r2}(x'_{r2})|^2}\,\mathrm{d}x'_{r2}.\end{aligned} \tag{2.52}$$

Na tento integrál nyní použijeme větu o substituci. Zbývá nám tedy vyjádřit Jakobián zobrazení φ a zároveň vyjádřit ∇a_{r_2}. Pro jednoduchost dalšího zápisu definujme nyní dvě pomocná zobrazení

$$\Sigma_{r1}(x'_{r1}) := T_{r1}((x'_{r1}, a_{r1}(x'_{r1}))), \qquad \Sigma_{r2}(x'_{r2}) := T_{r2}((x'_{r2}, a_{r2}(x'_{r2})))$$

a dvě matice derivací

$$A_{r1}(x'_{r1}) := \frac{\partial(x'_{r1}, a_{r1}(x'_{r1}))}{\partial x'_{r1}}, \qquad A_{r2}(x'_{r2}) := \frac{\partial(x'_{r2}, a_{r2}(x'_{r2}))}{\partial x'_{r2}},$$

tj.

$$A^{ij}_{r1}(x'_{r1}) := \begin{cases} \delta_{ij} & i < d, \\ \dfrac{\partial a_{r1}(x'_{r1})}{\partial (x'_{r1})_j} & i = d, \end{cases} \qquad A^{ij}_{r2}(x'_{r2}) := \begin{cases} \delta_{ij} & i < d, \\ \dfrac{\partial a_{r2}(x'_{r2})}{\partial (x'_{r2})_j} & i = d. \end{cases}$$

Navíc, protože T_{r1} a T_{r2} jsou pouze otočení a posunutí, existují ortogonální matice Q_{r1} a Q_{r2} takové, že

$$\begin{aligned} \nabla_{r1}\Sigma_{r1}(x'_{r1}) &:= \frac{\partial \Sigma_{r1}(x'_{r1})}{\partial x'_{r1}} = Q_{r1}A_{r1}(x'_{r1}), \\ \nabla_{r2}\Sigma_{r2}(x'_{r2}) &:= \frac{\partial \Sigma_{r2}(x'_{r2})}{\partial x'_{r2}} = Q_{r2}A_{r2}(x'_{r2}). \end{aligned}$$

Nyní použijeme Sylvestrovo pravidlo pro determinant matice a definici matice A_{r2} a získáme (index T značí transponovanou matici a $\mathbb{I}_i$ značí d-dimenzionální jednotkovou matici)

$$\begin{aligned} 1 + |\nabla_{r2}a_{r2}(x'_{r2})|^2 &= \det\left(\mathbb{I}_1 + \nabla_{r2}a_{r2}(x'_{r2})(\nabla_{r2}a_{r2}(x'_{r2}))^T\right) \\ &= \det\left(\mathbb{I}_{d-1} + (\nabla_{r2}a_{r2}(x'_{r2}))^T\nabla_{r2}a_{r2}(x'_{r2})\right) \\ &= \det\left((A_{r2}(x'_{r2}))^T A_{r2}(x'_{r2})\right) \\ &= \det\left((A_{r2}(x'_{r2}))^T (Q_{r2})^T Q_{r2}A_{r2}(x'_{r2})\right), \end{aligned}$$

kde poslední rovnost plyne z faktu, že Q_{r2} je ortogonální. Nyní za použití definice Σ_{r1}, Σ_{r2} a φ a díky řetízkovému pravidlu (které je možno použít, neboť a_{r1} i a_{r2} jsou lipschitzovské funkce) obdržíme identitu

$$\begin{aligned} 1+&|\nabla_{r2}a_{r2}(x'_{r2})|^2 = \det\left((A_{r2}(x'_{r2}))^T (Q_{r2})^T Q_{r2}A_{r2}(x'_{r2})\right) \\ &= \det\left((Q_{r2}A_{r2}(x'_{r2}))^T Q_{r2}A_{r2}(x'_{r2})\right) \\ &= \det\left((\nabla_{r2}\Sigma_{r2}(x'_{r2}))^T \nabla_{r2}\Sigma_{r2}(x'_{r2})\right) \\ &= \det\left((\nabla_{r2}\Sigma_{r1}(\varphi(x'_{r2})))^T \nabla_{r2}\Sigma_{r1}(\varphi(x'_{r2}))\right) \\ &= \det\left((\nabla_{r1}\Sigma_{r1}(\varphi(x'_{r2}))\nabla_{r2}\varphi(x'_{r2}))^T \nabla_{r1}\Sigma_{r1}(\varphi(x'_{r2}))\nabla_{r2}\varphi(x'_{r2})\right) \\ &= |\det \nabla_{r2}\varphi(x'_{r2})|^2 \det\left((\nabla_{r1}\Sigma_{r1}(\varphi(x'_{r2})))^T \nabla_{r1}\Sigma_{r1}(\varphi(x'_{r2}))\right) \\ &= |\det \nabla_{r2}\varphi(x'_{r2})|^2 \det\left(Q_{r1}A_{r1}(\varphi(x'_{r2})))^T Q_{r1}A_{r1}(\varphi(x'_{r2}))\right) \\ &= |\det \nabla_{r2}\varphi(x'_{r2})|^2 \det\left(A_{r1}(\varphi(x'_{r2})))^T A_{r1}(\varphi(x'_{r2}))\right) \\ &= |\det \nabla_{r2}\varphi(x'_{r2})|^2 \left(1 + |\nabla_{r1}a_{r1}(\varphi(x'_{r2}))|^2\right). \end{aligned}$$

Tuto identitu nyní použijeme v (2.52) a díky větě o substituci získáme

$$\begin{aligned} &\int_{\Delta_{r2}} u_{r1}\phi_{r2}(T_{r2}(x'_{r2}, a_{r2}(x'_{r2})))\sqrt{1 + |\nabla a_{r2}(x'_{r2})|^2}\,\mathrm{d}x'_{r2} \\ &= \int_{\Delta_{r2}} u_{r1}\phi_{r2}(\Sigma_{r1}(\varphi(x'_{r2}))\sqrt{1 + |\nabla a_{r1}(\varphi(x'_{r2}))|^2}\,|\det \nabla_{r2}\varphi(x'_{r2})|^2\,\mathrm{d}x'_{r2} \\ &= \int_{\Delta_{r1}} u_{r1}\phi_{r2}(\Sigma_{r1}(x'_{r1}))\sqrt{1 + |\nabla a_{r1}(x'_{r1})|^2}\,\mathrm{d}x'_{r1} \\ &= \int_{\Delta_{r1}} u_{r1}\phi_{r2}(T_{r1}(x'_{r1}, a_{r1}(x'_{r1})))\sqrt{1 + |\nabla a_{r1}(x'_{r1})|^2}\,\mathrm{d}x'_{r1}. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Konečně použitím (2.53) v (2.51) a faktu, že ϕ_{r2} je rozdělení jedničky, získáme

$$\begin{aligned} &\sum_{r2=1}^{M_2}\int_{\Delta_{r2}} u_{r2}(T_{r2}(x'_{r2}, a_{r2}(x'_{r2})))\sqrt{1 + |\nabla a_{r2}(x'_{r2})|^2}\,\mathrm{d}x'_{r2} \\ &= \sum_{r2=1}^{M_2}\sum_{r1=1}^{M_1}\int_{\Delta_{r1}} u_{r1}\phi_{r2}(T_{r1}(x'_{r1}, a_{r1}(x'_{r1})))\sqrt{1 + |\nabla a_{r1}(x'_{r1})|^2}\,\mathrm{d}x'_{r1} \\ &= \sum_{r1=1}^{M_1}\int_{\Delta_{r1}} u_{r1}(T_{r1}(x'_{r1}, a_{r1}(x'_{r1})))\sqrt{1 + |\nabla a_{r1}(x'_{r1})|^2}\,\mathrm{d}x'_{r1}, \end{aligned} \tag{2.54}$$

což je kýžená identita (2.50). Důkaz je tím hotov. ■

Plošný integrál je tak dobře (a jednoznačně) definován a můžeme proto přistoupit k definici Lebesgueových prostorů na $\partial\Omega$. Tato definice je v podstatě přímočaré zobecnění prostorů $L^p(\Omega)$.

Definice 2.6.6 — Prostory $L^p(\partial\Omega)$. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ a buď u funkce definovaná skoro všude na $\partial\Omega$. Řekneme, že funkce u je prvkem $L^p(\partial\Omega)$, $p \in [1,\infty)$, právě když

$$\int_{\partial\Omega} |u|^p \, \mathrm{d}S < \infty.$$

Dále řekneme, že funkce u je prvkem $L^\infty(\partial\Omega)$, právě když

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\partial\Omega} |u(x)| < \infty.$$

Na prostorech $L^p(\partial\Omega)$ budeme nadále uvažovat následující normu

$$|||u|||_{L^p(\partial\Omega)} := \begin{cases} \left(\int_{\partial\Omega} |u|^p \, \mathrm{d}S\right)^{\frac{1}{p}} & p \in [1,\infty), \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\partial\Omega} |u(x)| & p = \infty. \end{cases} \tag{2.55}$$

Obdobně jako v klasických Lebesgueových prostorech chápeme prvky v $L^p(\partial\Omega)$ jakožto třídu ekvivalentních prvků, tj. říkáme, že $u \sim v$, právě tehdy, když $u = v$ skoro všude na $\partial\Omega$. S touto konvencí pak můžeme dokázat následující větu.

Věta 2.6.7 — Vlastnosti prostorů $L^p(\partial\Omega)$. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. Potom je $L^p(\partial\Omega)$ s normou definovanou v (2.55) Banachův prostor, který je separabilní pro $p \in [1,\infty)$ a reflexivní pro $p \in (1,\infty)$.

Důkaz. Důkaz se provede obdobně jako pro standardní Lebesgueovy prostory a lze jej nalézt např. v Kufner et al. [1977] nebo Nečas [1967]. ■

Poznámka 2.6.8. Připomeňme, že je-li $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, potom je dle Rademacherovy věty (Věta A.2.12) funkce $a_r(\cdot)$ diferencovatelná skoro všude na Δ_r a existuje konstanta $C > 0$ taková, že $\left|\frac{\partial a_r}{\partial x'_{r_i}}\right| \leq C < \infty$ skoro všude na Δ_r. Proto pro $p \in [1,\infty)$ můžeme místo normy (2.55) používat ekvivalentní normu

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} = \left(\sum_{r=1}^{M} \int_{\Delta_r} |u_r(T_r(x'_r, a_r(x'_r)))|^p \, \mathrm{d}x'_r\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.56}$$

se kterou se nám bude lépe pracovat.

Nejenom že díky lipschitzovskosti hranice můžeme uvažovat pouze výše uvedenou normu, následující lemma říká, že další ekvivalentní norma může být zadefinována bez pomocí rozdělení jedničky $\{\phi_r\}_{r=1}^M$.

Lemma 2.6.9 Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, u měřitelná funkce definovaná skoro všude na $\partial\Omega$, taková, že je nenulová pouze na $T_r(\Lambda_r)$ pro nějaké $r \in \{1,\ldots,M\}$ pevné. Nechť dále pro jisté p platí, že $\int_{\Delta_r} |u(T_r(x'_r, a_r(x'_r)))|^p \, \mathrm{d}x'_r < \infty$. Pak $u \in L^p(\partial\Omega)$ a navíc existuje kladná konstanta $C = C(\partial\Omega)$ taková, že

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \left(\int_{\Delta_r} |u(T_r(x'_r, a_r(x'_r)))|^p \, \mathrm{d}x'_r\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Důkaz. Důkaz je snadným důsledkem definice a lze jej nalézt např. v Kufner et al. [1977] nebo Nečas [1967]. ■

2.6.2 Věta o stopách pro $W^{1,p}(\Omega)$

Nyní přistoupíme ke stěžejnímu výsledku této části, který nám umožní v teorii okrajových úloh pro PDR hovořit o hodnotách sobolevovské funkce na hranici $\partial\Omega$.

Věta 2.6.10 — O operátoru stop pro $W^{1,p}(\Omega)$ s $p \in [1,d)$. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. Definujme lineární spojitý operátor stopy $T : \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \to \mathcal{C}(\partial\Omega)$ pomocí

$$Tu := u\,|_{\partial\Omega}\,.$$

Pro libovolné $p \in [1,d)$ označme

$$p^\sharp := \frac{dp-p}{d-p} \qquad \text{tj. } \frac{1}{p^\sharp} = \frac{1}{p} - \frac{p-1}{p(d-1)}.$$

Potom existuje jednoznačné rozšíření operátoru T takové, že je lineárním zobrazením

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\partial\Omega)$$

a je omezené (a tedy spojité) pro všechna $q \in [1, p^\sharp]$.

Důkaz. **Krok 1:** Redukce na hladké funkce:
Předpokládejme, že ukážeme platnost následujícího tvrzení

$$\forall v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}): \ \|Tv\|_{L^q(\partial\Omega)} \leq C(q, \partial\Omega) \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} . \tag{2.57}$$

Poznamenejme, že pro hladké funkce je operátor Tv dobře definován. Potom díky Větě 2.2.15 víme, že pro každé $u \in W^{1,p}(\Omega)$ existuje posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ taková, že $u_n \to u$ v $W^{1,p}(\Omega)$. Díky operátoru T a díky vztahu (2.57) je pak posloupnost $\{Tu_n\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská i v $L^q(\partial\Omega)$. Z úplnosti prostoru $L^q(\partial\Omega)$ (viz Větu 2.6.7) pak plyne existence limitního prvku posloupnosti $\{Tu_n\}_{n=1}^\infty$ v $L^q(\partial\Omega)$. Můžeme tedy zadefinovat

$$Tu := \lim_{n\to\infty} Tu_n.$$

Zřejmě platí, že definice je nezávislá na výběru aproximující posloupnosti (důkaz tohoto tvrzení je přenechán čtenáři) a tedy operátor T má všechny požadované vlastnosti. Zbývá tedy se zabývat platností (2.57). Navíc, díky tomu, že $d-1$ dimenzionální míra hranice Ω je konečná, díky Hölderově nerovnosti platí, že pro každé $q \in [1, p^\sharp]$ máme $\|v\|_{L^q(\partial\Omega)} \leq C(p^\sharp, \partial\Omega) \|v\|_{L^{p^\sharp}(\partial\Omega)}$. Namísto (2.57) stačí tedy ověřit pouze

$$\forall v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}): \ \|v\|_{L^{p^\sharp}(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} . \tag{2.58}$$

Krok 2: Lokalizace a rozklad jednotky:
Přidržme se opět značení v Definici 2.2.11 a buď $\{\phi_r\}_{r=1}^M \in \mathcal{C}_0^\infty(T_r(V_r))$ rozklad jednotky na jistém okolí $\partial\Omega$. Označme $u_r := u\phi_r$ a pak tedy $\operatorname{supp} u_r \subset T_r(V_r)$. Předpokládejme nyní, že platí

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\Delta_r} |u_r(T_r(x'_r, a_r(x'_r)))|^{p^\sharp} \,\mathrm{d}x'_r\right)^{\frac{p}{p^\sharp}} \\
&\quad\leq C \int_{\Delta_r} \int_{a_r(x'_r)}^{a_r(x'_r)+\beta} \Big(|\nabla_{x_r} u_r(T_r(x_r))|^p + |u_r(T_r(x_r))|^p \Big) \,\mathrm{d}x'_r \,\mathrm{d}x_{r_d}.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Potom použitím ekvivalence norem (viz (2.56)) a standardní věty o substituci (připomeňme, že T_r jsou ortogonální transformace) dostáváme

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^{p^\sharp}(\partial\Omega)} &\leq C \sum_{r=1}^M \|u_r\|_{L^{p^\sharp}(\partial\Omega)} \leq C \sum_{r=1}^M \|u_r \circ T_r\|_{W^{1,p}(V_r)} \\
&= C \sum_{r=1}^M \|u_r\|_{W^{1,p}(T_r(V_r))} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} ,
\end{aligned}$$

kde jsme v poslední nerovnosti využili faktu, že ϕ_r jsou hladké funkce. Zbývá tedy ověřit platnost (2.59) pro hladké funkce.

Krok 3: Důkaz nerovnosti (2.59):
Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že T_r je identické zobrazení (pokud by tomu tak nebylo, stačí pouze uvažovat korespondující pootočení souřadnic) a tedy, že $T_r(V_r^+) = V_r^+$. Buď $p > 1$ a $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. Z definice u_r (ϕ_r má kompaktní nosič ve V_r) vyplývá, že pro každé $x' \in \Delta_r$ platí $u_r(x'_r, a_r(x'_r) + \beta) = 0$. Uvažujme nejdříve případ $p > 1$ a tedy i $p^\sharp > 1$. Díky hladkosti u_r ihned dostáváme, že $|u_r|^{p^\sharp} \in \mathcal{C}^1(\overline{V_r^+})$. Pokud tedy označíme

$$v(x') := |u_r(x', a(x'))|^{\frac{dp-p}{d-p}},$$

dostaneme

$$\begin{aligned}
v(x') &= |u_r(x', a(x'))|^{\frac{dp-p}{d-p}} - |u_r(x', a(x') + \beta)|^{\frac{dp-p}{d-p}} \\
&= -\int_{a(x')}^{a(x')+\beta} \frac{\partial}{\partial s} \left(|u_r(x', s)|^{\frac{dp-p}{d-p}} \right) \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Přímočarým výpočtem tak ihned dostáváme

$$v(x') \leq p^\sharp \int_{a(x')}^{a(x')+\beta} |\nabla u_r(x', s)| \, |u_r(x', s)|^{\frac{d(p-1)}{d-p}} \,\mathrm{d}s.$$

Tuto nerovnost zintegrujeme přes Δ_r a díky Hölderovy nerovnosti (Věta A.3.11) získáme

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta_r} |v(x')| \,\mathrm{d}x' &\leq p^\sharp \int_{\Delta_r} \int_{a(x')}^{a(x')+\beta} |\nabla u_r(x', s)| \, |u_r(x', s)|^{\frac{d(p-1)}{d-p}} \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}x' \\
&= p^\sharp \int_{V_r^+} |\nabla u_r(x)| \, |u_r(x)|^{\frac{d(p-1)}{d-p}} \,\mathrm{d}x \leq p^\sharp \|\nabla u_r\|_{L^p(V^+)} \|u_r\|_{L^{\frac{dp}{d-p}}(V^+)}^{\frac{d(p-1)}{d-p}} .
\end{aligned}$$

Protože $V_r^+ \in \mathcal{C}^{0,1}$ (důkaz této vlastnosti přenecháváme čtenáři jako cvičení), můžeme použít Větu o spojitém vnoření $p < d$ (Věta 2.5.1) a odhadnout poslední člen pomocí $W^{1,p}$-normy. Celkem tedy dostáváme

$$\|u_r\|_{L^{p^\sharp}(\Lambda_r)} \leq C(d,p)\,\|u_r\|_{W^{1,p}(V_r^+)}\,, \tag{2.60}$$

kde konstanta $C(d,p)$ zůstává omezená pokud $p \to 1_+$. Limitním přechodem tedy získáme platnost (2.60) i pro $p = 1$. Nerovnost (2.59) zřejmě plyne přímo z (2.60) a důkaz je hotov. ■

V případě $p \geq d$ je situace mnohem jednodušší a platí následující tvrzení.

Věta 2.6.11 — O operátoru stop pro $W^{1,p}(\Omega)$ pro $p \geq d$. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ a T operátor stop definovaný ve Větě 2.6.10. Potom pro každé $q \in [1,\infty)$ je T spojitý z $W^{1,d}(\Omega)$ do $L^q(\partial\Omega)$. Navíc pro každé $p \in (d,\infty]$ a $q \in [1,\infty]$ je T spojitý z $W^{1,d}(\Omega)$ do $L^q(\partial\Omega)$.

Důkaz. Situace $p = d$ je analogická situaci ve Větě 2.5.2, důkaz proto přenecháváme čtenáři jako užitečné cvičení.

Pro $p > d$ víme díky Větě 2.5.3, že $W^{1,p}(\Omega)$ je spojitě vnořen do $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ a důkaz je tudíž triviální a plyne přímo z Hölderovy nerovnosti. ■

Nyní zesílíme větu o stopách a ukážeme, že vyjma případu $p = 1$ je operátor stop kompaktní operátor do jistých Lebesgueových prostorů.

Věta 2.6.12 — O kompaktnosti operátoru stop. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ a T operátor stop definovaný ve Větě 2.6.10.

Je-li $p \in (1,d)$, pak je T kompaktní operátor z $W^{1,p}(\Omega)$ do $L^q(\partial\Omega)$ pro každé $q \in [1,p^\sharp)$.

Je-li $p > d$, pak je T kompaktní z $W^{1,p}(\Omega)$ do $L^q(\partial\Omega)$ pro každé $q \in [1,\infty]$.

Pro každé $q \in [1,\infty)$ je operátor T kompaktní z $W^{1,d}(\Omega)$ do $L^q(\partial\Omega)$.

Důkaz. Pro $p > d$ máme z Věty 2.5.3 kompaktní vnoření $W^{1,p}(\Omega)$ do $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ a důkaz je tudíž triviální. V dalším se tedy budeme věnovat případu $p < d$.

Nejdříve si dokážeme obdobu nerovnosti z třetího kroku důkazu Věty 2.6.10 a to následující interpolační nerovnost

$$\|u\|_{L^q(\partial\Omega)} \leq C(q,\Omega)\,\|u\|_{W^{1,q}(\partial\Omega)}^{\frac{1}{q}}\,\|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\frac{1}{q}} \tag{2.61}$$

platnou pro každé $q \in [1,\infty)$. Použijeme strukturu důkazu Věty 2.6.10 a pozměníme pouze nerovnost (2.59). Pro jednoduchost budeme v dalším vynechávat index r a opět vše redukujem pouze na případ, kdy T_r je identita.

$$\begin{aligned}
\int_\Delta |u(x',a(x'))|^q \,\mathrm{d}x' &\leq \left| \int_\Delta \int_{a(x')}^{a(x')+\beta} \frac{\partial}{\partial s}\,|u(x',s)|^q \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x' \right| \\
&\leq q \int_\Delta \int_{a(x')}^{a(x')+\beta} |\nabla u(x',s)|\,|u(x',s)|^{q-1} \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x' \\
&= q \int_{V^+} |\nabla u(x)|\,|u(x)|^{q-1}\,\mathrm{d}x \leq q\,\|\nabla u\|_{L^q(V^+)}\,\|u\|_{L^q(V^+)}^{q-1}\,.
\end{aligned}$$

Požadovanou nerovnost pro Ω pak dostaneme použitím kroků jedna a dva z důkazu Věty o stopách (Věta 2.6.10).

Buď nyní $A \subset W^{1,p}(\Omega)$ libovolná omezená množina. Naším cílem je ukázat, že $T(A)$ je totálně omezená množina ve vhodném prostoru $L^q(\partial\Omega)$. Označme $C^* := \sup_{u\in A}\|u\|_{1,p}$. Díky větě o spojitém vnoření (Věta 2.5.1) můžeme najít $C^{**} < \infty$ takové, že pro každé $u \in A$ a každé $q \in [1,p^\star]$ platí $\|u\|_q \leq C^{**}$. Nyní již přistoupíme ke konstrukci ε-sítě. Buď tedy $\varepsilon > 0$ pevné. Z Věty o kompaktním vnoření (Věta 2.5.20) víme, že pro libovolné $\delta > 0$ můžeme najít konečnou δ-síť $\{u_i\}_{i=1}^k \in A$ v prostoru $L^p(\Omega)$, která pokrývá A. Volme nyní

$$\delta := \varepsilon^{\frac{p}{p-1}}\left(C(p,\Omega)(2C^*)^{\frac{1}{p}}\right)^{-\frac{p}{p-1}}.$$

Buď nyní $u \in A$ libovolný a u_i takový, že $\|u - u_i\|_p \leq \delta$. Použitím nerovnosti (2.61) dostaneme

$$\begin{aligned}
\|u - u_i\|_{L^p(\partial\Omega)} &\leq C(p,\Omega)\,\|u-u_i\|_{W^{1,p}(\partial\Omega)}^{\frac{1}{p}}\,\|u-u_i\|_{L^p(\Omega)}^{1-\frac{1}{p}} \\
&\leq C(p,\Omega)(2C^*)^{\frac{1}{p}}\delta^{1-\frac{1}{p}} = \varepsilon
\end{aligned}$$

a tedy $\{Tu_i\}_{i=1}^k$ tvoří ε-síť v $L^p(\partial\Omega)$ a důkaz je tímto hotov pro $q = p$. Přímým důsledkem spojitého vnořeření $L^p(\partial\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega)$ pro $q \in [1,p]$ je pak platnost věty pro $q \in [1,p]$.

Věnujme se nyní případu $q \in (p,p^\sharp)$. Obdobně jako nerovnost (A.3.14) může být dokázána interpolační nerovnost

$$\|u\|_{L^q(\partial\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\partial\Omega)}^{\alpha}\,\|u\|_{L^{p^\sharp}(\partial\Omega)}^{1-\alpha}\,, \qquad \text{kde} \qquad \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^\sharp},$$

jejíž důkaz přenecháváme čtenáři jako cvičení. Kombinací této nerovnosti a (2.61) získáme

$$\begin{aligned}\|u-u_i\|_{L^q(\partial\Omega)} &\le \left(C(p,\Omega)\,\|u-u_i\|_{W^{1,p}(\partial\Omega)}^{\frac{1}{p}}\,\|u-u_i\|_{L^p(\Omega)}^{1-\frac{1}{p}}\right)^{\alpha}\|u-u_i\|_{L^{p^\sharp}(\Omega)}^{1-\alpha}\\ &\le \left(C(p,\Omega)(2C^*)^{\frac{1}{p}}\delta^{1-\frac{1}{p}}\right)^{\alpha}(2C^{**})^{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Zřejmě tedy vhodnou volbou δ v závislosti na ε můžeme sestrojit ε-síť v $L^q(\partial\Omega)$, čímž je důkaz hotov pro všechna $p \neq d$. Nicméně v případě $p = d$ postupujeme analogicky, pouze místo Věty 2.6.10 použijeme Větu 2.6.11. ■

V sekci o spojitých a kompaktních vnoření jsme viděli, že předpoklady na lipschitzovskost hranice lze v jistých situacích zeslabit za cenu získání „neoptimálních" výsledků. Následující příklad však říká, že jakékoliv oslabení předpokladů na hranice může vést k nesmysluplné definici operátoru stop.

Příklad 2.6.13. Uvažujme oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ takovou, že část její hranice je tvořena křivkou (srovnejte s Příkladem 2.5.10)

$$|y| = x^{\mu}, \quad x \in [0,1],\ \mu > 1.$$

V Příkladu 2.5.10 jsme ukázali, že je-li zbytek hranice oblasti hladký, pak funkce $u(x,y) = x^{-a}$ patří do $W^{1,2}(\Omega)$ pokud je $a < \frac{1+\mu-2}{2} = \frac{\mu-1}{2}$.

Spočteme-li integrál přes hranici, dostaneme[15]

$$a < 1 \Leftrightarrow \int_{\partial\Omega} |u| \,\mathrm{d}S < \infty.$$

Pro $\mu > 3$ tudíž existují funkce z $W^{1,2}(\Omega)$, které nepaří do žádného $L^q(\partial\Omega)$ pro libovolné $q \geq 1$. Je tedy vidět, že podmínku $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ nelze rozumně zeslabit.

Nabízí se otázka, zda je prostor $L^{p^\sharp}(\partial\Omega)$ oborem hodnot operátoru stop (je-li $p \in [1,d)$). Tato otázka je velice důležitá v souvislosti s problematikou okrajových úloh pro parciální diferencíální rovncice. Odpověď je záporná. Platí pouze, že obor hodnot operátoru stop je hustý v $L^{p^\sharp}(\partial\Omega)$. Pro přesnou chrakterizaci oboru hodnot je nutné uvažovat prostory s neceločíselnou derivací a této problematice se budeme více věnovat v Sekci 2.8.1.

2.6.3 Charakterizace $W_0^{1,p}(\Omega)$ a integrace per partes

Věta o stopách má mnoho důležitých důsledků. Nejenom, že nám umožňuje hovořit o hodnotách na hranici Ω pro sobolevovské funkce, ale umožňuje nám např. zobecnit klasickou větu o integraci per partes a přesně charakterizovat prostor $W_0^{1,p}(\Omega)$. Věnujme se nejdříve integraci per partes, která se standardně formuluje pro po částech hladkou Ω a pro funkce mající spojité derivace až do hranice. Ve Větě 2.1.21 jsme ukázali, že předpoklad na spojitost prvních derivací může být oslaben, pokud uvažujeme funkce z $W_0^{1,p}(\Omega)$. Tento výsledek nyní zobecníme pro obecné sobolevovské funkce a pro oblasti s lipschitzovskou hranicí.

Věta 2.6.14 — o integraci per partes II. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. Potom existuje vnější normála ν skoro všude na $\partial\Omega$. Buď dále $p,q \in [1,\infty]$ takové, že je splněna jedna z následujících podmínek:

1) $p \in [1,d)$ a $q \in [1,d)$ splňující $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{d+1}{d}$,

2) $p = d$ a $q > 1$ (resp. $q = d$ a $p > 1$),

3) $p > d$ a $q \geq 1$ (resp. $q > d$, $p \geq 1$).

Potom pro každé $u \in W^{1,p}(\Omega)$ a $v \in W^{1,q}(\Omega)$ platí

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i\,\mathrm{d}S - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}v\,\mathrm{d}x. \tag{2.62}$$

Důkaz. Existence normály skoro všude na Ω je přenechán čtenáři (lze jej nalézt např. v Nečas [1967].

Dále se budeme věnovat druhé části věty. Důkaz provedeme poněkud formálně, vynecháme totiž rozklad jednotky. Formule Greenovy věty (2.62) platí, je-li $\partial\Omega$ po částech hladká a $u,v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. Protože každou lipschitzovskou oblast můžeme zevnitř aproximovat hladkými oblastmi (viz Nečas [1962]), je možné ukázat, že formule (2.62) platí i v případě $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $u,v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

[15] Musíme uvažovat popis hranice $x = |y|^{\frac{1}{\mu}}$, $y \in [-1,1]$ a tudíž počítáme

$$\int_{-1}^{1} |y|^{-\frac{a}{\mu}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{\mu}|y|^{\frac{1}{\mu}-1}\right)^2}\,\mathrm{d}y,$$

což dává výsledek uvedený výše.

Nechť jsou nyní u a v sobolevovské funkce, tak jako ve znění lemmatu. Potom existují posloupnosti hladkých funkcí $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \{v_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$, které aproximují funkce u a v v $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ resp. $\|\cdot\|_{W^{1,q}(\Omega)}$ normě. Zřejmě tedy platí

$$\int_{\Omega} u_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \, dx = \int_{\partial\Omega} u_n v_n n_i \, dS - \int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n \, dx \tag{2.63}$$

a stačí ukázat, že za daných předpokladů můžeme provést limitní přechod v právě uvedené rovnosti. Zabývejme se první variantou podmínek, tj. $p \in [1, d)$, $q \in [1, d)$, ověření zbývajících dvou variant ponecháváme čtenáři jako cvičení.

Uvažujme nejprve integrál na levé straně vztahu (2.63). Ten bude pro $n \to \infty$ konvergovat k $\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx$, jestliže

$$\frac{d-p}{dp} + \frac{1}{p} \leq 1,$$

což po úpravě dává podmínku $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{d+1}{d}$ ze znění lemmatu.

Analogicky postupujeme pro objemový integrál na pravé straně (2.63). Uvažujme nyní plošný integrál. Zde požadujeme (viz. Větu 2.6.10)

$$\frac{d-p}{dp-p} + \frac{d-q}{dq-q} \leq 1$$

což po úpravě dává podmínku $d\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \leq d + 1$, která je zřejmě díky předchozí podmínce $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{d+1}{d}$ splněna automaticky.

■

Dalším stěžejním důsledkem věty o stopách je charakterizace prostorů $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Věta 2.6.15 — Charakterizace $W_0^{1,p}(\Omega)$. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. Potom

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{1,p}(\Omega) ; \; Tu = 0 \text{ skoro všude na } \partial\Omega\right\}.$$

Důkaz. Nejdříve ukážeme inkluzi „⊂“. Buď $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ libovolná. Podle definice prostoru $W_0^{1,p}(\Omega)$ existuje posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega)$ taková, že $u_n \to u$ ve $W^{1,p}(\Omega)$. Zřejmě $Tu_n = 0$ a za spojitosti operátoru stop pak plyne i $Tu = 0$ a tedy $W_0^{1,p}(\Omega) \subset \left\{u \in W^{1,p}(\Omega) ; \; Tu = 0 \text{ skoro všude na } \partial\Omega\right\}$.

V druhém kroku se zaměříme na obtížnější inluzi „⊃“, tj., pro danou funkci $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, musíme najít posloupnost funkcí $\{u^n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ takovou, že $\|u^n - u\|_{1,p} \to 0$ pro $n \to \infty$. Nejdříve použijeme rozklad jednotky pomocí funkcí $\{\phi_r\}_{r=1}^{M+1}$ a vidíme, že stačí uvažovat pouze funkce $u_r := u\phi_r$. Pro funkci u_{M+1} je situace zřejmá a stačí uvažovat pouze standardní zhlazení pomocí konvoluce. Věnujme se nyní případu $r = 1, \ldots, M$. Pro jednoduchost v dalším vynecháme index r a navíc nebudeme uvažovat přechod mezi jednotlivými souřadnými systémy. Připomeňme značení z Definice 2.2.11

$$V^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^d | \; |x_i| < \alpha, i = 1, \ldots, d-1, a(x') < x_d < a(x') + \beta\right\}.$$

Stačí tedy ukázat, že pokud $u \in W^{1,p}(V^+)$ splňující $Tu = 0$ na Λ a $\operatorname{supp} u \cap \{\partial V^+ \setminus \Lambda\} = \emptyset$, potom existuje posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}_0^{\infty}(V^+)$ taková, že $u_n \to u$ ve $W^{1,p}(V^+)$.

Funkci u nejdříve rozšíříme nulou vně V^+, tj. definujeme

$$\tilde{u}(x', x_d) = \begin{cases} u(x', x_d) & (x', x_d) \in V^+ \\ 0 & (x', x_d) \in V^-, \end{cases}$$

V dalším kroku ukážeme, že tato funkce pak patří do prostoru $W^{1,p}(V)$ a její slabá derivace je

$$\nabla\tilde{u}(x', x_d) = \begin{cases} \nabla u(x', x_d) & (x', x_d) \in V^+ \\ 0 & (x', x_d) \in V^-. \end{cases}$$

Pro důkaz platnosti tohoto tvrzení nyní použijeme Větu o integraci per partes II (Věta 2.6.14). Pro libovolné $\varphi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(V)$ máme

$$\begin{aligned} \int_V \tilde{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx &= \int_{V^+} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = -\int_{V^+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \, dx + \int_{\Lambda} u \varphi \nu_i \, dS \\ &= -\int_{V^+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \, dx = -\int_V \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \varphi \, dx, \end{aligned}$$

kde jsme využili přededpokladu $u = 0$ na ∂V^+.

Takto rozšířenou funkci nyní vhodným způsobem zhladíme. Budeme postupovat velice podobným způsobem jako v důkazu Věty 2.2.15, jen namísto vysunutí funkce u „vně“ Ω, budeme uavažovat zasunutí „dovnitř“. Definujme $\tilde{u}^n(x', x_d) := \tilde{u}(x', x_d - \frac{1}{n})$. Funkce $\tilde{u}^n$ patří pro dostatečně velké n do $W^{1,p}(V^+)$ a navíc $\operatorname{supp} U_n \subset V^+$. Dále je $\lim_{n\to\infty} \|\tilde{u}^n - u\|_{W^{1,p}(V^+)} = 0$. Nyní stačí zadefinovat funkce $u^n = \eta_{h_n} \star \tilde{u}^n$, kde η_{h_n} je regularizátor a h_n je vhodně zvolené číslo menší než $\frac{1}{n}$ tak, aby $u^n \in \mathcal{C}_0^{\infty}(V^+)$. Díky vlastnostem regulaizátoru (Věta A.3.32) není těžké ověřit, že $u^n \to u$ ve $W^{1,p}(V^+)$, čímž je důkaz hotov. ■

2.7 Poincarého nerovnosti a ekvivalentní normy

V tomto oddílu ukážeme, že v některých případech je možno místo standardní normy na $W^{k,p}(\Omega)$ uvažovat i jiné funkcionály, které definují ekvivalentní normy na $W^{k,p}(\Omega)$. Tyto ekvivalentní normy budou hrát důležitou úlohu v teorii PDR, pokud budeme předepisovat hondotu funkce na hranici, popř. její části. Začneme jedním obecným lemmatem.

Lemma 2.7.1 Buď $\Omega \in \mathcal{C}^0$, $k \in \mathbb{N}$ a $p \in [1,\infty)$. Označme symbolem P_k polynomy stupně nejvýše k. Nechť $\{f_i\}_{i=1}^l$ jsou spojité omezené funkcionály (ne nutně lineární) nad $W^{k,p}(\Omega)$ splňující pro každé $u \in P_{k-1}$

$$\sum_{i=1}^{l} |f_i(u)| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0 \text{ skoro všude na } \Omega.$$

Nechť dále pro každé $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a $i = 1, \dots, l$ platí

$$|f_i(\lambda u)| \leq |\lambda| \, |f_i(u)| \, .$$

Potom existují kladné konstanty c_1 a c_2 takové, že pro každé $u \in W^{1,p}(\Omega)$ platí

$$c_1 \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^{l} |f_i(u)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c_2 \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \, . \tag{2.64}$$

Důkaz. Druhá nerovnost v (2.64) je triviální, zabývejme se proto první nerovností.

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme tedy, že existuje posloupnost funkcí $\{\tilde{u}_n\}_{n=1}^\infty \subset W^{k,p}(\Omega)$ taková, že platí

$$\left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha \tilde{u}_n\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^{l} |f_i(\tilde{u}_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\|\tilde{u}_n\|_{W^{k,p}(\Omega)}}{n}.$$

Zřejmě $\tilde{u}_n \neq 0$ můžeme tedy definovat $u_n := \tilde{u}_n / \|\tilde{u}_n\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ a po vydělení výše uvedené nerovnosti výrazem $\|\tilde{u}_n\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ a použitím předpokladů na f_i získáme

$$\left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u_n\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^{l} |f_i(u_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{n} \tag{2.65}$$

a navíc $\|u_n\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 1$. Protože je posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ omezená ve $W^{1,p}(\Omega)$, můžeme díky kompaktnímu vnoření $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{k-1,p}(\Omega)$ (Věta 2.5.22) vybrat podposloupnost (kterou nebudeme přeznačovat) a najít $u \in W^{k-1,p}(\Omega)$ tak, že $u_n \to u$ ve $W^{k-1,p}(\Omega)$. Navíc z (2.65) ihned plyne, že pro $|\alpha| = k$ je $D^\alpha u_n \to 0$ v $L^p(\Omega)$. Nutně tedy musí platit, že $u_n \to u$ i ve $W^{k,p}(\Omega)$.

Díky silné konvergenci tedy pro limitní fukci u platí, že $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 1$ a $D^\alpha u = 0$ pro každé $|\alpha| = k$. Použitím Lemma 2.2.3 a jednouduché indukce není těžké, že nutně $u \in P_{k-1}$. Díky spojitosti funkcionálů f_i je také $\sum_{i=1}^l |f_i(u)|^p = 0$ a protože je $u \in P_{k-1}$, je i $u = 0$, což je spor s $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 1$. ■

Poznámka 2.7.2. Funkcionály splňující předpoklady Lemma 2.7.1 vždy existují, stačí například vzít

$$f_\alpha(u) = \int_{\Omega^\star} x^\alpha u(x) \, \mathrm{d}x, \quad |\alpha| \leq k-1,$$

popřípadě

$$\tilde{f}_\alpha = \int_{\Omega^\star} D^\alpha u(x) \, \mathrm{d}x, \quad |\alpha| \leq k-1,$$

kde $\Omega^\star$ je libovolná neprázdná podoblast Ω.

Lemma 2.7.1 má celou řadu různých aplikací. Uveďme alespoň ty nejdůležitější.

Věta 2.7.3 — o ekvivalentních normách na $W^{1,p}(\Omega)$. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. Nechť $\Omega^\star \subset \Omega$ taková, že $|\Omega^\star|_d > 0$ a $\Gamma \subset \partial\Omega$ taková, že $|\Gamma|_{d-1} > 0$. Buď dále $p \in [1,\infty)$ a α_i, $i = 1, \dots, 4$, nezáporná čísla taková, že $\sum_{i=1}^4 \alpha_i > 0$.

Potom existují kladné konstanty c_1 a c_2 takové, že pro každou $u \in W^{1,p}(\Omega)$ platí

$$\begin{aligned} & c_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\ & \le \left(\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + \alpha_1 \int_\Gamma |u|^p \,\mathrm{d}S + \alpha_2 \left| \int_\Gamma u \,\mathrm{d}S \right|^p + \alpha_3 \int_{\Omega^\star} |u|^p \,\mathrm{d}x + \alpha_4 \left| \int_{\Omega^\star} u \,\mathrm{d}x \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \le c_2 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} . \end{aligned}$$

Důkaz. Označme $f_1(u) = \left(\int_\Gamma |u|^p \,\mathrm{d}S\right)^{\frac{1}{p}}$, $f_2(u) = \left|\int_\Gamma u \,\mathrm{d}S\right|$, $f_3(u) = \left(\int_{\Omega^\star} |u|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ a $f_4(u) = \left|\int_{\Omega^\star} u \,\mathrm{d}x\right|$. Všechny tři funkcionály jsou zřejmě homogenní (ve smyslu uvedeném v Lemma 2.7.1), omezené a spojité na $W^{1,p}(\Omega)$ (zde používáme větu o stopách a předpoklad $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$). Použijeme Lemma 2.7.1 a stačí ukázat, že pokud $u = konst.$, pak je pro libovolné $i \in \{1, \dots, 4\}$

$$f_i(u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0.$$

Tato ekvivalence je ale zřejmá. ■

Poznamenejme, že na rozdíl od Lemma 2.7.1 předpokládáme ve Větě 2.7.3 oblast s lipschitovskou hranicí. To je dáno tím, že hovoříme o hodnotách funkce u na hranici a používáme větu o stopách (Věta 2.6.10). Pokud bychom ale ve výše uvedeném lemma neuvažovali integráli přes část hranice, vystačili bychom pouze s předpokladem na spojitost hranice.

Některé nerovnosti (ekvivalentní normy) mají svá zavedená pojmenování a níže uvedeme jejich krátký seznam.

Poznámka 2.7.4 (význačné nerovnosti). Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. Použitím Věty 2.7.3 mmůžeme lehce získat následující nerovnosti:

1) Nerovnost $c_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le \left(\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + \int_\Gamma |u|^p \,\mathrm{d}S \right)^{\frac{1}{p}}$ se nazývá Poincarého-Fridrichsova nerovnost. Zřejmě lze místo $\int_\Gamma |u|^p \,\mathrm{d}S$ brát i $\left(\int_\Gamma |u|^q \,\mathrm{d}S\right)^{\frac{p}{q}}$, kde $q \in [1, \frac{dp-p}{d-p}]$ pro $p \in [1, d)$ a $q \in [1, \infty)$ pro $p \ge d$.

2) Nerovnost $c_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le \left(\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + \left|\int_\Omega u \,\mathrm{d}x\right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ se nazývá Poincarého nerovnost. Její zobecnění pro $W^{k,p}(\Omega)$ je uvedeno níže.

3) Místo $\int_{\Omega^\star} |u|^p \,\mathrm{d}x$ lze uvažovat i $\left(\int_{\Omega^\star} |u|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{q}}$, kde $q \in [1, \frac{dp}{d-p}]$ pro $p \in [1, d)$ a $q \in [1, \infty)$ pro $p \ge d$.

Nakonec ještě zmíníme některé důležité nerovnosti pro Sobolevovy prostory vyšších řádů.

Věta 2.7.5 — o ekvivalentín normách na $W^{k,p}(\Omega)$. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^0$, $\Omega^\star \subset \Omega$ taková, že $|\Omega^\star|_d > 0$, $p \in [1, \infty)$ a $k \in \mathbb{N}$. Buď α_1 a α_2 nezáporná čísla splňující $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$. Potom existují kladné konstanty c_1 a c_2 takové, že pro každou $u \in W^{k,p}(\Omega)$ platí

$$\begin{aligned} & c_1 \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \\ & \le \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} + \alpha_1 \left(\int_{\Omega^\star} |u| \,\mathrm{d}x \right)^p + \alpha_2 \sum_{|\alpha| \le k-1} \left| \int_\Omega D^\alpha u \,\mathrm{d}x \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \le c_2 \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} . \end{aligned}$$

Důkaz. Důkaz je přenechán čtenáři jako cvičení. ■

Ve výše uvedené větě jsme neuvažovali integrály přes hranici. To mělo dva důvody. Výše uvedený výsledek platí i pro oblasti se spojitou hranicí, protože je založen pouze na kompaktním vnoření a nepotřebujeme tedy použít větu o stopách a lipschitzovskost hranice. Za druhé, na rozdíl od Věty 2.7.3, pro Sobolevovy prostory vyšších řádů nestačí kontrolovat pouze integrál přes část hranice, ale musíme předpokládat i jisté kvalitativní předpoklady na část hranice. Vše budeme ilustrovat na případu prostoru $W^{2,p}(\Omega)$ a obecný případ přenecháme na rozmyšlení čtenáři.

Věta 2.7.6 Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ a $p \in [1, \infty)$. Buď $\Gamma \subset \partial\Omega$ taková, že Γ není nadrovina a splňuje $|\Gamma|_{d-1} > 0$. Potom existují kladné konstanty c_1 a c_2 takové, že pro každou $u \in W^{2,p}(\Omega)$ platí

$$c_1 \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \le \left(\sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} + \int_\Gamma |u|^p \,\mathrm{d}S \right)^{\frac{1}{p}} \le c_2 \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} .$$

Protože $\partial\Omega$ nemůže být nadrovina, výše uvedená nerovnost platí vždy pro $\Gamma = \partial\Omega$.

Důkaz. Díky Lemma 2.7.1 stačí ověřit, že pokud $u \in P_1$ a $\int_\Gamma |u|^p \, dS = 0$, potom $u = 0$. Buď tedy u lineární a $u = 0$ skoro všude na Γ. To ale může nastat pouze v případě, když je Γ nadrovina. Tento případ je ale díky předpokladům vyloučen. ■

Až dosud jsem řešili případy ekvivalentních norem. Viděli jsme, jak je důležité vyloučit možnost, že funkce u je nenulový polynom $(k-1)$–tého řádu. Ne vždy je to v teorii PDR možné, jako je tomu například ve formulaci Neumannovy okrajové úlohy. Proto zavedeme podprostory Sobolevových funkcí, které jsou ekvivalentní až na polynomy jistého řádu.

Definice 2.7.7 — faktorprostor $W^{k,p}(\Omega)/P$. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}$ and $p \in [1, \infty]$. Buď $P \subset P_{k-1}$ podprostor polynomů $(k-1)$–tého řádu. Označme $W^{k,p}(\Omega)/P$ faktorprostor, tj. řekneme, že pro $u_1, u_2 \in W^{k,p}(\Omega)$, platí $u_1 \sim u_2$ právě tehdy, když $u_1 - u_2 \in P$. Tento prostor opatříme normou

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)/P} := \inf_{\tilde{u} \in W^{k,p}(\Omega):\, \tilde{u} \sim u} \|\tilde{u}\|_{W^{k,p}(\Omega)} .$$

Tento prostor je zřejmě Banachův, pro $p \in [1, \infty)$ separabilní a pro $p \in (1, \infty)$ reflexivní. Důkaz tohoto tvrzení je přenechán čtenáři stejě jako důkaz následující věty.

Věta 2.7.8 — Poincarého nerovnost pro faktorprostory. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^0$ a $k \in \mathbb{N}$. Potom existují kladné konstanty c_1 a c_2 takové, že pro každou $u \in W^{k,p}(\Omega)$ platí

$$c_1 \|\tilde{u}\|_{W^{k,p}(\Omega)/P_{k-1}} \le \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \le c_2 \|\tilde{u}\|_{W^{k,p}(\Omega)/P_{k-1}} .$$

2.8 Některé další vlastnosti funkcí ze Sobolevových prostorů

2.8.1 Prostory s neceločíselnou derivací, obor hodnot operátoru stop a inverzní věta o stopách

Jako analogie zde mohou sloužit hölderovsky spojité funkce, které mohou představovat spojité funkce, které mají neceločíselnou derivaci.

Uvažujme nejdříve $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Definice 2.8.1 (Sobolevovy prostory s neceločíselnou derivací)
Buď $s \in \mathbb{R}^+$, $p \in [1, \infty)$. Nechť $[s]$ je celá část s. Potom $W^{s,p}(\Omega)$ je podprostor všech funkcí z $W^{[s],p}(\Omega)$ ($W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$), které splňují

$$\forall \alpha, |\alpha| = [s] : \; I_\alpha(u) = \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{d+p(s-[s])}} dx dy < \infty.$$

Označme dále

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{W^{[s],p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=[s]} I_\alpha(u) \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Potom platí

Věta 2.8.2 Prostor $W^{s,p}(\Omega)$ je Banachův prostor s normou $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}$. Tento prostor je separabilní pro $p \in [1, \infty)$ a reflexivní pro $p \in (1, \infty)$.

Důkaz. viz. např. Kufner et al. [1977] ■

Poznámka 2.8.3. Nechť $p \in [1, \infty)$ a $0 < s < \beta \le 1$. Potom

$$\mathcal{C}^{0,\beta} \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega),$$

neboť

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{d+ps}} dx dy$$
$$\le (H_{0,\beta}(u))^p \int_\Omega \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{d+(s-\beta)p}} dx dy < K \left(H_{0,\beta}(u)\right)^p .$$

Další vlastnosti těchto prostorů je možné nalézt ve specializovaných monografiích. Nás spíše zajímají analogické prostory na $\partial\Omega$.

Definice 2.8.4 (prostory $W^{s,p}(\partial\Omega)$)
Buď $s \in \mathbb{R}^+$, $p \in [1,\infty)$, $\Omega \in \mathcal{C}^{[s],1}$. Označme pro $r = 1,\dots,M$ funkce $v_r(x_r') = u_r \circ T_r(x_r', a_r(x_r'))$. Potom $W^{s,p}(\partial\Omega)$ je podprostor všech funkcí z $L^p(\partial\Omega)$, které splňují

$$\forall r \in \{1,\dots,M\}: \ v_r \in W^{s,p}(\Delta_r).$$

Označme dále[a]

$$\|u\|_{W^{s,p}(\partial\Omega)} = \left(\sum_{r=1}^{M} \|v_r\|^p_{W^{s,p}(\Delta_r)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

[a] Připomínáme, že $\Delta_r \subset \mathbb{R}^{d-1}$.

Analogicky jako výše platí (viz. např. Kufner et al. [1977])

Věta 2.8.5 Prostor $W^{s,p}(\partial\Omega)$ je Banachův prostor s normou $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\partial\Omega)}$. Tento prostor je separabilní pro $p \in [1,\infty)$ a reflexivní pro $p \in (1,\infty)$.

Ukazuje se, že prostory $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$, $p \in (1,\infty)$ jsou přesně prostory charakterizující obor hodnot operátoru stop. Platí totiž

Věta 2.8.6 — inverzní věta o stopách. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $p \in (1,\infty)$. Potom existuje jednoznačně definované spojité lineární zobrazení

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega),$$

takové, že

$$\forall u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) : Tu = u\,|_{\partial\Omega}.$$

Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $p \in (1,\infty)$. Potom existuje spojité lineární zobrazení

$$P : W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \to W^{1,p}(\Omega),$$

takové, že pro $v = Pu$ platí $u = Tv$.

Důkaz. Celý důkaz je poněkud technický a je ho možné naléz např. v Kufner et al. [1977] nebo Nečas [1967]. ■

Poznamenejme, že důkaz první části právě zmíněné věty je založen na Hardyho nerovnosti, která je důležitá i v aplikacích v parciálních diferenciálních rovnicích. Uveďme zde několik jejích forem. Podrobnější informace může čtenář nalézt v knize Kufner and Opic [1990].

Věta 2.8.7 (Hardy)
Buď $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a < b$, $u \in L^p((a,b))$, $p \in (1,\infty)$. Pak platí

$$\int_a^b \left(\frac{1}{x-a}\int_a^x |u(y)|dy\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^b |u(x)|^p dx,$$
$$\int_a^b \left(\frac{1}{b-x}\int_x^b |u(y)|dy\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^b |u(x)|^p dx,$$

dále

$$\int_0^\infty |u(t)|^p t^{\varepsilon-p} dt \le \left(\frac{p}{|\varepsilon-p+1|}\right)^p \int_0^\infty |u(t)|^p t^\varepsilon dt,$$

kde nerovnost platí pro $\varepsilon > p-1$ pro $u(\infty) = 0$ a $\varepsilon < p-1$ pro $u(0) = 0$.

Buď $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p \in (1,\infty)$ a označme $d(x) = \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$. Potom

$$\int_\Omega \left|\frac{u}{d}\right|^p dx \le C\int_\Omega |\nabla u|^p dx. \tag{2.66}$$

Z hlediska slabého řešení parciálních diferenciálních rovnic je zajímavý následující Hadamardův příklad.

Příklad 2.8.8. Buď $d = 2$ a $\Omega = B_1(0)$. Definujeme

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\rho^{2^{2n}}\cos(2^{2n}\varphi) \quad \text{na } B_1(0)\setminus\{(0,0)\}$$
$$u(0,0) = 0,$$

kde (ρ,φ) jsou standardní polární souøadnice (tj. $\rho \in (0,1]$, $\varphi \in [0,2\pi)$). Potom řada konverguje stejnoměrně na $B_1(0)$ a tudíž $u \in \mathcal{C}^1(\overline{B_1(0)})$. Speciálně tedy $u \in \mathcal{C}(\partial B_1(0))$, ale přímým výpoètem lze zjistit (prověřte), že $u \notin W^{1,2}(B_1(0))$. Navíc lze ukázat, že $u \notin W^{\frac{1}{2},2}(\partial B_1(0))$ a tudíž neexistuje žádné $u \in W^{1,2}(B_1(0))$ takové, že jeho stopa by byla dána funkcí $u\,|_{\partial B_1(0)}$. Neexistuje tedy slabé řešení $u \in W^{1,2}(B_1(0))$ úlohy $\Delta v = 0$ na $B_1(0)$ s okrajovou podmínkou $v = u\,|_{\partial B_1(0)} \in \mathcal{C}(\partial B_1(0))$.

V tomto oddílu se budeme zabývat dalšími vlastnostmi funkcí z $W^{k,p}(\Omega)$. Některé ze zde uvedených výsledků jsme již využili v předcházejícím výkladu.

Sobolevovy prostory a Fourierova transformace

Věta 2.8.9 Buď $k \in \mathbb{N}$. Potom

1. Funkce $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ patří do $W^{k,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$, právě když
$$\left(1+|\xi|^k\right)\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d),$$
kde $\hat{u}$ značí Fourierovu transformaci[a]funkce $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

2. Existují kladné konstanty c_1 a c_2 takové, že
$$\forall u \in W^{k,2}\left(\mathbb{R}^d\right): \ c_1 \|u\|_{W^{k,2}(\mathbb{R}^d)} \leq \left\|\left(1+|\xi|^k\right)\hat{u}(\xi)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq c_2 \|u\|_{W^{k,2}(\mathbb{R}^d)}.$$

[a]Používáme definici
$$\mathcal{F}[u](\xi) = \hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{-i(x\cdot\xi)} dx$$
pro funkce z $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Důkaz. Důkaz souvislosti Soboleva a Fourierovy transformace

Krok 1:

Buï $u \in W^{k,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$, tj. $\forall|\alpha| \leq k: \ D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Speciálně pro $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ platí $\widehat{D^\alpha u}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)$. Protože je $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ husté v $W^{k,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$, není těžké ukázat, že pro $u \in W^{k,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ platí
$$\widehat{D^\alpha u}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi) \text{ skoro všude na } \mathbb{R}^d.$$
Potom ale $(i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ a volbou $\alpha = (0,\dots,k,\dots,0)$ (k na i-tém místě) dostáváme
$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2k} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla^k u(x)|^2 dx,$$
odkud
$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(1+|\xi|^k\right)^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leq c\|u\|_{W^{k,2}(\mathbb{R}^d)}.$$

Krok 2:

Nechť naopak $\left(1+|\xi|^k\right)|\hat{u}(\xi)| \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $|\alpha| \leq k$. Zřejmě
$$\|(i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq c\left\|\left(1+|\xi|^k\right)\hat{u}(\xi)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$
Označme
$$u_\alpha = \mathcal{F}^{-1}\left[(i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)\right](x) = \left((i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)\right)\check{},$$
kde ˇ znaèí inverzní Fourierovu transformaci. Buï $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Potom z Parsevalovy rovnosti plyne
$$\int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha \varphi \bar{u} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{D^\alpha \varphi} \bar{\hat{u}} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} (i\xi)^\alpha \hat{\varphi}(\xi) \bar{\hat{u}}(\xi) d\xi$$
$$= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\xi) \overline{(-i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)} d\xi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \bar{u}_\alpha dx,$$
tj. $u_\alpha = D^\alpha u$ (ve slabém smyslu). Navíc $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ a tudíž $u \in W^{k,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Zřejmě
$$\|D^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|u_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|(i\cdot)^\alpha \hat{u}(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq c\left\|\left(1+|\cdot|^k\right)\hat{u}(\cdot)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

■

Pomocí Fourierovy transformace můžeme též definovat Sobolevovy prostory s neceločíselnou derivací.

Definice 2.8.10 Buď $s \in (0,\infty)$ a $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. řekneme, že funkce $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, právě když
$$(1+|\xi|^s)\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d).$$
Pro s neceločíselné definujeme
$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \|(1+|\cdot|^s)\hat{u}(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Je možné ukázat, že $H^s(\mathbb{R}^d) = W^{s,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$, kde $W^{s,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ značí Sobolev–Slobodeckého prostor definovaný v 2.8.1. Stejně tak normy $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$ a $\|\cdot\|_{W^{s,2}(\mathbb{R}^d)}$ jsou ekvivalentní.

2.9 Duální prostory

Buď $k \in \mathbb{N}$ a $p \in (1, \infty)$. Označme
$$\left(W_0^{k,p'}(\Omega)\right)^\star = W^{-k,p}(\Omega),$$
kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Restrikce $F \in W^{-k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ na $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ zřejmě definuje distribuci. V následujících tvrzeních se pokusíme tyto distribuce blíže charakterizovat. Platí

Věta 2.9.1 Buď $p \in (1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$. Potom $F \in W^{-k,p}(\Omega)$ právě když existují funkce $\{f_\alpha\}_{|\alpha| \le k} \subset L^p(\Omega)$ takové, že
$$F = \sum_{|\alpha| \le k} (-1)^\alpha D^\alpha f_\alpha,$$
kde $D^\alpha f_\alpha$ značí distributivní derivaci, tj. pro $u \in W_0^{k,p'}(\Omega)$ platí
$$\langle F, u \rangle = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega f_\alpha D^\alpha u dx. \tag{2.67}$$
Navíc
$$\|F\|_{W^{-k,p}(\Omega)} = \inf \left(\sum_{|\alpha| \le k} \|f_\alpha\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}},$$
kde se infimum bere přes všechny takové množiny funkcí $\{f_\alpha\}_{|\alpha| \le k}$, které splňují (2.67).

Důkaz. V obecném případě např. Kufner et al. [1977], speciální případ $k = 1$ a $p = 2$ lze nalézt např. v Evans [1998]. ■

Jiná možná charakterizace je

Věta 2.9.2 Buď $p \in (1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$ a $\Omega \in \mathcal{C}^{k,0}(\Omega)$. Potom pro každé $g \in W_0^{k,p'}(\Omega)$ definuje předpis
$$\langle \phi_q, f \rangle = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha g D^\alpha f dx, \ f \in W_0^{k,p}(\Omega)$$
spojitý lineární funkcionál na $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Obráceně, ke každému $\phi \in \left(W_0^{k,p}(\Omega)\right)^\star$ existuje právě jedno $g \in W_0^{k,p'}(\Omega)$ takové, že
$$\forall f \in W_0^{k,p}(\Omega): \ \langle \phi, f \rangle = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha g D^\alpha f dx.$$

Navíc existuje kladná konstanta $K = K(d, k, p, \Omega)$ taková, že
$$K \|g\|_{W^{k,p'}(\Omega)} \le \|\phi\|_{\left(W_0^{k,p}(\Omega)\right)^\star} \le \|g\|_{W^{k,p'}(\Omega)}.$$

2.10 Ekvivalentní zavedení Sobolevových prostorů

Další prostory, které jsou ve skutečnosti shodné s $W^{k,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, jsou tzv. Beppo-Leviho prostory. Jejich zavedení je mírně komplikované, zato však poměrně snadno dokážeme některé vlastnosti těchto prostorů a následně tedy i Sobolevových prostorů zavedených podle standardní definice 2.1.6.

Označme $P^{a,b} := \{x = ta + (1-t)b | \, t \in \mathbb{R}, \, a, b \in \mathbb{R}^d\}$. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ oblast. Potom existuje posloupnost otevřených intervalů J_i (konečná nebo nekonečná) taková, že

1. $\forall i \neq j : J_i \bigcap J_j = \emptyset$
2. $\Omega \bigcap P^{a,b} = \bigcup_j \{x = ta + (1-t)b | \ t \in J_j\}$.

Buď u funkce definovaná skoro všude na Ω. Položme
$$\varphi(t) = u(ta + (1-t)b), \ \text{pro } t \in \bigcup_j J_j.$$

Definice 2.10.1 — množina $AC(\Omega)$. řekneme, že funkce u je absolutně spojitá na přímce $P^{a,b}$, je-li spojitá na všech kompaktních podintervalech intervalů J_j.

Buď $i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, d$. Označme $AC_i(\Omega)$ množinu všech funkcí definovaných na Ω pro které platí:

Je-li M množina bodů $(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_d)\subset\mathbb{R}^{d-1}$ takových, že pro rovnoběžky s osami x_i, tj. pro

$$P_{(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_d)}:=\{(x_1,\dots,x_{i-1},\xi,x_{i+1},\dots,x_d)\mid \xi\in\mathbb{R}\}$$

je splněno

$$\Omega\bigcap P_{(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_d)}\neq\emptyset$$

a současně funkce u není absolutně spojitá na této přímce $P_{(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_d)}$, potom je $|M|_{d-1}=0$.

Značíme $AC(\Omega)=\bigcap\limits_{i=1}^{d}AC_i(\Omega)$.

Definice 2.10.2 — Beppo-Leviho prostor. Buď $p\in[1,\infty]$ a $\Omega\subset\mathbb{R}^d$. Potom $BL^p(\Omega)$ – Beppo-Leviho prostor – je množina všech funkcí $u\in L^p(\Omega)$, pro které existuje $\tilde u\in AC(\Omega)$ takové, že

1. $\tilde u=u$ skoro všude v Ω,
2. $\forall i=1,\dots,d:\ \left[\frac{\partial\tilde u}{\partial x_i}\right]\in L^p(\Omega)$, kde $\left[\frac{\partial\tilde u}{\partial x_i}\right]$ značí klasickou[a] parciální derivaci funkce $\tilde u$.

[a]Díky absolutní spojitosti $\tilde u$ existuje $\left[\frac{\partial\tilde u}{\partial x_i}\right]$ skoro všude na Ω.

Jinými slovy funkce $u\in BL^p(\Omega)$ právě když změnou funkce u na množině míry nula dostaneme funkci $\tilde u$, která je absolutně spojitá na skoro všech rovnoběžkách s osami, a navíc u a všechny klasické parciální derivace $\left[\frac{\partial\tilde u}{\partial x_i}\right]$ patří do $L^p(\Omega)$.

Cvičení 2.10.3. Ukažte, že

$$\|u\|_{BL^p(\Omega)}=\|u\|_{L^p(\Omega)}+\left(\sum_{i=1}^{d}\left\|\left[\frac{\partial\tilde u}{\partial x_i}\right]\right\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac1p}$$

definuje normu ve vektorovém prostoru $BL^p(\Omega)$.

Věta 2.10.4 — Ekvivalence Beppo–Leviho a Sobolevových prostorů. Buď $p\in[1,\infty]$. Pak platí $BL^p(\Omega)\leftrightarrows W^{1,p}(\Omega)$ (tj. Beppo-Leviho prostory jsou izometricky izomorfní s odpovídajícími Sobolevovými prostory).

Důkaz plyne z následujících dvou lemmat.

Lemma 2.10.5 Buď $u\in L^1_{loc}(\Omega)\bigcap AC_i(\Omega)$. Je-li $\left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]\in L^1_{loc}(\Omega)$, potom se $\left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]$ shoduje se slabou derivací, tj.

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]=D_{x_i}u$$

skoro všude na Ω.

Důkaz. Zvolme $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ a prodlužme u a φ nulou vně Ω. Potom

$$\begin{aligned}\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left(\int_{P_{(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_d)}}u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i\right)\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_{i-1}\,\mathrm{d}x_{i+1}\dots\mathrm{d}x_d\\&=-\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left(\int_{P_{(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_d)}}\left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]\varphi\right)\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_{i-1}\,\mathrm{d}x_{i+1}\dots\mathrm{d}x_d\\&=-\int_\Omega\left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]\varphi\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

přičemž jsme dvakrát použili Fubiniho větu a vlastnosti absolutně spojitých funkcí. ∎

Lemma 2.10.6 Buď $u,D_{x_i}u\in L^1_{loc}(\Omega)$. Potom existuje $\tilde u\in AC_i(\Omega)$ takové, že $u=\tilde u$ skoro všude na Ω a navíc

$$\left[\frac{\partial\tilde u}{\partial x_i}\right]=D_{x_i}u$$

skoro všude na Ω.

Důkaz. Dodefinujeme u nulou vně Ω. Buď $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost kompaktních množin takových, že $K_n\subset K_{n+1}$ a $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}K_n=\Omega$. Buď $\varphi_n\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ taková, že $\varphi_n=1$ na K_n a $\varphi_n=0$ vně K_{n+1}. Položme

$$\overline{u}_n=u\varphi_n,\ \overline{w}_n=D_{x_i}\overline{u}_n.$$

Zřejmě je $\overline{w}_n=D_{x_i}u\varphi_n+u\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i}$ a $\overline{u}_n,\overline{w}_n\in L^1(\Omega)$. Dále $\overline{u}_n=u$ a $\overline{w}_n=D_{x_i}u$ na K_n. Definujeme

$$\overline{u}_n^\star(x)=\overline{u}_n^\star(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_d)=\int_{-\infty}^{x_i}\overline{w}_n(x_1,\dots,x_{i-1},y,x_{i+1},\dots,x_d)\,\mathrm{d}y.$$

Funkce $\overline{u}_n^\star$ je definována pro taková $(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_d)\in\mathbb{R}^{d-1}$, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{w}_n(x_1,\dots,x_{i-1},y,x_{i+1},\dots,x_d)\,\mathrm{d}y<\infty,$$

což je splněno pro skoro všechna $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$ (ve smyslu $d-1$-dimenzionální Lebesgueovy míry). Evidentně $\overline{u}_n^\star \in AC_i(\Omega)$.

Pokud se nám podaří dokázat, že

$$\overline{u}_n^\star = \overline{u}_n \text{ skoro všude na } \Omega, \tag{2.68}$$

můžeme pro $x \in K_n$ položit

$$\tilde{u}(x) = \overline{u}_n^\star(x), \ n = 1, 2, \dots.$$

Pak je $\tilde{u}(x) \in AC_i(\Omega)$ a z předchozího lemmatu 2.10.5 plyne, že

$$\left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}\right] = D_{x_i} u,$$

což jsme chtěli ukázat.

Vraťme se k (2.68). Protože $\overline{u}_n$ má kompaktní nosič v Ω, existuje posloupnost $\{u_n^k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ taková, že[16]

$$\lim_{k\to\infty} \left\| u_n^k - \overline{u}_n \right\|_{L^p(\Omega)} = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \frac{\partial \overline{u}_n^k}{\partial x_i} - \overline{w}_n \right\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Máme tedy

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \|\overline{u}_n - \overline{u}_n^\star\|_{L^1(\Omega)} &\le \lim_{k\to\infty} \left\|\overline{u}_n - u_n^k\right\|_{L^1(\Omega)} + \lim_{k\to\infty} \left\|u_n^k - \overline{u}_n^\star\right\|_{L^1(\Omega)} \\ &= \lim_{k\to\infty} \left\|u_n^k - \overline{u}_n^\star\right\|_{L^1(\Omega)} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \left\|u_n^k - \overline{u}_n^\star\right\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega |u_n^k - \overline{u}_n^\star| \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \left| u_n^k - \int_{-\infty}^{x_i} \overline{w}_n(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_d)\,\mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \left| \int_{-\infty}^{x_i} \left(\frac{\partial u_n^k}{\partial x_i} - \overline{w}_n \right) \mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \\ &\le \int_\Omega \int_{K_{n+2} \cap P_{(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_d)}} \left| \frac{\partial u_n^k}{\partial x_i} - \overline{w}_n \right| \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\le 2\,\mathrm{diam}(K_{n+2}) \left\| \frac{\partial \overline{u}_n^k}{\partial x_i} - \overline{w}_n \right\|_{L^1(\Omega)} \to 0, \end{aligned}$$

neboť $\operatorname{supp} w_n \subset K_{n+1}$ a pro vhodnou volbu u_n^k můžeme docílit toho, že $\operatorname{supp} u_n^k \subset K_{n+2}$. Odtud tedy $\overline{u}_n^\star = \overline{u}_n$ skoro všude na Ω a důkaz je hotov. ∎

Díky větě 2.10.4 dokážeme snadno následující vlastnosti $W^{1,p}(\Omega)$ prostorů.

Důsledek 2.10.7 (některé vlastnosti Sobolevových prostorů).

1. Nechť $\Omega = I = (a,b)$, $a, b \in \mathbb{R}$ a $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$. Pak existuje reprezentant $u^\star = u$ skoro všude na (a,b) takový, že $u^\star \in \mathcal{C}([a,b])$.
2. Nechť $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1,\infty]$ a nechť $\nabla u = 0$ skoro všude na Ω . Pak $u = konst.$ skoro všude na Ω.
3. Označme $u^+ = \max(0, u)$ a $u^- = \max(0, -u)$. Je-li $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1,\infty]$ pak je i $u^+, u^-, |u| \in W^{1,p}(\Omega)$.

Důkaz. (1) Tvrzení plyne okamžitě z definice $BL^p(\Omega)$.
(2) Tvrzení plyne z toho, že je-li $\tilde{u} \in AC(\Omega)$ a $\left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}\right] = 0$ pro $i = 1, \dots, d$ potom nutně $\tilde{u} = konst.$
(3) Je-li u absolutně spojitá funkce, potom jsou absolutně spojité i u^+, u^- a $|u|$ a tvrzení proto plyne z rovnosti $BL^p(\Omega)$ a $W^{1,p}(\Omega)$. Navíc zřejmě

$$D_{x_i} u^+ = \begin{cases} D_{x_i} u & \text{skoro všude na } u > 0 \\ 0 & \text{skoro všude na } u \le 0 \end{cases}$$

$$D_{x_i} u^- = \begin{cases} -D_{x_i} u & \text{skoro všude na } u < 0 \\ 0 & \text{skoro všude na } u \ge 0 \end{cases}$$

$$D_{x_i} |u| = \begin{cases} D_{x_i} u & \text{skoro všude na } u > 0 \\ -D_{x_i} u & \text{skoro všude na } u < 0 \\ 0 & \text{skoro všude na } u = 0. \end{cases}$$

∎

[16] Zde ve skutečnosti využíváme tvrzení 2.2.1, které dokážeme v dalším oddílu nezávisle na výsledcích této části. Není ale těžké nahlédnout, že můžeme vzít $u_n^k = \eta_{\frac{1}{k}} \star u_n$, kde $\eta_{\frac{1}{k}}$ je regularizátor, viz. A.3.27.

Kapitola 3

Lineární eliptické rovnice druhého řádu

Eliptické rovnice druhého řádu patří mezi nejvýznamnější typy rovnic. Jsou také nejvíce studované a zároveň nejvíce prozkoumané. Důvodem k intenzivnímu studiu těchto rovnic je fakt, že popisují mnoho reálných problémů. Zde si ukážeme některé základní typy takových rovnic, zformulujeme okrajovou úlohu v termínech slabého řešení a budeme se zabývat jeho existencí a popř. jednoznačností. Dále se budeme zabývat otázkami na vyšší regularitu těchto řešení a budeme studovat, za jakých podmínek tato slabá řešení jsou i řešeními klasickými. Ukážeme, že v některých případech jsou slabá řešení také minimizéry určitých úloh variačního počtu, popř. i tzv. duálních úloh. Na závěr této úvodní části bychom chtěli zdůraznit, že ač se na první pohled bude zdát, že teorie je zcela kompletní a v některých případech i poměrně jednoduchá, pravý opak je pravdou. I v této nejvíce prozkoumané oblasti teorie PDR je stále velký počet důležitých otevřených problémů a na druhou stranu existují i výsledky, které ukazují, že vše není tak jednoduché a přímočaré, jak se na první pohled může stát.

Tuto kapitolu rozdělíme na dvě části. V první budeme studovat lineární úlohy, které pak povedou na teorii v obecných Hilbertových prostorech, což nám velmi usnadní situaci. Na konci se pak budeme zabývat i některými problémy nelineárními, prostory, ve kterých budeme hledat řešení, budou však nadále prostory Hilbertovy. Nelineárními úlohami, kde budou Hilbertovy prostory nahrazeny prostory Banachovými, se pak budeme věnovat v následující kapitole.

3.1 Lineární parciální diferenciální rovnice 2. řádu

V této části budeme studovat vlastnosti následujícího **diferenciální operátoru druhého řádu**. Pro otevřenou $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a libovolnou funkci $u : \Omega \to \mathbb{R}$ definujeme

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{d} c_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}(d_i u) + bu, \tag{3.1}$$

kde $\mathbb{A} := (a_{ij})_{i,j=1}^d : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $\vec{c} := (c_i)_{i=1}^d : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $\vec{d} := (d_i)_{i=1}^d : \Omega \to \mathbb{R}^d$ a $b : \Omega \to \mathbb{R}$ jsou koeficienty operátoru L. Pro zkrácení zápisu budeme v dalším textu často používat také Einsteinovu sčítací konvenci (sčítáme přes dva opakující se indexy, od jedné do d), popř. budeme používat vektorový zápis, tj. operátor L budeme také ekvivalentně zapisovat jako

$$\begin{aligned} Lu &= -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(d_i u) + bu \\ &= -\mathrm{div}\,(\mathbb{A}\nabla u) + \vec{c}\cdot\nabla u + \mathrm{div}\,(\vec{d}u) + bu. \end{aligned}$$

Přestože některé důkazy budou provedeny pouze pro „skalární“ operátor L definovaný ve (3.1), všechny kromě principu maxima mohou být zobecněny i pro systémy rovnic, tj. pro problémy, kde je α-tá složka operátoru L, s $\alpha \in \{1,\dots,N\}$ a $N \in \mathbb{N}$ značící počet neznámých, definována pro $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ jako

$$\begin{aligned} (L\mathbf{u})^\alpha := &-\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{\alpha\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial x_j}\right) + \sum_{\beta=1}^{N}\sum_{i=1}^{d} c_i^{\alpha\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial x_i} \\ &+ \sum_{\beta=1}^{N}\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}(d_i^{\alpha\beta}u^\beta) + \sum_{\beta=1}^{N} b^{\alpha\beta}u^\beta. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Parametry operátoru L pak stejně musíme chápat v tomto smyslu a definujeme zobrazení $\vec{\mathbb{A}} : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d\times N\times N}$, $\vec{\mathfrak{c}} : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times N\times N}$, $\vec{\mathfrak{d}} : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times N\times N}$ a $\mathfrak{b} : \Omega \to \mathbb{R}^{N\times N}$ pomocí $(\vec{\mathbb{A}})_{ij}^{\alpha\beta} := a_{ij}^{\alpha\beta}$, $(\vec{\mathfrak{c}})_i^{\alpha\beta} := c_i^{\alpha\beta}$, $(\vec{\mathfrak{d}})_i^{\alpha\beta} := d_i^{\alpha\beta}$ a $(\mathfrak{b})^{\alpha\beta} := b^{\alpha\beta}$. Tato zobrazení nazýváme koeficienty operátoru L. Pro zkrácení zápisu budeme opět používat vektorovou symboliku

$$L\mathbf{u} = -\mathrm{div}\,\left(\vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u}\right) + \vec{\mathfrak{c}}\nabla\mathbf{u} + \mathrm{div}\,(\vec{\mathfrak{d}}\mathbf{u}) + \mathfrak{b}\mathbf{u},$$

který je nyní třeba chápat jako rovnost na $\mathbb{R}^N$. Výraz $\vec{\mathfrak{c}}\nabla\mathbf{u}$ chápeme jako $(\vec{\mathfrak{c}}\nabla\mathbf{u})^\alpha = \sum_{i=1}^d \sum_{\alpha=1}^N c_i^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial x_i}$, $\vec{\mathfrak{d}}\mathbf{u}$ jako $(\vec{\mathfrak{d}}\mathbf{u})_i^\alpha = \sum_{\beta=1}^N d_i^{\alpha\beta} u^\beta$, $\mathfrak{b}\mathbf{u}$ jako $(\mathfrak{b}\mathbf{u})^\alpha = \sum_{\beta=1}^N b^{\alpha\beta} u^\beta$.

Nyní si zavedeme pojem eliptický operátor, který bude samozřejmě vztažen k operátoru L.

Definice 3.1.1 — Eliptický operátor I. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená. Řekneme, že operátor L definovaný v (3.1) je eliptický, právě tehdy, když pro každé $i, j \in \{1, \dots, d\}$ platí $a_{ij}, c, c_i, d_i \in L^\infty(\Omega)$ a existuje konstanta $C_1 > 0$ taková, že pro všechna $\vec{z} \in \mathbb{R}^d$ a skoro všechna $x \in \Omega$ platí

$$\vec{z}^T \mathbb{A}(x)\vec{z} = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) z_i z_j \geq C_1 |\vec{z}|^2. \tag{3.3}$$

Velice podobným způsobem definujeme elipticitu i pro operátor definovaný v (3.2).

Definice 3.1.2 — Eliptický operátor II. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená. Řekneme, že operátor L definovaný v (3.2) je eliptický, právě tehdy, když pro každé $i, j \in \{1, \dots, d\}$ a $\alpha, \beta \in \{1, \dots, N\}$ platí $a_{ij}^{\alpha\beta}, d_i^{\alpha\beta}, c_i^{\alpha\beta}, b^{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$ a existuje konstanta $C_1 > 0$ taková, že pro všechna $\vec{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{d\times N}$ a skoro všechna $x \in \Omega$ platí

$$\vec{\mathbf{z}}^T \vec{\mathbb{A}}(x)\vec{\mathbf{z}} = \sum_{i,j=1}^d \sum_{\alpha\beta=1}^N a_{ij}^{\alpha\beta}(x) z_i^\alpha z_j^\beta \geq C_1 |\vec{\mathbf{z}}|^2. \tag{3.4}$$

Dále se zaměříme na samotnou definici problému, který chceme řešit. Pod pojmem **data** budeme tedy v dalším textu rozumět následující:

- Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ bude vždy s lipschitzovskou hranicí a její hranice bude tvořena čtyřmi částmi
$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup M$$
kde Γ_i je otevřená v $\partial\Omega$ pro $i = 1, 2, 3$ a $(d-1)$-rozměrná Lebesgueova míra množiny M je nulová.
- Data na Ω, tj.
$$\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N.$$
- Data na $\partial\Omega$
$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &: \Gamma_1 \to \mathbb{R}^N, \\ \mathbf{g} &: \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \to \mathbb{R}^N, \\ \boldsymbol{\sigma} &: \Gamma_3 \to \mathbb{R}^{N\times N}. \end{aligned}$$

Cílem je vyřešit úlohu:

Definice 3.1.3 — Okrajová lineární eliptická úloha. Pro daná data $\Omega, \mathbf{f}, \mathbf{u}_0, \mathbf{g}$ a $\boldsymbol{\sigma}$ a operátor L definovaný v (3.2) hledáme $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ splňující

$$L\mathbf{u} = \mathbf{f} \ \text{ v } \ \Omega, \tag{3.5}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ na } \ \Gamma_1 \qquad \text{(Dirichletova okrajová podmínka)}, \tag{3.6}$$

$$(\vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u} - \vec{\mathfrak{d}}\mathbf{u}) \cdot \vec{\nu} = \mathbf{g} \ \text{ na } \ \Gamma_2 \qquad \text{(Neumannova okrajová podmínka)}, \tag{3.7}$$

$$(\vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u} - \vec{\mathfrak{d}}\mathbf{u}) \cdot \vec{\nu} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{u} = \mathbf{g} \ \text{ na } \ \Gamma_3 \qquad \text{(Newtonova okrajová podmínka)}. \tag{3.8}$$

Výše uvedená definice tedy zahrnuje systém eliptických rovnic se třemi druhy okrajových podmínek. Připomeňme, že rovnice (3.5)–(3.8) se podrobněji zapíší takto. Pro každé $\alpha \in \{1, \dots, N\}$ platí:

$$\begin{aligned} -\sum_{\beta=1}^N \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{\alpha\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial x_j}\right) + \sum_{\beta=1}^N \sum_{i=1}^d c_i^{\alpha\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial x_i} \\ + \sum_{\beta=1}^N \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}(d_i^{\alpha\beta} u^\beta) + \sum_{\beta=1}^N b^{\alpha\beta} u^\beta = f^\alpha \ \text{ v } \ \Omega, \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$u^\alpha = u_0^\alpha \text{ na } \ \Gamma_1, \tag{3.10}$$

$$\sum_{\beta=1}^N \sum_{i}^d \left(\left(\sum_{j=1}^d a_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial x_j} \right) - (d_i^{\alpha\beta} u^\beta) \right) \nu_i = g^\alpha \ \text{ na } \ \Gamma_2, \tag{3.11}$$

$$\sum_{\beta=1}^N \sum_{i}^d \left(\left(\sum_{j=1}^d a_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial x_j} \right) - (d_i^{\alpha\beta} u^\beta) \right) \nu_i + \sum_{\beta=1}^N \sigma^{\alpha\beta} u^\beta = g^\alpha \ \text{ na } \ \Gamma_3. \tag{3.12}$$

V praxi se člen $\vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u}\cdot\vec{\nu}$ často nahrazuje značením $\nabla\mathbf{u}\cdot\vec{\mathfrak{n}}$, kde $\vec{\mathfrak{n}}$ je tzv. konormála definovaná vztahem $n_j^{\alpha\beta} := \sum_{i=1}^d a_{ij}^{\alpha\beta}\nu_i$.

Pozorování 3.1.4. Všimněme si, že pro $N = 1$ (skalární rovnice) vektor konormály $\vec{n}(x) = (n_1,\dots,n_d)$ směřuje v každém bodě $x \in \partial\Omega$ ven z oblasti, protože díky předpokladům na $\mathbb{A}$ (viz (3.3) a (3.4)) platí $\vec{n}(x)\cdot\vec{\nu}(x) = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\nu_j(x)\nu_i(x) \ge C_1|\nu(x)|^2 = C_1 > 0$.

Dále si uvedeme několik typických příkladů, které zapadají mezi okrajové lineární eliptické úlohy.

Příklad 3.1.5. Buď $N = 1$ (tedy jde pouze o jednu rovnici) a $\mathbb{A}(x) = \mathbb{I}$ (tj. $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$ pro každé $x \in \Omega$), $b = 0$ a $\vec{c} = \vec{d} = \vec{0}$ v Ω. Potom se úloha (3.5)–(3.8) redukuje na tvar

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ v } \Omega,\\ u &= u_0 \text{ v } \Gamma_1,\\ \frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}} = \frac{\partial u}{\partial\vec{n}} &= g \text{ v } \Gamma_2,\\ \frac{\partial u}{\partial\vec{n}} + \sigma u &= g \text{ v } \Gamma_3. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Tato úloha popisuje například rovnovážné rozdělení teploty v homogenním a izotropním materiálu za podmínek, kdy na Γ_1 je daná teplota u_0, na Γ_2 je předepsán tok tepla hranicí a na Γ_3 je tento tok úměrný rozdílu vnější (dané) a vnitřní (neznámé) teploty.

Další příklad znázorňuje, že eliptická úloha je obecně vhodná k popisu jevů difúze a transportu.

Příklad 3.1.6. Buď $N = 1$, $b = 0$, $\vec{d} = \vec{0}$ a $\vec{c}$ takový, že $\operatorname{div}\vec{c} = 0$ v Ω. Potom se úloha (3.5) redukuje na tvar

$$-\operatorname{div}\mathbb{A}(\nabla u) + \vec{c}\cdot\nabla u = f \text{ v } \Omega. \tag{3.14}$$

Tato rovnice obecně popisuje dva jevy: člen $\mathbb{A}\nabla u$ reprezentuje difúzní tok (např. Brownův pohyb) a člen $\vec{c}\cdot\nabla u$ reprezentuje transport veličiny u v nestlačitelné tekutině pohybující se rychlostí $\vec{c}(x)$ v bodě x.

Konečně uvedeme ještě jednoduchý příklad na systém rovnic, který v sobě navíc bude zahrnovat i „reaktivní“ členy.

Příklad 3.1.7. Buď $N = 2$, $\mathbb{A} = \mathbb{I}$ (tj. $a_{ij}^{\alpha\beta} := \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}$), $\vec{\mathfrak{d}} = \vec{\mathfrak{c}} = \vec{\mathfrak{o}}$ a $b^{\alpha\beta} := (-1)^\alpha(1-\delta_{\alpha\beta})$. Potom se úloha (3.5) redukuje na tvar

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u^1 - u^2 &= f^1\\ -\Delta u^2 + u^1 &= f^2 \end{aligned}\right\} \text{ v } \Omega. \tag{3.15}$$

Ve zbytku této kapitoly se budeme zabývat řešitelností a dalším kvalitativním vlastnostem řešení obecné úlohy zavedené v Definici 3.1.3, nicméně čtenář by měl mít na paměti, že naším prvořadým úkolem je porozumění prototypům rovnic uvedených v (3.5)–(3.8) spíše než budování zcela abstraktní teorie. Tím bude také motivováno zavedení pojmu slabého řešení, ač by v některých situacích definice mohla být jiná.

3.2 Definice slabého řešení

Postup „odvození“ slabé formulace byl už naznačen v první kapitole. My se zde přidržíme této myšlenky a pokusíme se odvodit vhodnou formulaci našeho problému. Předpokládejme tedy, že $\mathbf{u}$ je klasické řešení (3.5)–(3.8) a že koeficienty eliptického operátoru a data jsou hladké. Buď nyní pro každé $\alpha \in \{1,\dots,N\}$ $\varphi^\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ libovolná splňující $\varphi^\alpha = 0$ na Γ_1. Pokud vynásobíme α-tou rovnici v (3.5) φ^α, sečteme přes $\alpha = 1,\dots,N$ a zintegrujeme celou rovnost přes Ω, získáme tím identitu (viz také zápis (3.9))

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha,\beta=1}^N \int_\Omega \Big(-\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{\alpha\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^d c_i^{\alpha\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}(d_i^{\alpha\beta}u^\beta) + b^{\alpha\beta}u^\beta\Big)\varphi^\alpha \,\mathrm{d}x&\\ = \int_\Omega \sum_{\alpha=1}^N f^\alpha\varphi^\alpha \,\mathrm{d}x.& \end{aligned}$$

Nyní u členů s divergencí budeme integrovat per partes a získáme tak identitu

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha,\beta=1}^N \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^d a_{ij}^{\alpha\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^d c_i^{\alpha\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial x_i}\varphi^\alpha - \sum_{i=1}^d d_i^{\alpha\beta}u^\beta\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x_i} + b^{\alpha\beta}u^\beta\varphi^\alpha\Big)\,\mathrm{d}x&\\ + \sum_{\alpha,\beta=1}^N \int_{\partial\Omega}\Big(-\sum_{i,j=1}^d a_{ij}^{\alpha\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial x_j}\nu_i + \sum_{i=1}^d d_i^{\alpha\beta}u^\beta\nu_i\Big)\varphi^\alpha \,\mathrm{d}S = \int_\Omega \sum_{\alpha=1}^N f^\alpha\varphi^\alpha \,\mathrm{d}x.& \end{aligned}$$

Pro hraniční integrál nyní využijeme podmínky (3.11)–(3.12) a fakt, že $\varphi^\alpha = 0$ na Γ_1, a výše uvedenou identitu přepíšeme do finálního tvaru (dodefinováním $\mathbf{g}$ nulou na Γ_1)

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{d} c_i^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial x_i} \varphi^\alpha - \sum_{i=1}^{d} d_i^{\alpha\beta} u^\beta \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_i} + b^{\alpha\beta} u^\beta \varphi^\alpha \Big) \,\mathrm{d}x \\ + \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \int_{\Gamma_3} \sigma^{\alpha\beta} u^\beta \varphi^\alpha \,\mathrm{d}S = \int_\Omega \sum_{\alpha=1}^{N} f^\alpha \varphi^\alpha \,\mathrm{d}x + \sum_{\alpha=1}^{N} \int_{\partial\Omega} g^\alpha \varphi^\alpha \,\mathrm{d}S.$$

Navíc použitím maticového, popř. vektorového zápisu, můžeme tuto identitu přepsat do mnohem pohlednějšího tvaru (zde označíme $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^N)$ a podobně pro ostatní veličiny)

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Big(\vec{\mathbb{A}} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} + \vec{\mathbb{c}} \nabla \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \vec{\mathbb{d}} \nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{u} + \mathbb{b} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \Big) \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_3} \mathbb{\sigma} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}S \\ = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}S. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Pro další účely této sekce si zkrátíme zápis levé strany ještě více a zadefinujeme si pro pevný operátor L a pevné $\vec{\boldsymbol{\sigma}}$ následující bilineární formu

$$B_{L,\mathbb{\sigma}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) := \int_\Omega \Big(\vec{\mathbb{A}} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} + \vec{\mathbb{c}} \nabla \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \vec{\mathbb{d}} \nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{u} + \mathbb{b} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \Big) \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_3} \mathbb{\sigma} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}S, \tag{3.17}$$

kde předpokládáme, že všechny integrály existují a jsou konečné. V první kapitole už bylo naznačeno, že námi hledané řešení by mělo náležet do prostoru $W^{1,2}(\Omega)$. Pro zopakování této motivace uvažujme nyní speciální případ $\vec{\mathbb{A}} = \vec{\mathbb{I}}$, $\mathbb{b} = \mathfrak{I}$ a $\mathbf{f}$ libovolné a všechna ostatní data a parametry nulové. Pokud položíme $\boldsymbol{\varphi} := \mathbf{u}$ v (3.16), získáme identitu

$$\|\mathbf{u}\|_{1,2}^2 = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{f}\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_{1,2}^2, \tag{3.18}$$

kde jsme na pravé straně využili Youngovu nerovnost. Vidíme, že druhý člen v nerovnosti můžeme převést na levou stranu a tedy, že přirozeně se nabízející norma, kterou máme (formálně) a priori pod kontrolou, je $W^{1,2}$-norma. Nyní a v celé kapitole budeme nadále předpokládat, že $\mathbf{U}_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ je taková funkce, že stopa $\mathbf{U}_0$ je rovna $\mathbf{u}_0$ na Γ_1. To nás tedy vede k následující definici slabého řešení (3.5)–(3.8).

Definice 3.2.1 — Slabé řešení okrajové lineární eliptické úlohy. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ s příslušnými částmi hranice $\{\Gamma_i\}_{i=1}^3$ a operátor L eliptický ve smyslu Definice 3.1.2. Definujme

$$V := \{\boldsymbol{\varphi} = (\varphi^1, \ldots, \varphi^N) : \ \forall \alpha = 1, \ldots, N \ \varphi^\alpha \in W^{1,2}(\Omega), \ T\varphi^\alpha|_{\Gamma_1} = 0\}$$

se standardní normou $\|\varphi\|_V^2 := \sum_{\alpha=1}^N \|\varphi^\alpha\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2$. Buď dále pro každé $\alpha, \beta = 1, \ldots, N$ funkce $\sigma^{\alpha\beta} \in L^\infty(\Gamma_3)$, $u^\alpha \in W^{1,2}(\Omega)$ a data $g^\alpha \in (W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega))^*$ a $f^\alpha \in V^*$. Řekneme, že $\mathbf{u}$ je slabým řešením (3.9)–(3.12), pokud

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} - \mathbf{U}_0 \in V \\ &B_{L,\mathbb{\sigma}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_V + \sum_{\alpha=1}^{N} \langle g^\alpha, \varphi^\alpha \rangle_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)} \text{ pro pro každé } \boldsymbol{\varphi} \in V. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Díky předpokladům na data a na koeficienty operátoru L jsou všechny členy v (3.19) dobře definované a konečné. To lze snadno nahlédnout z Hölderovy nerovnosti a Inverzní věty o stopách (Věta 2.8.6), což je přenecháno čtenáři jako snadné cvičení. Za povšimnutí také stojí předpoklad na $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$. Na rozdíl od integrální formulace (3.16), kde jak $\mathbf{f}$ tak $\mathbf{g}$ byly integrovatelné funkce, v (3.19) uvažujeme, že mohou náležet do určitých duálů. Nicméně, pokud bychom navíc předpokládali, že $f^\alpha \in L^2(\Omega)$ a $g^\alpha \in L^2(\Omega)$, můžeme zcela jistě řešit naší úlohu prostým definováním

$$\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_V := \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x, \qquad \langle g^\alpha, \varphi^\alpha \rangle_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)} := \int_{\partial\Omega} g^\alpha \varphi^\alpha \,\mathrm{d}S.$$

Na druhou stranu, obecnost definice (3.19) nám umožňuje pokrýt i případ, kdy je pravá strana definována jako derivace nehladké funkce. Pokud např. $\Gamma_1 = \partial\Omega$ a $\mathbf{f} := \operatorname{div} \vec{\mathbf{F}}$, kde $F_i^\alpha \in L^2(\Omega)$, můžeme snadno definovat

$$\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_V := -\int_\Omega \vec{\mathbf{F}} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x.$$

Tato definice je navíc zcela konsistentní s preferovanou integrální definicí, protože pokud $F_i^\alpha \in W^{1,2}(\Omega)$ a tedy $f^\alpha \in L^2(\Omega)$, můžeme díky integraci per partes (Věta 2.1.21) identifikovat

$$\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_V := -\int_\Omega \vec{\mathbf{F}} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \operatorname{div} \vec{\mathbf{F}} \cdot \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x.$$

Na začátku této sekce jsme ukázali, že pokud $\mathbf{u}$ je klasické řešení, pak by mělo splňovat i formulaci slabého řešení. Nyní se budeme zabývat i opačnou implikací, tj. pokud $\mathbf{u}$ je slabé řešení, které je navíc dostatečně hladké, pak už jde o řešení klasické. Tato implikace je klíčová pro ospravedlnění slabé formulace, protože říká, že kdykoliv jsme schopni ukázat dostatek regularity pro hladké slabé řešení, pak už dostáváme i řešení klasické. Navíc pokud by se nám podařila ukázat i jednoznačnost slabého řešení, pak už je slabá formulace jediná správná volba. Vše je pak shrnuto v následující větě.

Věta 3.2.2 — O konzistenci slabého řešení. Nechť jsou splněny všechny předpoklady Definice 3.2.1. Nechť pro každé $i,j \in \{1,\dots,d\}$ a každé $\alpha,\beta \in \{1,\dots,N\}$ platí $a_{ij}^{\alpha\beta}, d_i^{\alpha\beta}, \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, $c_i^{\alpha\beta}, b^{\alpha\beta}, f^\alpha \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $\sigma^{\alpha\beta}, g^\alpha \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ a $U_0^\alpha, u^\alpha \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$. Potom $\mathbf{u}$ je klasické řešení (3.9)–(3.12) právě tehdy, když $\mathbf{u}$ je slabé řešení.

Důkaz. První částí důkazu, tj. ukázáním toho, že každé klasické řešení je i řešení slabé, jsme se zabývali na začátku této sekce, a proto důkaz nebudeme opakovat. Věnujme se tedy důkazu druhé implikace. Mějme tedy $u^\alpha \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ pro každé α. Chceme tedy ukázat, že pokud $\mathbf{u}$ splňuje (3.19), pak už také splňuje (3.9)–(3.12). Buď pro každé $\alpha \in \{1,2,\dots,N\}$ funkce $\varphi^\alpha \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ libovolná. Užitím této testovací funkce v (3.19) a díky předpokladům na $\mathbf{f}$ získáme (poznamenejme, že všechny hraniční integrály vymizí díky tomu, že $\boldsymbol{\varphi}$ má kompaktní nosič)

$$\int_\Omega \left(\vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\varphi} + \vec{\mathfrak{c}}\nabla\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi} - \vec{\mathfrak{d}}\nabla\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{u} + \mathfrak{b}\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\right)\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x.$$

Na první a třetí člen na levé straně použijeme integraci per partes (díky silným předpokladům na všechny funkce tento postup nyní můžeme použít) a získáme díky faktu, že hraniční integrály opět vymizí,

$$\int_\Omega L\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x.$$

Protože $\boldsymbol{\varphi}$ je libovolná hladká funkce s kompaktním nosičem, ihned dostaneme platnost (3.9). Platnost (3.10) je zřejmá a soustředíme se tedy ještě na platnost (3.11)–(3.12). Zopakujeme celý postup jen s tím rozdílem, že předpokládáme funkce $\varphi^\alpha \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ takové, že $\varphi^\alpha = 0$ na Γ_1. Tyto funkce splňují $\boldsymbol{\varphi} \in V$ a mohou být tedy použity v (3.19). Dostáváme

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(\vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\varphi} + \vec{\mathfrak{c}}\nabla\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi} - \vec{\mathfrak{d}}\nabla\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{u} + \mathfrak{b}\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\right)\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_3} \mathfrak{s}\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}S \\ = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3} \mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

Na první a třetí člen na levé straně opět použijeme integraci per partes, jen nyní musíme zahrnout i hraniční členy (poznamenejme ale, že integrál přes Γ_1 opět vymizí, protože $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$ na Γ_1)

$$\begin{aligned}\int_\Omega L\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3} \left(\vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u}\vec{\nu}\cdot\boldsymbol{\varphi} - \vec{\mathfrak{d}}\mathbf{u}\cdot\vec{\nu}\right)\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}S + \int_{\Gamma_3} \mathfrak{s}\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}S \\ = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3} \mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

Díky předchozímu kroku již víme, že první členy na obou stranách se rovnají. Protože však $\boldsymbol{\varphi}$ může být volena na $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$ libovolně, ihned dostáváme platnost (3.11)–(3.12). ■

Závěrem této části ještě zformulujeme pojem řešení ležícího mezi klasickým a slabým řešením.

Definice 3.2.3 — Silné řešení. Nechť jsou splněny všechny předpoklady Definice 3.2.1. Nechť pro každé $i,j \in \{1,\dots,d\}$ a každé $\alpha,\beta \in \{1,\dots,N\}$ platí $a_{ij}^{\alpha\beta}, d_i^{\alpha\beta} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $f^\alpha \in L^2(\Omega)$, $g^\alpha \in L^2(\partial\Omega)$ a $U_0^\alpha \in W^{2,2}(\Omega)$. Řekneme, že $\mathbf{u}$ takové, že $u^\alpha \in W^{2,2}(\Omega)$ pro každé $\alpha \in \{1,2,\dots,N\}$, je silné řešení, právě tehdy, když (3.9) platí skoro všude v Ω a (3.10)–(3.12) platí skoro všude na $\partial\Omega$.

Není opět těžké ukázat, že pokud $u^\alpha \in W^{2,2}(\Omega)$ pro každé $\alpha \in \{1,\dots,N\}$ a $\mathbf{u} = (u^1,\dots,u^N)$ je slabé řešení, pak je to i řešení silné a obráceně. Důkaz tohoto tvrzení se provede stejně jako důkaz Věty 3.2.2.

3.3 Existence slabého řešení, jednoznačnost a spojitá závislost na datech pro koercivní operátory

V této části se soustředíme na takové eliptické operátory, které, podobně jako v příkladu Laplaceovy úlohy, formálně vedou k $W^{1,2}$-odhadům. Pro ilustraci uveďme nejdříve jeden jednoduchý příklad. Uvažujme rovnici

$$\begin{aligned}-\Delta u + u &= f \text{ v } \Omega,\\ u &= 0 \text{ na } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Slabá formulace úlohy se nyní redukuje na nalezení funkce $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ takové, že pro všechny $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ platí

$$B_L(u,\varphi) := \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u\varphi)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\varphi\,\mathrm{d}x =: \langle f,\varphi\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

Všimněme si, že bilineární forma B_L není nic jiného než skalární součin na prostoru $W_0^{1,2}(\Omega)$, který je Hilbertův, a výše uvedená úloha se redukuje na tvar

$$(u,\varphi)_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \langle f,\varphi\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} \quad \text{pro každé } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Toto je ale přesně tvrzení Rieszovy věty o reprezentaci (Věta B.2.2), neboli pro každé $f \in (W_0^{1,2}(\Omega))^*$ existuje právě jedno $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ takové, že výše uvedená identita platí.

Tento postup nyní zobecníme a ukážeme, že na základě Rieszovy věty můžeme zformulovat mnohem obecnější tvrzení pro obecnější bilineární formy na Hilbertových prostorech.

Věta 3.3.1 — Laxova–Milgramova. Buď V reálný Hilbertův prostor se skalárním součinem $(\cdot,\cdot)_V$ a normou $\|\cdot\|_V = (\cdot,\cdot)^{1/2}$. Buď $B : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineární forma na V, která je

a) V–eliptická, tzn. existuje $m > 0$ takové, že pro všechna $u \in V$ platí

$$B(u,u) \geq m\|u\|_V^2 \tag{3.20}$$

b) V–omezená, tzn. existuje $M > 0$ takové, že pro všechna $u, v \in V$ platí

$$|B(u,v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V. \tag{3.21}$$

Potom pro každé $F \in V^*$ existuje právě jedno $u \in V$ takové, že pro každé $v \in V$ platí

$$B(u,v) = \langle F, v\rangle_V. \tag{3.22}$$

Navíc u splňuje odhad

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{m}\|F\|_{V^*}. \tag{3.23}$$

Důkaz. Věnujme se nejdříve lehčí části důkazu. Pokud u splňuje (3.22), pak volbou $v := u$ v (3.22) a použitím (3.20) dostaneme

$$m\|u\|_V^2 \leq B(u,u) = \langle F,u\rangle_V \leq \|F\|_{V^*}\|u\|_V,$$

což přímo implikuje (3.23). Navíc, buďte u_1, u_2 dvě řešení (3.22). Pak z bilinerity B (a linearity duality) ihned dostaneme

$$B(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \text{pro každé } v \in X.$$

Volbou $v := u_1 - u_2$ a použitím V–elipticity ihned získáme, že $u_1 = u_2$ a tedy, že řešení existuje nejvýše jedno.

Zbývá tedy ukázat existenci u, které řeší (3.22). Nejdříve použijeme Rieszovu větu o reprezentaci (Věta B.2.2) pro dané $F \in V^*$ najděme $w \in V$ takové, že pro každé $v \in V$ platí $(w,v)_V = \langle F,v\rangle_V$. Rovnice (3.22) pak přejde úlohu nalézt $u \in V$ takové, že pro všechna $v \in V$ platí

$$B(u,v) = (w,v)_V. \tag{3.24}$$

Levou stranu nejdříve přepíšeme do tvaru skalárního součinu. Přesněji, díky bilinearitě a V–omezenosti B vidíme, že pro pevné $u \in X$ platí $B(u,\cdot) \in V^*$. Dle Rieszovy věty existuje právě jeden prvek, označme jej $A(u) \in X$, takový, že pro každé $v \in V$

$$B(u,v) = (A(u),v)_V. \tag{3.25}$$

Rovnice (3.24) tedy přejde na tvar

$$(A(u),v)_V = (w,v)_V. \tag{3.26}$$

K dokončení důkazu existence $u \in V$ splňujícího pro všechna $v \in V$ (3.26) stačí tedy ukázat, že zobrazení $A\colon V \to V$ je na.

Nejdříve shrneme základní vlastnosti A, které přímo plynou z vlastnosti formy B.

(i) A je lineární. Vskutku, protože B je bilineární, máme pro každé $u_1, u_2, v \in V$

$$\begin{aligned}(A(u_1+u_2),v)_V &\overset{(3.25)}{=} B(u_1+u_2,v) = B(u_1,v) + B(u_2,v)\\ &\overset{(3.25)}{=} (A(u_1),v)_V + (A(u_2),v)_V\end{aligned}$$

a tedy A je lineární.

(ii) A je prostý a $A(V)$ je uzavřený podprostor V. Fakt, že $A(V)$ je podprostor, plyne z linearity A. Dále díky V–elipticitě B máme pro každé $u \in V$

$$m\|u\|_V^2 \leq B(u,u) = (A(u),u)_V \leq \|A(u)\|_V \|u\|_V$$

a tedy

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{m}\|A(u)\|_V,$$

což díky linearitě ihned implikuje prostotu. Navíc, pokud $\{A(u^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ je cauchyovská, pak díky linearitě A a výše uvedeného odhadu je i posloupnost $\{u^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cauchyovská a tedy vidíme, že $A(V)$ je uzavřený podprostor.

(iii) A je omezený. Vskutku, díky V–omezenosti B máme

$$\|A(u)\|_V^2 = (A(u), A(u))_V \overset{(3.25)}{=} B(u, A(u)) \leq M\|u\|_V \|A(u)\|_V$$

a tedy $\|A(u)\|_V \leq M\|u\|_V$.

Z výše uvedeného tedy plyne, že $A : V \to V$ je lineární, omezený (a tedy spojitý) a prostý operátor s uzavřeným oborem hodnot $A(V)$, který navíc tvoří podprostor V. Předpokládejme nyní, že $A(V) \neq V$. Potom existuje $v \in V \setminus A(V)$, který lze zvolit tak, že $\|v\|_V = 1$, a navíc pro každé $w \in A(V)$ platí $(v,w)_V = 0$. Volbou $w := A(v) \in A(V)$ a použitím V–elipticity ale získáme

$$0 = (v, A(v))_V = (A(v), v)_V = B(v,v) \geq m\|v\|_V^2 = m > 0,$$

což je spor. Operátor A je tedy na a důkaz je tím hotov. ∎

Naším cílem v této sekci je zformulovat předpoklady na koeficienty operátoru L a data úlohy (3.5)–(3.8) tak, abychom mohli aplikovat Laxovu–Milgramovu větu. Ještě než tomu tak bude, věnujme se velmi speciálnímu případu Neumannovy úlohy. Položme tedy $\vec{\mathfrak{c}} = \vec{\mathfrak{d}} = \vec{\mathfrak{o}}$ a $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ v definici operátoru L a předpokládejme, že $|\Gamma_2| = |\partial\Omega|$. V tomto případě se prostor V v Definici 3.2.1 redukuje na

$$V := \{\boldsymbol{\varphi} = (\varphi^1, \dots, \varphi^N);\ \text{pro každé } \alpha \in \{1,\dots,N\} \text{ platí, že } \varphi^\alpha \in W^{1,2}(\Omega)\}$$

a slabá formulace přejde na problém

$$\int_\Omega \vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x = \langle \mathbf{f},\boldsymbol{\varphi}\rangle_V + \langle \mathbf{g},\boldsymbol{\varphi}\rangle_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)}.$$

Pokud nyní zvolíme $\boldsymbol{\varphi} := (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ ve výše uvedené identitě, získáme, že pro každé $\alpha \in \{1,\dots,N\}$ musí platit

$$\langle f^\alpha, 1\rangle_{W^{1,2}(\Omega)} + \langle g^\alpha, 1\rangle_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)} = 0, \tag{3.27}$$

což, pokud $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$ jsou například L^2-funkce, neznamená nic jiného, než

$$\int_\Omega f^\alpha\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g^\alpha\,\mathrm{d}S = 0 \text{ pro každé } \alpha \in \{1,\dots,N\}. \tag{3.28}$$

Vidíme tedy, že podmínka (3.27), popř. (3.28), je nutná podmínka pro existenci řešení. V dalším navíc ukážeme, že je i postačující.

Nyní zformulujeme abstraktní větu, která nám řekne, že postačující podmínkou pro existenci právě jednoho slabého řešení je V-elipticita bilineární formy $B_{L,\sigma}$ definované v (3.17).

Věta 3.3.2 — O existenci a jednoznačnosti pro koercivní operátory. Nechť jsou splněny všechny předpoklady Definice 3.2.1.

a) Pokud $B_{L,\sigma}$ je V-eliptická, pak existuje právě jedno slabé řešení úlohy (3.5)–(3.8).

b) Pokud $\vec{\mathfrak{c}} = \vec{\mathfrak{d}} = \vec{\mathfrak{o}}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$, $|\Gamma_2| = |\partial\Omega|$ a je splněna podmínka (3.27), pak existuje slabé řešení, které je jednoznačné až na aditivní konstantu.

Důkaz. Věnujme se nejdříve jednoduššímu případu b). V (3.27) jsme si ukázali nutnou podmínku pro existenci řešení. Protože v tomto případě se redukuje řešitelnost na

$$\int_\Omega \vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x = \langle \mathbf{f},\boldsymbol{\varphi}\rangle_V + \sum_{\alpha=1}^N \langle g^\alpha, \varphi^\alpha\rangle_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)},$$

vidíme, že změnou $\widetilde{\mathbf{u}} := \mathbf{u} + \mathbf{k}$, kde $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^N$ je libovolné, je opět řešení, pokud $\mathbf{u}$ bylo řešení. Tato úvaha pak přímo vede k tomu, že namísto prostoru V bychom měli spíše uvažovat faktorprostor V/P_0^N, tj. řekneme, že $u_1 \sim u_2$ právě tehdy, když $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{k} \in \mathbb{R}^N$ skoro všude v Ω. Prostor $(V/P_0)^N$ je opět Hilbertův a díky Větě 2.7.8 ho můžeme opatřit normou

$$\|\mathbf{u}\|^2_{V/P_0^N} := \|\nabla \mathbf{u}\|_2^2 = \sum_{\alpha=1}^N \|\nabla u^\alpha\|_2^2$$

a zřejmě $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V/P_0^N} := \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \,\mathrm{d}x$ je skalární součin. Díky předpokladům na matici $\vec{\mathbb{A}}$ je zřejmě

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_\Omega \vec{\mathbb{A}} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \,\mathrm{d}x$$

bilineární omezená forma. Navíc z předpokladu (3.4) máme

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) := \int_\Omega \vec{\mathbb{A}} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \,\mathrm{d}x \geq C_1 \|\nabla \mathbf{u}\|_2^2 = C_1 \|\mathbf{u}\|^2_{V/P_0^N}$$

a B je tedy i eliptická forma. K tomu, abychom mohli aplikovat Laxovu–Milgramovu větu (Věta 3.3.1), musíme ještě najít $\mathbf{F} \in (V/P_0^N)^*$ tak, aby

$$\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{V/P_0^N} = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_V + \sum_{\alpha=1}^N \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)}.$$

Díky větě o stopách vidíme, že můžeme definovat $\mathbf{F} \in V^*$ pomocí

$$\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_V = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_V + \sum_{\alpha=1}^N \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)}.$$

Zbývá nám ukázat, že toto $\mathbf{F}$ náleží i do $(V/P_0^N)^*$, neboli potřebujeme ukázat, že pro každé $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^N$ a každou $\boldsymbol{\varphi} \in V$ platí, že

$$\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{k} \rangle_V = \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_V.$$

Toto je ale snadný důsledek předpokladu (3.27). Můžeme tedy nyní aplikovat Laxovu–Milgramovu Větu (Věta 3.3.1) a získáme existenci jednoznačného $\mathbf{u} \in V/P_0^N$ řešícího naši úlohu. Vzhledem k tomu, že $\mathbf{u}$ je jednoznačné ve faktorprostoru V/P_0^N, získáme ihned i jednoznačnost slabého řešení až na aditivní konstantu a tím je důkaz pro Neumannovu úlohu hotov.

Zabývejme se nyní případem a). Obdobně jako výše je V Hilbertův prostor a díky Větě o stopách (Věta 2.8.6) a předpokladům na $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$ můžeme položit $F \in V^*$ pomocí

$$\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_V := \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_V + \sum_{\alpha=1}^N \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)}.$$

Uvažujme nyní formu $B_{L,\sigma}$ definovanou v (3.17) a díky linearitě integrálu a předpokladům na data není těžké ověřit (a je čtenáři přenecháno jako cvičení na použití Hölderovy nerovnosti), že jde o bilineární omezenou formu na $(W^{1,2}(\Omega))^N$. Protože je V uzavřený podprostor tohoto prostoru (což plyne ze spojitosti operátoru stop), pak je $B_{L,\sigma}$ i bilineární omezená forma na V. Předpokládejme tedy dle a), že $B_{L,\sigma}$ je V-eliptická.

Nejdříve se budeme věnovat jednoznačnosti řešení úlohy

$$B_{L,\sigma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) = \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_V \quad \text{pro každé } \boldsymbol{\varphi} \in V. \tag{3.29}$$

Buďte tedy $\mathbf{u_1}$ a $\mathbf{u}_2$ dvě řešení taková, že $\mathbf{u}_1 - \mathbf{U}_0^1 \in V$ a $\mathbf{u}_2 - \mathbf{U}_0^2 \in V$ (připomeňme, že $\mathbf{u}_0$ je předepsaná hodnota na Γ_1 a $\mathbf{U}_0^1$ a $\mathbf{U}_0^2$ jsou dvě funkce, mající na Γ_1 stejnou stopu rovnou $\mathbf{u}_0$). Potom ale také $\mathbf{U}_0^1 - \mathbf{U}_0^2 \in V$ a v (3.29) můžeme volit $\boldsymbol{\varphi} := \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \in V$. Odečtením příslušných rovnic pro $\mathbf{u}_1$ a $\mathbf{u}_2$ tedy získáme

$$B_{L,\sigma}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = 0,$$

což díky V-elipticitě (kterou lze nyní použít, protože $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \in V$), vede k $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ a tedy k jednoznačnosti řešení.

Zabývejme se nyní existencí řešení. Budeme hledat $\mathbf{u}$ ve tvaru $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{U}_0$, kde $\mathbf{v} \in V$. Použitím tohoto předpisu v (3.29) a díky linearitě $B_{L,\sigma}$ zjistíme, že pro existenci řešení $\mathbf{u}$ stačí ukázat existenci $\mathbf{v} \in V$, které splňuje

$$B_{L,\sigma}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}) = \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_V - B_{L,\sigma}(\mathbf{U}_0, \boldsymbol{\varphi}) \quad \text{pro každé } \boldsymbol{\varphi} \in V. \tag{3.30}$$

Nejdříve díky bilinearitě a omezenosti $B_{L,\sigma}$ na $(W^{1,2}(\Omega))^N$ můžeme najít $\widetilde{\mathbf{F}} \in V^*$ takový, že

$$\langle \widetilde{\mathbf{F}}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_V = \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_V - B_{L,\sigma}(\mathbf{U}_0, \boldsymbol{\varphi}) \quad \text{pro každé } \boldsymbol{\varphi} \in V.$$

Rovnice (3.30) tak přejde do tvaru

$$B_{L,\sigma}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}) = \langle \widetilde{\mathbf{F}}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_V. \tag{3.31}$$

Nyní již můžeme aplikovat Laxovu–Milgramovu Větu (Věta 3.3.1), protože jsme již dříve ukázali, že $B_{L,\sigma}$ je V-omezená bilineární forma a z předpokladů víme, že je též V-eliptická. Existuje tedy právě jedno $\mathbf{v} \in V$ splňující (3.31) a tedy existuje i $\mathbf{u}$, slabé řešení úlohy (3.5)–(3.8). ■

Zjistili jsme tedy, že k důkazu existence právě jednoho slabého řešení (3.5)–(3.8) stačí ukázat, že $B_{L,\sigma}$ je V-eliptická forma. Navíc pro Neumanovu úlohu jsme ukázali, že podmínka (3.27) je nutná a postačující k existenci slabého řešení. V dalším se blíže zaměříme na identifikaci předpokladů na parametry operátoru L, které nám umožní ukázat kýženou elipticitu. Podotkněme, že podmínka na elipticitu je zcela zásadní a jak uvidíme v dalších sekcích, nesplnění této podmínky může vést k neexistenci popř. nejednoznačnosti řešení. Navíc, v nelineárním případě bude tato podmínka později nahrazena podmínkou na tzv. koercivitu, což bude pouze ekvivalent elipticity v obecných Banachových prostorech. Zároveň výsledky, které níže zformulujeme a dokážeme, používají pouze „hrubou sílu“ na dokázání elipticity $B_{L,\sigma}$ a v mnoha případech, jak bude ukázáno v příkladech níže, nejsou aplikovatelné, přestože může být ukázáno pomocí jemnějších technik, že forma $B_{L,\sigma}$ je opravdu eliptická.

Pro další část si nejprve definujeme dvě pomocné funkce

$$\begin{aligned} \widetilde{b}(x) &:= \inf_{\{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^N;\,|\mathbf{z}|=1\}} \sum_{\alpha,\beta=1}^N b^{\alpha\beta}(x) z^\alpha z^\beta, \\ \widetilde{\sigma}(x) &:= \inf_{\{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^N;\,|\mathbf{z}|=1\}} \sum_{\alpha,\beta=1}^N \sigma^{\alpha\beta}(x) z^\alpha z^\beta. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Poznamenejme, že ve skalárním případě, tj. $N=1$, triviálně platí $\widetilde{b}=b$ a $\widetilde{\sigma}=\sigma$.

Nejdříve zformulujme existenční větu pro případ, kdy je alespoň na části hranice zadána Dirichletova okrajová podmínka.

Věta 3.3.3 — O existenci pro $|\Gamma_1|>0$. Nechť jsou splněny všechny předpoklady Definice 3.2.1 a $|\Gamma_1|>0$. Potom existuje $\varepsilon>0$ závisející pouze na Ω a Γ_1 takové, že pokud data a koeficienty L splňují

$$\begin{aligned} C_1\widetilde{b}(x) - |\vec{\mathfrak{c}}(x)|^2 - |\vec{\mathfrak{d}}(x)|^2 &\geq -\varepsilon C_1^2 \quad \text{skoro všude v } \Omega, \\ \widetilde{\sigma}(x) &\geq -\varepsilon C_1 \quad \text{skoro všude na } \Gamma_3, \end{aligned} \tag{3.33}$$

kde $\widetilde{b}$ a $\widetilde{\sigma}$ jsou definovány v (3.32), pak existuje právě jedno slabé řešení (3.5)–(3.8). Navíc existuje konstanta $C>0$ závisející pouze na Ω,Γ_1,C_1 a ε taková, že řešení $\mathbf{u}$ splňuje

$$\|\mathbf{u}\|_{1,2} \leq C\left(\|\mathbf{f}\|_V + \|\mathbf{U}_0\|_{1,2} + \|\mathbf{g}\|_{(W^{\frac12,2}(\partial\Omega))^*}\right). \tag{3.34}$$

Tato věta nám říka, že pokud je na kousku hranice předepsána Dirichletova okrajová podmínka, pak existence a jednoznačnost slabého řešení je zaručena pokud členy $\mathfrak{b}$ a $\vec{\boldsymbol{\sigma}}$ jsou dobré (nezáporné) a převáží nad potenciálně špatnými členy $\vec{\mathfrak{c}}$ a $\vec{\mathfrak{d}}$. Navíc je zřejmé, že se zvyšující se elipticitou matice $\vec{\mathbb{A}}$ (a tedy zvyšujícím se C_1) je možnost pokrýt i horší případy. Jako snadné cvičení je přenechán nyní důkaz existence a jednoznačnosti pro (3.13) pro $\sigma\geq 0$ a $|\Gamma_1|>0$, úlohu (3.14) pro $\vec{\mathfrak{c}}=0$ a $|\Gamma_1|>0$ a (3.15) pokud $|\Gamma_1|>0$.

Nyní si zformulujeme větu pro případ, kdy předepisujeme pouze Neumannovu nebo Newtonovu okrajovou podmínku. Na rozdíl od předešlé věty pro tento případ budeme potřebovat, že alespoň jeden z členů $\vec{\mathfrak{b}}$ a $\vec{\boldsymbol{\sigma}}$ nejenom, že není špatný, ale že je i dostatečně dobrý.

Věta 3.3.4 — o existenci pro $|\Gamma_1|=0$. Nechť jsou splněny všechny předpoklady Definice 3.2.1 a $|\Gamma_1|=0$. Potom platí:

1) Nechť

$$\begin{aligned} C_1\widetilde{b}(x) - |\vec{\mathfrak{c}}(x)|^2 - |\vec{\mathfrak{d}}(x)|^2 \geq 0 \quad &\text{skoro všude v } \Omega, \\ \int_\Omega C_1\left(\widetilde{b}(x) - |\vec{\mathfrak{c}}(x)|^2 - |\vec{\mathfrak{d}}(x)|^2\right)\mathrm{d}x > 0. & \end{aligned} \tag{3.35}$$

Potom existuje $\varepsilon>0$ (nyní už ovšem závisí na (3.35), C_1 a Ω) takové, že pokud $\vec{\boldsymbol{\sigma}}$ splňuje

$$\widetilde{\sigma}(x) \geq -\varepsilon \quad \text{skoro všude na } \Gamma_3,$$

pak existuje právě jedno slabé řešení (3.5)–(3.8).

2) Nechť

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma}(x) \geq 0 \quad &\text{skoro všude na } \Gamma_3, \\ \int_{\Gamma_3} \widetilde{\sigma}\,\mathrm{d}S > 0. & \end{aligned} \tag{3.36}$$

Potom existuje $\varepsilon>0$ (závislé na (3.36), C_1 a Ω) takové, že pokud $\mathfrak{b}$, $\vec{\mathfrak{c}}$ a $\vec{\mathfrak{d}}$ splňují

$$C_1\widetilde{b}(x) - |\vec{\mathfrak{c}}(x)|^2 - |\vec{\mathfrak{d}}(x)|^2 \geq -\varepsilon \quad \text{skoro všude na } \Gamma_3,$$

pak existuje právě jedno slabé řešení (3.5)–(3.8).

V obou případech navíc existuje konstanta $C > 0$ závisející pouze na Ω, Γ_1, C_1 a ε taková, že řešení $\mathbf{u}$ splňuje

$$\|\mathbf{u}\|_{1,2} \le C\left(\|\mathbf{f}\|_V + \|\mathbf{U}_0\|_{1,2} + \|\mathbf{g}\|_{(W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega))^*}\right). \tag{3.37}$$

Důsledek 3.3.5. Protože úloha je lineární, tak zobrazení $\mathcal{F} : [\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{U}_0] \longmapsto \mathbf{u}$ jakožto zobrazení z $V^* \times (W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_2 \cup \Gamma_3))^* \times V$ do V je omezené a spojité.

Důkaz Věty 3.3.3 a Věty 3.3.4. Díky Větě 3.3.2 stačí ukázat, že forma $B_{L,\mathbb{\sigma}}$ je V-eliptická. Vezměme tedy libovolné $\mathbf{u} \in V$ a dosaďme do definice (3.17). Použitím elipticity matice $\vec{\mathbb{A}}$ (viz (3.4)) a definice $\widetilde{b}$ a $\widetilde{\sigma}$ (viz (3.32)) postupně získáme nerovnost

$$\begin{aligned} B_{L,\mathbb{\sigma}}(\mathbf{u},\mathbf{u}) &= \int_\Omega \left(\vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \vec{\mathfrak{c}}\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - \vec{\mathfrak{d}}\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathfrak{b}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\right)\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_3} \mathbb{\sigma}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}S \\ &\ge \int_\Omega \left(C_1|\nabla\mathbf{u}|^2 - |\vec{\mathfrak{c}}||\nabla\mathbf{u}||\mathbf{u}| - |\vec{\mathfrak{d}}||\nabla\mathbf{u}||\mathbf{u}| + \widetilde{b}|\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_3}\widetilde{\sigma}|\mathbf{u}|^2\right)\mathrm{d}S. \end{aligned}$$

Díky Youngově nerovnosti můžeme dále odhadnout

$$|\vec{\mathfrak{c}}||\nabla\mathbf{u}||\mathbf{u}| + |\vec{\mathfrak{d}}||\nabla\mathbf{u}||\mathbf{u}| \le \frac{C_1}{2}|\nabla\mathbf{u}|^2 + \frac{|\vec{\mathfrak{c}}|^2 + |\vec{\mathfrak{d}}|^2}{C_1}|\mathbf{u}|^2$$

a výše uvedená nerovnost se redukuje na tvar

$$B_{L,\mathbb{\sigma}}(\mathbf{u},\mathbf{u}) \ge \int_\Omega \left(\frac{C_1}{2}|\nabla\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u}|^2\frac{C_1\widetilde{b} - |\vec{\mathfrak{c}}|^2 - |\vec{\mathfrak{d}}|^2}{C_1}\right)\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_3}\widetilde{\sigma}|\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}S. \tag{3.38}$$

Nyní už rozdělíme důkaz na dvě části a to pokud $|\Gamma_1| > 0$ a $|\Gamma_1| = 0$.

V prvním případě použijeme Poincarého nerovnost a Větu o stopách, abychom získali kýženou nerovnost. Přesněji, použitím Věty 2.7.3 dostaneme existenci c_1, která závisí pouze na Ω a Γ_1 takové, že

$$c_1^2\|\mathbf{u}\|_{1,2}^2 \le \int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1}|\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x.$$

Obdobně díky Větě o stopách 2.6.10 získáme existenci konstanty c_2 závisející pouze na Ω takové, že

$$c_2^2\int_{\Gamma_3}|\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}S \le \|\mathbf{u}\|_{1,2}^2.$$

Použitím těchto nerovností v (3.38) tak máme

$$\begin{aligned} B_{L,\mathbb{\sigma}}(\mathbf{u},\mathbf{u}) &\ge c_1^2\frac{C_1}{2}\|\mathbf{u}\|_{1,2}^2 + \int_\Omega |\mathbf{u}|^2\frac{C_1\widetilde{b} - |\vec{\mathfrak{c}}|^2 - |\vec{\mathfrak{d}}|^2}{C_1}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_3}\widetilde{\sigma}|\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}S \\ &\ge c_1^2\frac{C_1}{4}\|\mathbf{u}\|_{1,2}^2 + c_1^2c_2^2\frac{C_1}{4}\int_{\Gamma_3}|\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}S \\ &\quad + \int_\Omega |\mathbf{u}|^2\frac{C_1\widetilde{b} - |\vec{\mathfrak{c}}|^2 - |\vec{\mathfrak{d}}|^2}{C_1}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_3}\widetilde{\sigma}|\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}S \\ &= c_1^2\frac{C_1}{4}\|\nabla\mathbf{u}\|_2^2 + C_1^{-1}\int_\Omega |\mathbf{u}|^2(c_1^2 4^{-1}C_1^2 + C_1\widetilde{b} - |\vec{\mathfrak{c}}|^2 - |\vec{\mathfrak{d}}|^2)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{\Gamma_3}(c_1^2c_2^2 4^{-1}C_1 + \widetilde{\sigma})|\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}S \\ &\ge c_1^4\frac{C_1}{4}\|\mathbf{u}\|_{1,2}^2 + C_1^{-1}\int_\Omega |\mathbf{u}|^2(c_1^2 4^{-1}C_1^2 + C_1\widetilde{b} - |\vec{\mathfrak{c}}|^2 - |\vec{\mathfrak{d}}|^2)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{\Gamma_3}(c_1^2c_2^2 4^{-1}C_1 + \widetilde{\sigma})|\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}S, \end{aligned} \tag{3.39}$$

kde jsme v poslední nerovnosti opět použili Větu 2.7.3. Pokud tedy zvolíme

$$\varepsilon := c_1^2 4^{-1}\min(1, c_2^2),$$

a tedy $\varepsilon > 0$ závisí pouze na Ω a Γ_1, pak pro každá data splňující (3.33) platí

$$B_{L,\mathbb{\sigma}}(\mathbf{u},\mathbf{u}) \ge c_1^4\frac{C_1}{4}\|\mathbf{u}\|_{1,2}^2 = c_1^4\frac{C_1}{4}\|\mathbf{u}\|_V^2.$$

Forma $B_{L,\sigma}$ je tedy V-eliptická a důkaz je hotov.

Věnujme se nyní případu $|\Gamma_1| = 0$. Nyní už nemůžeme použít Poincarého nerovnost pracující s hodnotami funkce na hranici, ale potřebujeme, aby alespoň jeden ze dvou posledních členů v (3.38) byl příznivý. Uvažujme nyní případ 1) z Věty 3.3.4. Díky (3.35) musí existovat $\Omega^\star \subset \Omega$ a $\alpha_3 > 0$ takové, že $|\Omega^\star| > 0$ a

$$C_1\widetilde{b}(x) - |\vec{\mathfrak{c}}(x)|^2 - |\vec{\mathfrak{d}}(x)|^2 \geq \frac{C_1^2\alpha_3}{2} \quad \text{skoro všude v } \Omega^\star.$$

Použitím této nerovnosti v (3.38) a využitím nezápornosti výrazu v (3.35) na celé Ω, tak máme

$$B_{L,\sigma}(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geq \frac{C_1}{2}\left(\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x + \alpha_3\int_{\Omega^\star}|\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x\right) + \int_{\Gamma_3}\widetilde{\sigma}|\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}S. \tag{3.40}$$

Nyní už jen aplikujeme předešlý postup, tj. použijeme Větu 2.7.3, abychom z prvního členu získaly celou normu, a Větu o stopách 2.6.10, abychom mohli odhadnout poslední člen. Celkem máme

$$\begin{aligned} B_{L,\sigma}(\mathbf{u},\mathbf{u}) &\geq \frac{c_1^2C_1}{2}\|\mathbf{u}\|_{1,2}^2 \\ + \int_{\Gamma_3}\widetilde{\sigma}|\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}S &\geq \frac{c_1^2C_1}{4}\|\mathbf{u}\|_{1,2}^2 + \int_{\Gamma_3}\left(\frac{c_2^2c_1^2C_1}{2} + \widetilde{\sigma}\right)|\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}S. \end{aligned}$$

Volbou

$$\varepsilon := \frac{c_2^2c_1^2C_1}{2}$$

tak získáme kýžený odhad, pokud $\widetilde{\sigma}$ splňuje předpoklady bodu 1). Bod 2) se dokáže obdobně a je přenechán čtenáři. ■

V této části jsme si doposud probrali základní techniku a postupy, jak odvodit, že je kýžený operátor eliptický (a tedy forma $B_{L,\sigma}$ V-eliptická). Ukázali jsme si, že v případě předepsání okrajové podmínky alespoň na části hranice nám dovolí zvládnout i nepříznivé členy, pokud nejsou příliš velké, a že v případě, kdy nepředepisujeme Dirichletovu okrajovou podmínku, alespoň jeden ze zbývajících členů musí být dostatečně dobrý. V celém důkazu jsme ale nepoužili jakoukoliv strukturu nepříznivých členů a v následujících cvičeních si ukážeme, jak zvládnout i některé případy, které ne zcela zapadají do zatím vybudované teorie.

Cvičení 3.3.6. Uvažujme $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřenou omezenou a tedy ne nutně lipschitzovskou. Pro dané $f \in L^2(\Omega)$, chceme řešit problém

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ v } \Omega, \\ u &= 0 \text{ na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Řešení. V tomto případě nemá smysl hovořit o stopě u, nicméně jako přirozený kandidát na vhodný prostor funkcí se nabízí $V := W_0^{1,2}(\Omega)$. (Připomeňme, že tento prostor je definován jako uzávěr hladkých funkcí s kompaktním nosičem.) Slabým řešením pak nazveme $u \in V$ splňující

$$B(u,\varphi) := \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u\varphi\,\mathrm{d}x =: \langle F,\varphi\rangle_V \qquad \text{pro každé } \varphi \in V.$$

Forma B je zcela jistě bilineární a V-omezená, stačí tedy ověřit elipticitu, abychom z Laxovy–Milgramovy Věty (Věta 3.3.1) získali existenci právě jednoho slabého řešení. Protože je Ω omezená, můžeme najít dostatečně velikou kouli $B_R(0) \subset \mathbb{R}^d$ takovou, že $\Omega \subset B_R(0)$. Pokud dodefinujeme u vně Ω nulou, získáme $u \in W_0^{1,2}(B_R(0))$. Tento krok ověřte pečlivě. Protože má ale koule lipschitzovskou hranici, můžeme na ní použít Větu 2.7.3 a získáme

$$B(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = \int_{B_R(0)}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x \geq c_1^2\|u\|_{W^{1,2}(B_R(0))}^2 = c_1^2\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2.$$

Forma B je tedy eliptická a důkaz existence a jednoznačnosti je tím hotov. □

Toto cvičení ukazuje, že pokud předepíšeme Dirichletovu okrajovou podmínku u_0 na celé hranici, nemusíme se nutně zabývat pouze lipschitzovskými oblastmi, ale stačí pouze předpokládat, že existuje $U_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ tak, že stopa U_0 je rovna u_0 na $\partial\Omega$. Námi hledané řešení u pak bude ve tvaru $u = U_0 + v$, kde $v \in V$, neboli $(u - U_0) \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Cvičení 3.3.7. Buď $\Omega = (-1,1)^2$. Pro danou funkci $f \in L^2(\Omega)$ a $a \in L^\infty(-1,1)$ takovou, že $\|a\|_\infty < 2$, dokažme existenci právě jednoho slabého řešení úlohy

$$\begin{aligned} Lu(x) := -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) + a(x_1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}(x) &= f(x) \text{ v } \Omega, \\ u(x) &= 0 \text{ na } \Omega. \end{aligned}$$

<u>*Řešení*</u>. Výraz na levé straně není v divergentním tvaru a tedy nemůžeme přímo použít vybudovanou teorii. Nicméně naší snahou bude přepsat zejména třetí člen do tvaru s divergencí. **Velikou chybou** by bylo ho přepsat takto

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(a\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial a}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}.$$

Formálně je to sice přesně ten popis, který potřebujeme, ale nezapomínejme, že dle předpokladů nemusí a mít derivaci (a to ani slabou) a tedy výraz na pravé straně nedává dobrý smysl. Naproti tomu, protože a nezávisí na x_2, můžeme mnohem jednodušeji postupovat takto

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(a\frac{\partial u}{\partial x_1}\right).$$

Pokud si nyní zadefinujeme matici $\mathbb{A}(x)$

$$\mathbb{A}(x) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a(x_1) & 2 \end{pmatrix},$$

máme

$$-\operatorname{div}\big(\mathbb{A}(x)\nabla u(x)\big) = -\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left((\mathbb{A}(x))_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = Lu(x).$$

Nyní již máme operátor L přepsán na potřebný tvar a je už jen třeba ověřit elipticitu matice $\mathbb{A}$, tj. podmínku (3.4). Jednoduchým výpočtem zjistíme, že pro každé $\vec{z} \in \mathbb{R}^2$ platí

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{2}\big(\mathbb{A}(x)\big)_{ij} z_i z_j &= z_1^2 + 2z_2^2 - a(x_1)z_1 z_2 \geq z_1^2 - z_1^2(1-\varepsilon) - \frac{z_2^2(a(x_1))^2}{4(1-\varepsilon)} + z_2^2 \\ &\geq \varepsilon z_1^2 + \left(1 - \frac{(a(x_1))^2}{4(1-\varepsilon)}\right) z_2^2,\end{aligned}$$

kde jsme použili Youngovu nerovnost. Vidíme tedy, že pokud $\|a\|_\infty < 2$, volbou $\varepsilon := (2 - \|a\|_\infty)/2 > 0$ zajistíme

$$\left(1 - \frac{(a(x_1))^2}{4(1-\varepsilon)}\right) \geq \varepsilon \quad \text{skoro všude v } \Omega$$

a tedy

$$\sum_{i,j=1}^{d}\big(\mathbb{A}(x)\big)_{ij} z_i z_j \geq \varepsilon |\vec{z}|^2.$$

Operátor L je tedy eliptický a můžeme použít teorii vybudovanou výše k dokázání existence a jednoznačnosti slabého řešení. □

Následující cvičení se zabývá rovnicí (3.14). Již víme, že pokud $|\vec{c}| \ll 1$ (malost nyní závisí na konstantě elipticity C_1 matice $\mathbb{A}$), pak existuje právě jedno slabé řešení. Nyní si ukážeme, jak lze tento postup zobecnit, pro speciálnější $\vec{c}$, které se často používají v praxi.

Cvičení 3.3.8. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ lipschitzovská, $f \in L^2(\Omega)$, $p \in (2,\infty]$ a $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_d)$ takový, že $c_i \in L^p(\Omega)$. Nechť navíc $\operatorname{div}\vec{c} \leq 0$ v Ω ve smyslu distribucí, tj. pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ platí

$$\int_\Omega \vec{c}\cdot\nabla\varphi \,\mathrm{d}x := \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} c_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x \geq 0. \tag{3.41}$$

Pro co možná největší interval pro p dokažte existenci a jednoznačnost slabého řešení úlohy (3.14) s homogenní Dirichletovou okrajovou podmínkou i pokud je $\|\vec{c}\|_p \gg 1$.

<u>*Řešení*</u>. Nejdříve musíme úlohu dobře zformulovat. Volba prostoru je nyní zřejmá, $V := W_0^{1,2}(\Omega)$, a $u \in V$ nazveme slabým řešením pokud pro každé $\varphi \in V$ splňuje

$$\int_\Omega \Big(\mathbb{A}\nabla u \cdot \nabla\varphi + \vec{c}\cdot\nabla u\varphi\Big)\,\mathrm{d}x =: B(u,\varphi) = \langle F, \varphi\rangle_V := \int_\Omega f\varphi\,\mathrm{d}x.$$

V této situaci jsou námi zatím dokázané věty k nepoužití, díky možné neomezenosti $\vec{c}$. Proto se pokusíme přímo aplikovat Laxovu–Milgramovu Větu (Věta 3.3.1) na tento problém. Zřejmě $F \in V^*$ a B je bilineární. Zbývá tedy ověřit, že je V–omezená a V–eliptická. Začněme s omezeností. Díky Hölderově nerovnosti získáme odhad

$$\begin{aligned}|B(u,\varphi)| &\leq \int_\Omega \Big(|\mathbb{A}||\nabla u||\nabla\varphi| + |\vec{c}||\nabla u||\varphi|\Big)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \|\mathbb{A}\|_\infty \|\nabla u\|_2 \|\nabla\varphi\|_2 + \|\vec{c}\|_p \|\nabla u\|_2 \|\varphi\|_{\frac{2p}{p-2}} \\ &\leq C(\mathbb{A},\vec{c})\|u\|_V(\|\varphi\|_V + \|\varphi\|_{\frac{2p}{p-2}}).\end{aligned}$$

V posledním členu vystupuje jistá norma a abychom ji mohli odhadnout normou ve V, potřebujeme nutně vnoření $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2p}{p-2}}(\Omega)$. Použitím Věty 2.5.1 tak získáme nutný předpoklad

$$W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2p}{p-2}}(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} p > 2 & \text{pro } d = 2, \\ p \geq d & \text{pro } d > 2. \end{cases}$$

V dalším tedy uvažujeme pouze tato p a dostáváme tak, že forma B je V–omezená.

Nyní se zaměříme na V–elipticitu. Dosazením a použitím předpokladů na $\mathbb{A}$ (viz (3.4)) a použitím Poincarého nerovnosti (viz Větu 2.7.3) získáme odhad

$$\begin{aligned} B(u,u) &= \int_\Omega \Big(\mathbb{A}\nabla u \cdot \nabla u + \vec{c} \cdot \nabla u u\Big)\,\mathrm{d}x \geq C_1 \|\nabla u\|_2^2 + \int_\Omega \vec{c} \cdot \nabla u u\,\mathrm{d}x \\ &\geq c_1^2 C_1 \|u\|_V^2 + \int_\Omega \vec{c} \cdot \nabla u u\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Věnujme se nyní zbývajícímu integrálu. Z definice prostoru $W_0^{1,2}(\Omega)$ můžeme najít $\{u^n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ takovou, že $u^n \to u$ v $W_0^{1,2}(\Omega)$. Navíc ze spojitého vnoření a díky volbě p také máme, že $u^n \to u$ v $L^{\frac{2p}{p-2}}(\Omega)$. Poslední integrál tedy můžeme také zapsat takto

$$\begin{aligned} \int_\Omega \vec{c} \cdot \nabla u u\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \vec{c} \cdot \nabla u^n u^n\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \sum_{i=1}^d c_i \frac{\partial u^n}{\partial x_i} u^n\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \sum_{i=1}^d c_i \frac{\partial |u^n|^2}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x \overset{(3.41)}{\geq} 0. \end{aligned}$$

V poslední nerovnosti jsme použili (3.41) s $\varphi := (u^n)^2$, která je zřejmě nezáporná a díky vlastnostem u^n i hladká s kompaktním nosičem. Forma B je tedy V–eliptická a existence a jednoznačnost slabého řešení pro $p \geq d$ (popř. $p > 2$ pokud $d = 2$) plyne z Laxovy–Milgramovy Věty 3.3.1. □

3.4 Existence slabého řešení pomocí Fredholmovy alternativy

V předešlé sekci jsme se soustředili na dokázání existence slabého řešení pro jakákoliv data a ukázali jsme, že je to možné, pokud je operátor koercivní, neboli pokud jsme schopni získat apriorní odhad. To bylo typicky možné v případech, kdy b popř. σ bylo dostatečně dobré (kladné). V této sekci se spíše soustředíme na charakterizaci dat, pro která má daný operátor řešení, které je popř. jednoznačné. Pro jendnoduchost[1] se nebudeme zabývat nehomogennní Dirichletovou okrajovou podmínkou a v případě, že na některé části hranice budeme předepisovat $\mathbf{u}_0$, pak vždy budeme volit $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$. Připomeňme nejdříve operátor L

$$\begin{aligned} (L\mathbf{u})^\alpha := &-\sum_{\beta=1}^N \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial x_j}\right) + \sum_{\beta=1}^N \sum_{i=1}^d c_i^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial x_i} \\ &+ \sum_{\beta=1}^N \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}(d_i^{\alpha\beta} u^\beta) + \sum_{\beta=1}^N b^{\alpha\beta} u^\beta, \end{aligned} \tag{3.42}$$

popř. jeho zkrácený zápis

$$L\mathbf{u} = -\mathrm{div}\left(\vec{\mathbb{A}}\nabla \mathbf{u}\right) + \vec{\mathfrak{c}} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathrm{div}\,(\vec{\mathfrak{d}}\mathbf{u}) + \mathfrak{b}\mathbf{u},$$

který bude eliptický, tj. koeficienty splňují Definici 3.1.2. Připomeňme také, že nám jde o řešitelnost následující úlohy

$$\begin{aligned} L\mathbf{u} &= \mathbf{f} \ \text{ v } \ \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \ \text{ na } \ \Gamma_1, \\ (\vec{\mathbb{A}}\nabla \mathbf{u} - \vec{\mathfrak{d}}\mathbf{u}) \cdot \vec{\nu} &= \mathbf{g} \ \text{ na } \ \Gamma_2, \\ (\vec{\mathbb{A}}\nabla \mathbf{u} - \vec{\mathfrak{d}}\mathbf{u}) \cdot \vec{\nu} + \sigma u &= \mathbf{g} \ \text{ na } \ \Gamma_3. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Nyní přistoupíme k definici adjungovaného operátoru L^*.

Definice 3.4.1 — Adjungovaný operátor. Buď L eliptický operátor definovaný pomocí (3.42). Operátor L^*

[1]Celá teorie lze vybudovat i pro obecné Dirichletovy okrajové podmínky, které nicméně musí být v jistém smyslu hladší.

definovaný jako

$$
\begin{aligned}
(L^*\boldsymbol{\varphi})^\alpha := &-\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ji}^{\beta\alpha}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x_j}\right)-\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i}(c_i^{\beta\alpha}\varphi^\beta)\\
&-\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{i=1}^{d}d_i^{\beta\alpha}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x_i}+\sum_{\beta=1}^{N}b^{\beta\alpha}\varphi^\beta
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

nazveme operátorem adjungovaným k L.

Tento operátor budeme také zkráceně zapisovat jako

$$
L^*\boldsymbol{\varphi} = -\mathrm{div}\left(\vec{\mathbb{A}}^*\nabla\boldsymbol{\varphi}\right) - \mathrm{div}\,(\vec{\mathfrak{c}}^*\boldsymbol{\varphi}) - \vec{\mathfrak{d}}^*\cdot\nabla\boldsymbol{\varphi} + \mathfrak{b}^*\boldsymbol{\varphi},
$$

kde jsme označili

$$
(\vec{\mathbb{A}}^*)_{ij}^{\alpha\beta} := (\vec{\mathbb{A}})_{ji}^{\beta\alpha},\quad (\vec{\mathfrak{c}}^*)_i^{\alpha\beta} := (\vec{\mathfrak{c}})_i^{\beta\alpha},\quad (\vec{\mathfrak{d}}^*)_i^{\alpha\beta} := (\vec{\mathfrak{d}})_i^{\beta\alpha},\quad (\mathfrak{b}^*)^{\alpha\beta} := \mathfrak{b}^{\beta\alpha}.
$$

Poznamenejme ještě, že ve skalárním případě, tj. pokud $N = 1$, máme $\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^T$ a $b^* = b$, $\vec{c}^* = \vec{c}$, $\vec{d}^* = \vec{d}$. Nyní zadefinujeme adjungovanou úlohu.

Definice 3.4.2 — Adjungovaná úloha. Řekneme, že následující problém

$$
\begin{aligned}
L^*\boldsymbol{\varphi} &= \mathbf{f} \ \text{ v } \ \Omega,\\
\boldsymbol{\varphi} &= \mathbf{0} \ \text{ na } \ \Gamma_1,\\
(\vec{\mathbb{A}}^*\nabla\boldsymbol{\varphi}+\vec{\mathfrak{c}}^*\mathbf{u})\cdot\vec{\nu} &= \mathbf{g} \ \text{ na } \ \Gamma_2,\\
(\vec{\mathbb{A}}^*\nabla\boldsymbol{\varphi}\vec{\mathfrak{c}}^*\mathbf{u})\cdot\vec{\nu}+\sigma^*\boldsymbol{\varphi} &= \mathbf{g} \ \text{ na } \ \Gamma_3
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

je adjungovaný k (3.43). V (3.45) jsme označili $(\sigma^*)^{\alpha\beta} := (\sigma)^{\beta\alpha}$.

Protože se v celé této sekci soustředíme zejména na otázku, pro jaká data existuje slabé řešení (na rozdíl od předešlé sekce, kde jsme chtěli mít existenci a jednoznačnost), zavedeme následující značení.

Definice 3.4.3 Řekneme, že $(\mathbf{f},\mathbf{g}) \in \mathbb{L}^2$, právě tehdy, když $\mathbf{f} = (f^1,\dots,f^N)$ a $\mathbf{g} = (g^1,\dots,g^N)$ a pro každé $\alpha \in \{1,\dots,N\}$ platí $f^\alpha \in L^2(\Omega)$ a $g^\alpha \in L^2(\Gamma_2\cup\Gamma_3)$. Prostor $\mathbb{L}^2$ je navíc Hilbertův opatřený skálárním součinem

$$
\big((\mathbf{f},\mathbf{g}),(\bar{\mathbf{f}},\bar{\mathbf{g}})\big)_{\mathbb{L}^2} := \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\bar{\mathbf{f}}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}\mathbf{g}\cdot\bar{\mathbf{g}}\,\mathrm{d}S.
$$

Nyní již můžeme osvětlit, proč hovoříme o adjungovaném operátoru a adjungované úloze. Zadefinujeme-li následující bilineární formy

$$
\begin{aligned}
B_{L,\sigma}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi}) := &\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{d}\left(a_{ij}^{\alpha\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{d}c_i^{\alpha\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial x_i}\varphi^\alpha\right)\mathrm{d}x\\
&-\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\int_\Omega\sum_{i=1}^{d}d_i^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x_i}u^\beta\Big)\,\mathrm{d}x\\
&+\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\int_\Omega b^{\alpha\beta}u^\beta\varphi^\alpha\,\mathrm{d}x+\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\int_{\Gamma_3}\sigma^{\alpha\beta}u^\beta\varphi^\alpha\,\mathrm{d}S,\\
B_{L^*,\sigma^*}(\boldsymbol{\varphi},\mathbf{u}) := &\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{d}(a^*)_{ij}^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x_j}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{d}(c^*)_i^{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x_i}\varphi^\beta\right)\mathrm{d}x\\
&-\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\int_\Omega\sum_{i=1}^{d}(d^*)_i^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x_i}u^\alpha\,\mathrm{d}x\\
&+\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\int_\Omega(b^*)^{\alpha\beta}\varphi^\beta u^\alpha\,\mathrm{d}x+\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\int_{\Gamma_3}(\sigma^*)^{\alpha\beta}\varphi^\beta u^\alpha\,\mathrm{d}S,
\end{aligned}
$$

vidíme, že $\mathbf{u}\in V$ je slabé řešení úlohy (3.43), právě tehdy, když pro každé $\boldsymbol{\varphi}\in V$ platí (viz Definici 3.2.1)

$$
B_{L,\sigma}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi}) = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}\mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}S.
\tag{3.46}
$$

Podobně (opět z Definice 3.2.1) $\boldsymbol{\varphi} \in V$ je slabé řešení (3.45) právě tehdy, když pro každé $\mathbf{u} \in V$ platí

$$B_{L^*,\sigma^*}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \,\mathrm{d}S. \tag{3.47}$$

Navíc z definice $\vec{\mathbb{A}}^*$, $\vec{\mathfrak{c}}^*$, $\vec{\mathfrak{d}}^*$, $\mathfrak{b}^*$ a σ^* dostáváme, že pro každé $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \in V$

$$B_{L,\sigma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) = B_{L^*,\sigma^*}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}). \tag{3.48}$$

Vztah (3.48) můžeme také zapsat jako

$$\langle L\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_V = \langle L^* \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u} \rangle_V,$$

proto tedy hovoříme o adjungovaném operátoru a o adjungované úloze. Ve vztahu výše však musíme mít na paměti, že je vztažen také k určité Newtonově okrajové podmínce reprezentované σ, respektive σ^*.

V dalším budeme studovat vlastnosti úloh (3.43) a (3.45). Nejdříve uvedeme důsledek Vět 3.3.3–3.3.4.

Věta 3.4.4 — Zobecněná existenční věta I. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ lipschitzovská, $\{\Gamma_i\}_{i=1}^3$ přísušné části hranice a L eliptický operátor. Pak existuje $\gamma_0 \geq 0$ takové, že pro všechna $\gamma \geq \gamma_0$ a libovolné $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathbb{L}^2$ existuje právě jedno slabé řešení úlohy

$$\begin{aligned} L_\gamma \mathbf{u} := L\mathbf{u} + \gamma \mathbf{u} = \mathbf{f} &\quad \text{v} \quad \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} &\quad \text{na} \quad \Gamma_1, \\ (\vec{\mathbb{A}} \nabla \mathbf{u} - \vec{\mathfrak{d}}\mathbf{u}) \cdot \vec{\nu} + \gamma \mathbf{u} = \mathbf{g} &\quad \text{na} \quad \Gamma_2, \\ (\vec{\mathbb{A}} \nabla \mathbf{u} - \vec{\mathfrak{d}}\mathbf{u}) \cdot \vec{\nu} + \sigma \mathbf{u} + \gamma \mathbf{u} = \mathbf{g} &\quad \text{na} \quad \Gamma_3. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Navíc existuje konstanta C závislá pouze na L, σ a Ω tak, že pro každé $\gamma \geq \gamma_0$ řešení $\mathbf{u}$ splňuje

$$\|\mathbf{u}\|_V \leq C \|(\mathbf{f}, \mathbf{g})\|_{\mathbb{L}^2}. \tag{3.50}$$

Důkaz. V případě, že $|\Gamma_1| > 0$, použijeme Větu 3.3.3. Postačující podmínka (3.33) má v tomto případě tvar

$$\begin{aligned} C_1\big(\gamma + \widetilde{b}(x)\big) - |\vec{\mathfrak{c}}(x)|^2 - |\vec{\mathfrak{d}}(x)|^2 \geq -\varepsilon C_1^2 &\quad \text{skoro všude v } \Omega, \\ \gamma + \widetilde{\sigma}(x) \geq -\varepsilon C_1 &\quad \text{skoro všude na } \Gamma_3, \\ \gamma \geq -\varepsilon C_1 &\quad \text{skoro všude na } \Gamma_2. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Pokud tedy zvolíme $\gamma_0 := C_1^{-1}(\|\vec{\mathfrak{c}}\|_\infty^2 + \|\vec{\mathfrak{d}}\|_\infty^2 + \|\mathfrak{b}\|_\infty + \|\sigma\|_\infty)$, pak pro každé $\gamma \geq \gamma_0$ je (3.51) splněna, tedy tvrzení Věty 3.3.3 dokončuje důkaz. V případě $|\Gamma_1| = 0$ použijeme obdobným způsobem Větu 3.3.4. ■

Bez důkazu uvedeme ještě větu pro adjungovanou úlohu, jejíž důkaz je nicméně identický důkazu předešlé věty.

Věta 3.4.5 — Zobecněná existenční věta II. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ lipschitzovská, $\{\Gamma_i\}_{i=1}^3$ příslušné části hranice a L eliptický operátor. Pak existuje $\gamma_0 \geq 0$ taková, že pro všechna $\gamma \geq \gamma_0$ a libovolné $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathbb{L}^2$ existuje právě jedno slabé řešení úlohy

$$\begin{aligned} L_\gamma^* \boldsymbol{\varphi} := L^* \boldsymbol{\varphi} + \gamma \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f} &\quad \text{v} \quad \Omega, \\ \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} &\quad \text{na} \quad \Gamma_1, \\ (\vec{\mathbb{A}}^* \nabla \boldsymbol{\varphi} + \vec{\mathfrak{c}}^* \boldsymbol{\varphi}) \cdot \vec{\nu} + \gamma \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{g} &\quad \text{na} \quad \Gamma_2, \\ (\vec{\mathbb{A}}^* \nabla \boldsymbol{\varphi} + \vec{\mathfrak{c}}^* \boldsymbol{\varphi}) \cdot \vec{\nu} + \sigma^* \boldsymbol{\varphi} + \gamma \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{g} &\quad \text{na} \quad \Gamma_3. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Navíc existuje konstanta C závislá pouze na L, σ a Ω tak, že pro každé $\gamma \geq \gamma_0$ řešení $\boldsymbol{\varphi}$ splňuje

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_V \leq C \|(\mathbf{f}, \mathbf{g})\|_{\mathbb{L}^2}. \tag{3.53}$$

Další výsledky budou založeny na Fredholmově alternativě a jejích důsledků (viz Větu B.3.7). Pro přehlednost ji nicméně připomeneme i zde.

Věta 3.4.6 — Fredholmova alternativa. Nechť H je Hilbertův prostor a $K \colon H \to H$ je kompatní lineární operátor. Pak platí

(i) $N(I - K)$ je konečnědimenzionální.

(ii) $R(I - K)$ je uzavřený.

(iii) $R(I - K) = N(I - K^*)^\perp$.

(iv) $N(I - K) = \{0\} \Leftrightarrow R(I - K) = H$.

(v) $\dim N(I - K) = \dim N(I - K^*)$.

(vi) Spektrum K je nejvýše spočetné a obsahuje 0. Pokud je spektrum nekonečné, pak 0 je jediný hromadný bod.

Připomeňme značení použité výše: N značí jádro operátoru, R značí obor hodnot a K^* je adjungovaný operátor, tj. operátor splňující pro všechna $u, v \in H$ $(Ku, v)_H = (u, K^*v)_H$. Konečně, Fredholmovou alternativou se často nazývá pouze vlastnost (iv) z Věty 3.4.6, která říká, že buď má pro každé $f \in H$ úloha $u - Ku = f$ (jednoznačné) řešení, nebo existuje netriviální řešení úlohy $u - Ku = 0$.

Nyní již vyslovíme nejdůležitější větu této sekce.

Věta 3.4.7 — Fredholmova alternativa pro eliptické operátory. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ lipschitzovská, $\{\Gamma_1\}_{i=1}^3$ příslušné části hranice a L eliptický operátor.

1) Buď má pro každé $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathbb{L}^2$ úloha (3.43) právě jedno slabé řešení, nebo pro $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) := (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ existuje netriviální řešení úlohy (3.43).

2) Označme

$$N_L := \{\mathbf{u} \in V;\ \mathbf{u} \text{ je slabé řešení (3.43) pro } (\mathbf{f}, \mathbf{g}) := (\mathbf{0}, \mathbf{0})\},$$
$$N_{L^*} := \{\boldsymbol{\varphi} \in V;\ \varphi \text{ je slabé řešení (3.45) pro } (\mathbf{f}, \mathbf{g}) := (\mathbf{0}, \mathbf{0})\}.$$

Potom N_L a N_{L^*} jsou uzavřené podprostory V a platí $\dim N_L = \dim N_{L^*} < \infty$.

3) Pro dané $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathbb{L}^2$ má úloha (3.43) slabé řešení právě tehdy, když pro každé $\boldsymbol{\varphi} \in N_{L^*}$ platí

$$0 = \big((\mathbf{f}, \mathbf{g}), (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3})\big)_{\mathbb{L}^2} := \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}S.$$

Důkaz. Pro libovolné $\gamma > 0$ definujme bilineární formy

$$\begin{aligned} B^\gamma_{L,\sigma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) &:= B_{L,\sigma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) + \gamma \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x + \gamma \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}S, \\ B^\gamma_{L^*,\sigma^*}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}) &:= B_{L^*,\sigma^*}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}) + \gamma \int_\Omega \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{u} \, \mathrm{d}x + \gamma \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{u} \, \mathrm{d}S. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Tyto bilineární formy nyní odpovídají úlohám (3.49) a (3.52). Tj. pro $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathbb{L}^2$ nazveme $\mathbf{u} \in V$ slabým řešením (3.49) právě tehdy, když pro každé $\boldsymbol{\varphi} \in V$ platí

$$B^\gamma_{L,\sigma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}S = \big((\mathbf{f}, \mathbf{g}), (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3})\big)_{\mathbb{L}^2}. \tag{3.55}$$

Podobně platí, že pro $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathbb{L}^2$ je $\varphi \in V$ slabým řešením (3.52) právě tehdy, když pro každé $\mathbf{u} \in V$ platí

$$B^\gamma_{L^*,\sigma^*}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \, \mathrm{d}S = \big((\mathbf{f}, \mathbf{g}), (\mathbf{u}, \mathbf{u}|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3})\big)_{\mathbb{L}^2}. \tag{3.56}$$

Připomeňme zde, že díky operátoru stop a lipschitzovskosti Ω má smysl hovořit o hodnotách funkcí z V na hranice a v tomto smyslu také chápeme $\mathbf{u}|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3}$ a $\boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3}$.

Nyní díky Větám 3.4.4–3.4.5 můžeme zvolit od nynějška pevné $\gamma > 0$ takové, že úlohy (3.49) a (3.52) mají pro každé $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathbb{L}^2$ právě jedno řešení. Definujme operátor $L_\gamma^{-1} : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}^2$ předpisem

$$L_\gamma^{-1} : (\mathbf{f}, \mathbf{g}) \mapsto (\mathbf{u}, \mathbf{u}|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3}),$$

tzn. $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ přiřadíme jednoznačné slabé řešení (3.49), tedy $\mathbf{u}$ splňující (3.55). Obdobným způsobem zadefinujeme operátor $(L_\gamma^*)^{-1}$ jako

$$(L_\gamma^*)^{-1} : (\mathbf{f}, \mathbf{g}) \mapsto (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3}),$$

kde $\boldsymbol{\varphi} \in V$ je jednoznačné slabé řešení (3.52), tedy splňující (3.56). Oba operátory jsou zřejmě lieární a díky odhadům (3.50) a (3.53) také omezené (používáme zde Větu o stopách, tedy Větu 2.6.10). Navíc, díky kompaktnímu vnoření $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$ (Věta 2.5.20) a díky kompaktnosti operátoru stop (Věta 2.6.12) jsou oba operátory, tj. L_γ^{-1} i $(L_\gamma^*)^{-1}$, lineární spojité kompaktní operátory z $\mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}^2$.

Definujme operátor $K : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}^2$ předpisem $K := \gamma L_\gamma^{-1}$. Zcela zřejmě je i tento operátor lineární spojitý kompaktní operátor.

Nyní pouze ekvivalentně zapíšeme řešitelnost úlohy (3.43) v termínech operátoru K. Využitím slabé formulace (3.46), slabé formulace pro operátor L_γ, tj. identity (3.55), definice operátoru L_γ^{-1} a definice a linearity operátoru K

postupně získáme

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u} \in V \text{ řeší } (3.43)\\
&\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B_{L,\sigma}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi}) = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3} \mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}S \quad \forall \boldsymbol{\varphi}\in V,\\
&\Leftrightarrow B^\gamma_{L,\sigma}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi}) = \int_\Omega (\gamma\mathbf{u}+\mathbf{f})\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3} (\gamma\mathbf{u}+\mathbf{g})\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}S \quad \forall \varphi\in V,\\
&\Leftrightarrow (\mathbf{u},\mathbf{u}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}) = L_\gamma^{-1}\big((\gamma\mathbf{u}+\mathbf{f}),(\gamma\mathbf{u}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}+\mathbf{g})\big)\\
&\Leftrightarrow (\mathbf{u},\mathbf{u}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}) - K(\mathbf{u},\mathbf{u}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}) = \mathbf{h}, \quad \text{kde } \mathbf{h} := \frac{1}{\gamma}K(\mathbf{f},\mathbf{g}).
\end{aligned}
\tag{3.57}
$$

Věnujme se nyní důkazu 1) z tvrzení věty. Protože je K kompaktní, můžeme použít Fredholmovu alternativu (Věta 3.4.6), kde bod (iv) říká, že buď existuje netriviální řešení $(\mathbf{a},\mathbf{b})\in\mathbb{L}^2$ problému

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) - K(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{0},\mathbf{0}), \tag{3.58}$$

nebo pro každé $(\mathbf{a},\mathbf{b})\in\mathbb{L}^2$ existuje právě jedno řešení $(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}})\in\mathbb{L}^2$ problému

$$(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}) - K(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}) = (\mathbf{a},\mathbf{b}). \tag{3.59}$$

Nejdříve ukažme, že $K(\mathbf{f},\mathbf{g}) = (\mathbf{0},\mathbf{0})$ právě tehdy, když $(\mathbf{f},\mathbf{g}) = (\mathbf{0},\mathbf{0})$. Jedna implikace je díky linearitě K zřejmá. Ukažme si tedy, že pokud $K(\mathbf{f},\mathbf{g}) = (\mathbf{0},\mathbf{0})$, pak $(\mathbf{f},\mathbf{g}) = (\mathbf{0},\mathbf{0})$. Z definice operátoru K pak plyne, že $\mathbf{u}\equiv\mathbf{0}$ je řešení (3.43), což znamená, že pro $\boldsymbol{\varphi}\in V$

$$\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3} \mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}S = 0.$$

Protože $[\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)]^N \subset V$, ihned vidíme, že $\mathbf{f}\equiv\mathbf{0}$. Obdobně obdržíme i $\mathbf{g}=\mathbf{0}$. Dále ukážeme, že (3.58) je ekvivalentí existenci netriviálního řešení (3.43). Z definice K plyne, že libovolné netriviální řešení $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ (3.58) může být zapsáno jako $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{u},\mathbf{u}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3})$, kde $\mathbf{u}\in V$ a tedy netriviální řešení (3.58) existuje právě tehdy, když existuje netriviální $\mathbf{u}\in V$ splňující

$$(\mathbf{u},\mathbf{u}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}) - K(\mathbf{u},\mathbf{u}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}) = (\mathbf{0},\mathbf{0}) = K(\mathbf{0},\mathbf{0}). \tag{3.60}$$

Porovnáním s (3.57), vidíme, že tato vlastnost je ekvivalentní existenci netriviálního řešení (3.43).

Konečně tedy máme, že pokud neexistuje netriviální řešení (3.43), pak neexistuje netriviální řešení (3.58) a tedy pro každé $(\mathbf{a},\mathbf{b})\in\mathbb{L}^2$ existuje právě jedno řešení problému (3.59) a tedy speciálně pro každé $(\mathbf{f},\mathbf{g})\in\mathbb{L}^2$ existuje jednoznačné řešení $(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}})\in\mathbb{L}^2$ problému (použijeme zde fakt, že $K(\mathbf{f},\mathbf{g})\in\mathbb{L}^2$)

$$(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}) - K(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}) = \frac{1}{\gamma}K(\mathbf{f},\mathbf{g}). \tag{3.61}$$

Vzhledem k definici operátoru K, existují $\mathbf{u}^1,\mathbf{u}^2\in V$ takové, že

$$(\mathbf{u}^1,\mathbf{u}^1|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}) = K(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}), \qquad (\mathbf{u}^2,\mathbf{u}^2|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}) = \frac{1}{\gamma}K(\mathbf{f},\mathbf{g}),$$

a tedy

$$(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}) = K(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}) + \frac{1}{\gamma}K(\mathbf{f},\mathbf{g}) = (\mathbf{u}^1,\mathbf{u}^1|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}) + (\mathbf{u}^2,\mathbf{u}^2|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}) = (\mathbf{u},\mathbf{u}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}),$$

kde $\mathbf{u} := \mathbf{u}^1+\mathbf{u}^2\in V$. Proto z (3.61) dostáváme, že pro každé $(\mathbf{f},\mathbf{g})$ existuje jediné $\mathbf{u}\in V$ takové, že

$$(\mathbf{u},\mathbf{u}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}) - K(\mathbf{u},\mathbf{u}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}) = \frac{1}{\gamma}K(\mathbf{f},\mathbf{g}).$$

Nyní již můžeme použít (3.57) a získáme, že pro každé $(\mathbf{f},\mathbf{g})$ existuje slabé řešení úlohy (3.43).

Nechť nyní existuje netriviální řešení $\widetilde{\mathbf{u}}\in V$ pro úlohu (3.43) s $(\mathbf{f},\mathbf{g})\equiv(\mathbf{0},\mathbf{0})$. Potom pokud libovolné $\mathbf{u}\in V$ řeší (3.43), pak díky linearitě i $(\mathbf{u}+\widetilde{\mathbf{u}}$ řeší ten samý problém a tedy získáváme nejednoznačné řešení.

Dokažme tvrzení 2). V předešlé části jsme si ukázali $N(I-K) = \{(\mathbf{u},\mathbf{u}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}) : \mathbf{u}\in N_L\}$. Konečná dimenze N_L tedy plyne z bodu (i) Fredholmovy alternativy aplikované na operátor K. Protože nyní již potřebujeme hovořit o adjungovaném operátoru, definujme nyní operátor (který **nemusí** být ještě nutně ajungovaný ke K) $K^* := \gamma(L_\gamma^*)^{-1}$. Opakováním kroku jedna můžeme ukázat, že $N(I-K^*) = \{(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}) : \boldsymbol{\varphi}\in N_{L^*}\}$. Abychom dokončili celý důkaz, musíme nyní ukázat, že K^* je opravdu adjungovaný operátor k K, tj. musíme ukázat, že

$$\big(K(\mathbf{v},\widetilde{\mathbf{v}}),(\boldsymbol{\psi},\widetilde{\boldsymbol{\psi}})\big)_{\mathbb{L}^2} = \big((\mathbf{v},\widetilde{\mathbf{v}}),K^*(\boldsymbol{\psi},\widetilde{\boldsymbol{\psi}})\big)_{\mathbb{L}^2} \quad \text{pro každé } (\mathbf{v},\widetilde{\mathbf{v}}),(\boldsymbol{\psi},\widetilde{\boldsymbol{\psi}})\in\mathbb{L}^2. \tag{3.62}$$

Z definice obou operátorů a díky linearitě je (3.62) ekvivalentní

$$\big(L_\gamma^{-1}(\mathbf{v},\widetilde{\mathbf{v}}),(\boldsymbol{\psi},\widetilde{\boldsymbol{\psi}})\big)_{\mathbb{L}^2} = \big((\mathbf{v},\widetilde{\mathbf{v}}),(L_\gamma^*)^{-1}(\boldsymbol{\psi},\widetilde{\boldsymbol{\psi}})\big)_{\mathbb{L}^2} \quad \text{pro každé } (\mathbf{v},\widetilde{\mathbf{v}}),(\boldsymbol{\psi},\widetilde{\boldsymbol{\psi}})\in\mathbb{L}^2. \tag{3.63}$$

Z definice operátorů a díky Větám 3.4.4 a 3.4.5 nyní můžeme najít $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \in V$ splňující $(\mathbf{u}, \mathbf{u}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}) = L_\gamma^{-1}(\mathbf{v}, \widetilde{\mathbf{v}})$ a podobně $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}) = (L_\gamma^*)^{-1}(\boldsymbol{\psi}, \widetilde{\boldsymbol{\psi}})$. Tedy $\mathbf{u}$ a $\boldsymbol{\varphi}$ jsou jednoznačná řešení

$$B^\gamma_{L,\sigma}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3} \widetilde{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{w}\,\mathrm{d}S \qquad \text{pro každé } \mathbf{u}\in V, \tag{3.64}$$

$$B^\gamma_{L^*,\sigma^*}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{z}) = \int_\Omega \boldsymbol{\psi}\cdot\mathbf{z}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3} \widetilde{\boldsymbol{\psi}}\cdot\mathbf{z}\,\mathrm{d}S \qquad \text{pro každé } \mathbf{z}\in V. \tag{3.65}$$

Identita (3.63) se dá tedy přepsat do tvaru

$$\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\psi}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3} \mathbf{u}\cdot\widetilde{\boldsymbol{\psi}}\,\mathrm{d}S = \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3} \widetilde{\mathbf{v}}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}S. \tag{3.66}$$

Volbou $\mathbf{w} := \boldsymbol{\varphi} \in V$ v rovnici (3.64) a $\mathbf{z} := \mathbf{u} \in V$ v (3.65) zjistíme, že rovnost (3.66) je stejná jako

$$B^\gamma_{L^*,\sigma^*}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}) = B^\gamma_{L,\sigma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}).$$

S využitím definice (3.54) není těžké nahlédnout, že tato rovnost je ekvivalentní

$$B_{L^*,\sigma^*}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}) = B_{L,\sigma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}).$$

Tato rovnost ale platí vždy díky adjungovanosti úloh, viz (3.48). Tedy operátor K^* je skutečně adjungovaný k operátoru K a důkaz 2) je hotov.

Dokažme tvrzení 3). Díky (3.57) víme, že řešení $\mathbf{u} \in V$ úlohy (3.43) existuje právě tehdy, když $\mathbf{u} \in V$ splňuje

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}) - K(\mathbf{u}, \mathbf{u}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}) = \frac{1}{\gamma}K(\mathbf{f}, \mathbf{g}). \tag{3.67}$$

Stejně jako v (3.57) můžeme ukázat, že $\boldsymbol{\varphi} \in V$ řeší (3.45) s $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) := (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ (a tedy $\boldsymbol{\varphi} \in N_{L^*}$) je ekvivalentní tomu, že

$$(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}) - K^*(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}) = \frac{1}{\gamma}K^*(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}). \tag{3.68}$$

Dle bodu (iii) Fredholmovy alternativy (Věta 3.4.6) řešení (3.67) existuje právě tehdy, když pro každé $\boldsymbol{\varphi} \in N_{L^*}$ platí

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{1}{\gamma}K(\mathbf{f}, \mathbf{g}), (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3})\right)_{\mathbb{L}^2} = (K(\mathbf{f}, \mathbf{g}), (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}))_{\mathbb{L}^2} \\
&= ((\mathbf{f}, \mathbf{g}), K^*(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}))_{\mathbb{L}^2} = ((\mathbf{f}, \mathbf{g}), (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}))_{\mathbb{L}^2} \\
&= \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3} \mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}S,
\end{aligned} \tag{3.69}$$

kde jsme postupně použily adjungovanost K a K^* a identitu (3.68). Tím je důkaz bodu 3) hotov. ∎

Fredholmova alternativa nám ekvivalentním způsobem charakterizuje řešitelnost úlohy (3.43). Nyní ukážeme, že díky Fredholmově alternativě můžeme ještě přesněji specifikovat řešitelnost eliptických úloh. Ukážeme, že je to úzce spojeno s problémem spektra operátoru. Budeme nyní uvažovat následující zobecnění úlohy (3.43)

$$\begin{aligned}
L\mathbf{u} &= \lambda\mathbf{u} + \mathbf{f} && \text{v } \Omega, \\
\mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{na } \Gamma_1, \\
(\vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u} - \vec{\mathfrak{d}}\mathbf{u})\vec{\nu} &= \lambda\mathbf{u} + \mathbf{g} && \text{na } \Gamma_2, \\
(\vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u} - \vec{\mathfrak{d}}\mathbf{u})\vec{\nu} + \sigma\mathbf{u} &= \lambda\mathbf{u} + \mathbf{g} && \text{na } \Gamma_3.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Řešitelnost této úlohy pak souvisí s volbou λ. Již jsme ukázali (viz Věty 3.4.4 a 3.4.5), že pokud $\lambda < 0$ bude dostatečně malé, pak je výše uvedená úloha vždy řešitelná. Nyní se budeme věnovat podrobněji této problematice. Nejdříve si uvedeme přirozenou definici.

Definice 3.4.8 — Spektrum eliptického operátoru. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ lipschitzovská a $\{\Gamma_i\}_{i=1}^3$ příslušné části hranice. Buď L eliptický operátor jako výše a $\sigma^{\alpha\beta} \in L^\infty(\Gamma_3)$ pro $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, N$. Řekneme, že $\lambda \in \mathbb{R}$ náleží do reálného spektra operátoru L, právě tehdy, když existuje netriviální řešeni úlohy (3.70) s $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Množinu takových λ, tedy **reálné spektrum**, označíme Σ.

Je důležité si uvědomit, že definice spektra se nevztahuje jen k operátoru L, ale bere v úvahu i okrajové podmínky. Tj. jiné spektrum budeme mít pro homogenní Dirichletovu úlohu a homogenní Neumannovu úlohu.

Konečně ukážeme, jak souvisí spektrum s řešitelností původní úlohy a také ukážeme, že spektrum je nejvýše spočetné.

Věta 3.4.9 — O vlastnostech spektra. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ Lipschitzovská a $\{\Gamma_i\}_{i=1}^3$ příslušné části hranice. Buď L eliptický operátor a $\{\sigma^{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1}^N \in L^\infty(\Gamma_3)$ a Σ jeho reálné spektrum. Potom platí:

1) Σ je nejvýše spočetná. Navíc pokud je nekonečná, pak platí $\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, kde $\lambda_k \to \infty$.
2) Následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:
   - $\lambda \notin \Sigma$
   - pro každé $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathbb{L}^2$ existuje právě jedno slabé řešení (3.70).
3) Pro každé $\lambda \notin \Sigma$, pak existuje $C > 0$ takové, že pro všechna $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathbb{L}^2$ a odpovídající jednoznačná slabá řešení $\mathbf{u} \in V$ úlohy (3.70) platí
$$\|\mathbf{u}\|_V \le C\|(\mathbf{f}, \mathbf{g})\|_{\mathbb{L}^2}. \tag{3.71}$$

Důkaz. Začněme s důkazem 1). Díky Větám 3.4.4 a 3.4.5 již víme, že platí $\Sigma \cap (-\infty, -\gamma_0] = \emptyset$. Navíc je zřejmé, že pokud $\lambda \le -\gamma_0$, věta platí. Můžeme tedy uvažovat $\lambda > -\gamma_0$. Použitím (3.57) s $\gamma > \gamma_0$ můžeme opět ukázat, že $\mathbf{u} \in V$ řeší (3.70) právě, když
$$\begin{aligned}(\mathbf{u}, \mathbf{u}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}) - K(\mathbf{u}, \mathbf{u}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}) &= \frac{1}{\gamma}K(\mathbf{f} + \lambda\mathbf{u}, \mathbf{g} + \lambda\mathbf{u}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_2})\\ \Leftrightarrow \gamma(\mathbf{u}, \mathbf{u}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}) - (\gamma+\lambda)K(\mathbf{u}, \mathbf{u}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}) &= K(\mathbf{f}, \mathbf{g}).\end{aligned} \tag{3.72}$$
Buď tedy $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ a $\mathbf{u} \in V$ netriviální řešení (3.72). Potom (poznamenejme, že $\gamma + \lambda \ge \gamma - \gamma_0 > 0$) je
$$0 < \frac{\gamma}{\gamma+\lambda} =: \mu$$
vlastní číslo operátoru K. Dle bodu (vi) Věty 3.4.6 je spektrum K nejvýše spočetné. Tedy množina takových $\lambda \subset \Sigma$ musí být nejvýše spočetná. Navíc pokud je nekonečná, tj. $\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, pak musí existovat i vlastní čísla operátoru K taková, že
$$0 < \frac{\gamma}{\gamma+\lambda_k} = \mu_k \implies \lambda_k = \frac{\gamma - \mu_k}{\mu_k}.$$
Protože jediný hromadný bod spektra K je 0, vidíme, že $\lambda_k \to \infty$ a důkaz 1) je hotov. Bod 2) přímo plyne z bodu 1) Věty 3.4.7.

Důkaz bodu 3) provedeme sporem. Buď $\lambda \notin \Sigma$ pevné. Nechť existují $\{(\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_k)\} \in \mathbb{L}^2$ a jim odpovídající $\{\mathbf{u}_k\} \in V$ (dle bodu 2) řešení $\mathbf{u}_k$ existují a jsou jednoznačná) taková, že $\|\mathbf{u}_k\|_V > k(\|\mathbf{f}_k\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{g}_k\|_{L^2(\Gamma_2\cup\Gamma_3)})$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Navíc díky linearitě úlohy můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\|\mathbf{u}_k\|_V = 1$. Tato řešení splňují pro každé $\boldsymbol{\varphi} \in V$
$$B_{L,\sigma}(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\varphi}) = \int_\Omega (\mathbf{f}_k + \lambda\mathbf{u}_k)\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3} (\mathbf{g}_k + \lambda\mathbf{u}_k)\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}S. \tag{3.73}$$
Protože V je reflexivní prostor a $\|\mathbf{u}_k\|_V = 1$, můžeme vybrat podposloupnost, kterou nebudeme přeznačovat, takovou, že
$$\mathbf{u}_k \rightharpoonup \mathbf{u} \qquad \text{slabě ve } V. \tag{3.74}$$
Z kompaktního vnoření, Věty o stopách (viz Větu 2.5.20 a Větu 2.6.12) a definice posloupnosti $\{(\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_k)\}$ víme, že pro nepřeznačenou podposloupnost a každé $\alpha \in \{1, \dots, N\}$
$$u_k^\alpha \to u^\alpha \qquad \text{silně v } L^2(\Omega), \tag{3.75}$$
$$u_k^\alpha \to u^\alpha \qquad \text{silně v } L^2(\Gamma_2\cup\Gamma_3), \tag{3.76}$$
$$f_k^\alpha \to 0 \qquad \text{silně v } L^2(\Omega), \tag{3.77}$$
$$g_k^\alpha \to 0 \qquad \text{silně v } L^2(\Gamma_2\cup\Gamma_3). \tag{3.78}$$
Nyní přejdeme k limitě $k \to \infty$ v (3.73). Díky (3.75)–(3.78) je zřejmé, že
$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}\left(\int_\Omega (\mathbf{f}_k + \lambda\mathbf{u}_k)\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3} (\mathbf{g}_k + \lambda\mathbf{u}_k)\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}S\right)\\ &\qquad = \int_\Omega \lambda\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3} \lambda\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}S.\end{aligned} \tag{3.79}$$
Soustřeďme se nyní na levou stranu (3.73). Z (3.74) plyne, že pro každé $w \in L^2(\Omega)$, $\beta \in \{1, \dots, N\}$ a $j \in \{1, \dots, d\}$ platí
$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega \frac{\partial u_k^\beta}{\partial x_j} w\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{\partial u^\beta}{\partial x_j} w\,\mathrm{d}x. \tag{3.80}$$

Postupnou volbou $w := a_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x_i}$ a $w := c_j^{\alpha\beta} \varphi^\alpha$ tak z této identity získáme

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\partial u_k^\beta}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x,$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega c_i^{\alpha\beta} \frac{\partial u_k^\beta}{\partial x_i} \varphi^\alpha \, \mathrm{d}x = \int_\Omega c_i^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial x_i} \varphi^\alpha \, \mathrm{d}x.$$

Použitím těchto konvergencí a také (3.75)–(3.76) získáme

$$\lim_{k\to\infty} B_{L,\sigma}(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\varphi}) = B_{L,\sigma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}).$$

Celkem tedy i s (3.79) jsme získali, že pro každé $\boldsymbol{\varphi} \in V$ platí

$$B_{L,\sigma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) = \int_\Omega \lambda \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} \lambda \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}S. \tag{3.81}$$

To znamená, že $\mathbf{u} \in V$ je slabé řešení (3.70) s $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Protože ale $\lambda \notin \Sigma$, musí být $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Pokud nyní ukážeme, že $\|\mathbf{u}\|_V = 1$, bude to kýžený spor. Protože však $\|\mathbf{u}_k\|_V = 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, stačí nám ukázat, že $\mathbf{u}_k \to \mathbf{u}$ ve V. Z (3.75) již víme, že $\mathbf{u}_k \to \mathbf{u}$ v $L^2(\Omega)$, a proto nám stačí ukázat, že $\|\nabla \mathbf{u}_k - \nabla \mathbf{u}\|_2 \to 0$ a tím bude důkaz hotov. Použitím elipticity, tj. (3.4), definice $B_{L,\sigma}$ a identit (3.73) a (3.81) ihned odvodíme odhad

$$\begin{aligned}
C_1 \|\nabla \mathbf{u}_k - \nabla \mathbf{u}\|_2^2 &\le \int_\Omega \vec{\mathbb{A}} \nabla(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}) \cdot \nabla(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}) \, \mathrm{d}x \\
&= B_{L,\sigma}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}, \mathbf{u}_k - \mathbf{u}) - \int_{\Gamma_3} \sigma(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}) \, \mathrm{d}S \\
&\quad - \int_\Omega \Big(\vec{\mathfrak{c}} \cdot \nabla(\mathbf{u}_k - \mathbf{u})(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}) - \vec{\mathfrak{d}} \cdot \nabla(\mathbf{u}_k - \mathbf{u})(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}) \Big) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega (\mathbf{f}_k + \lambda(\mathbf{u}_k - \mathbf{u})) \cdot (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}) \, \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} (\mathbf{g}_k + \lambda(\mathbf{u}_k - \mathbf{u})) \cdot (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}) \, \mathrm{d}S \\
&\quad - \int_{\Gamma_3} \sigma(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}) \, \mathrm{d}S \\
&\quad - \int_\Omega \Big(\vec{\mathfrak{c}} \cdot \nabla(\mathbf{u}_k - \mathbf{u})(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}) - \vec{\mathfrak{d}} \cdot \nabla(\mathbf{u}_k - \mathbf{u})(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}) \Big) \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Konečně použitím Hölderovy nerovnosti a silných konvergencí (3.75) a (3.76) můžeme ve výše uvedené nerovnosti poslat $k \to \infty$ a dostaneme

$$\lim_{k\to\infty} \|\nabla \mathbf{u}_k - \nabla \mathbf{u}\|_2^2 = 0.$$

Nakonec tedy s pomocí (3.75) a předpokladů na posloupnost $\{\mathbf{u}_k\}$ platí

$$1 = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{u}_k\|_V = \|\mathbf{u}\|_V$$

a to je spor. ■

3.5 Princip maxima pro slabá řešení

Tato část se týká výlučně skalárních rovnic. Víme-li, že řešení naší úlohy je hladké = regulární, pak lze využít vět o slabém a silném principu maxima zavedené v klasické teorii PDR. Cílem této části je ukázat, že slabý princip maxima platí i pro slabá řešení.

Připomeňme si Důsledek 2.2.5, který nám říká, že pokud $u \in W^{1,p}(\Omega)$, pak také $(u - M)^+ \in W^{1,p}(\Omega)$ pro libovolné $M \in \mathbb{R}$.

Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) &= 0 \quad \text{v } \Omega \\
u &= u_0 \quad \text{na } \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Víme, že (za příslušných předpokladů) existuje právě jedno slabé řešení $u \in W^{1,2}(\Omega)$ této úlohy tak, že

$$u - U_0 \in W_0^{1,2}(\Omega), \tag{3.83}$$

$$\int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{pro každé } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{3.84}$$

Zformulujme nyní hlavní tvrzení.

Věta 3.5.1 Je-li u slabé řešení úlohy (3.82), pak

$$\|u\|_{\infty,\Omega} \le \|u_0\|_{\infty,\partial\Omega}\,. \tag{3.85}$$

Důkaz. Pokud $\|u_0\|_{\infty,\partial\Omega} = \infty$, tvrzení zřejmě platí. V opačném případě označme $M := \|u_0\|_{\infty,\partial\Omega}$. Chceme ukázat, že

$$-M \le u(x) \le M \quad \text{s.v. v } \Omega. \tag{3.86}$$

Protože $(u-M)^+$ je dle výše uvedeného prvkem $W^{1,2}(\Omega)$ a stopa této funkce je nulová, vidíme, že $(u-M)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Lze ji tedy použít jako testovací funkci v (3.84). Pomocí (3.84) a Důsledku 2.2.5 dostáváme

$$\begin{aligned} 0 = \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial (u-M)^+}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial (u-M)^+}{\partial x_j}\frac{\partial (u-M)^+}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x \\ &\ge \alpha \left\|\nabla (u-M)^+\right\|_2^2 \ge \tilde{\alpha}\left\|(u-M)^+\right\|_{1,2}^2, \end{aligned}$$

kde jsme využili eliptičnost a ekvivalenci norem na $W_0^{1,2}(\Omega)$. Odsud

$$(u-M)^+ = 0 \quad \text{s.v. v } \Omega; \quad \text{neboli } u \le M \quad \text{s.v. v } \Omega.$$

Protože $-u$ řeší stejnou rovnici s okrajovou podmínkou $-u_0$, plyne z právě dokázaného

$$(-u-M)^+ = 0 \quad \text{s.v. v } \Omega; \quad \text{neboli } u \ge -M \quad \text{s.v. v } \Omega.$$

Nerovnosti v (3.86) jsou tedy dokázány. ■

3.6 Regularita slabého řešení

Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} Lu &= f \ \text{ v } \ \Omega, \\ u &= u_0 \text{ na } \ \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.87}$$

kde

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + bu.$$

Předpokládejme, že $u_0 \in W^{\frac12,2}(\partial\Omega)$, $f \in (W_0^{1,2}(\Omega))^\star$, $\mathbb{A}$ splňuje podmínku elipticity, přičemž pro $i,j = 1,2,\dots,d$ máme $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ a $b \in L^\infty(\Omega)$, $b \ge 0$ s.v. v Ω. Potom díky Laxově–Milgramově větě (Věta 3.3.1) víme, že existuje právě jedno slabé řešení úlohy (3.87).

Teorie regularit slabého řešení hledá odpověď na následující otázku: Nechť jsou data úlohy hladší (lepší) než požaduje existenční věta, je pak slabé řešení také hladší?

Pro lineární eliptické úlohy je odpověď *kladná*, teorie je však technicky komplikovaná. Proto se nejprve omezíme na jednodušší situaci, kdy $\Omega = \mathbb{R}^d$. Studujeme tedy úlohu „bez hranice“

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + bu = f \quad \text{v } \mathbb{R}^d. \tag{3.88}$$

Dokažte si větu (použijte Větu 3.3.1):

Věta 3.6.1 Nechť $a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ pro všechna $i,j = 1,2,\dots,d$, $b \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \ge 0$, $b \ge b_0 > 0$ s.v. na $\mathbb{R}^d$, $\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \alpha|\vec{\xi}|^2$ pro s.v. $x \in \mathbb{R}^d$ a všechna $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^d$, $\alpha > 0$. Je-li $f \in (W^{1,2}(\mathbb{R}^d))^\star$, pak existuje právě jedno $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ takové, že

$$\int_{\mathbb{R}^d} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d} bu\varphi\,\mathrm{d}x = \langle f,\varphi\rangle_{W^{1,2}(\mathbb{R}^d)} \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d). \tag{3.89}$$

Navíc

$$\|u\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^d)} \le C\|f\|_{(W^{1,2}(\mathbb{R}^d))^\star}. \tag{3.90}$$

Nyní předpokládejme, že data jsou hladší, tedy

$$a_{ij} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d),\ i,j = 1,2,\dots,d,\ b \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d) \quad \text{a } f \in L^2(\mathbb{R}^d). \tag{3.91}$$

Je pak slabé řešení $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$?

Věta 3.6.2 Nechť a_{ij}, b a f splňují (3.91). Pak jednoznačně definované slabé řešení $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ úlohy (3.88) patří do $W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$ a platí

$$\|u\|_{2,2} \leq C \|f\|_2 . \tag{3.92}$$

Důkaz. 1. Formální. Označme pro pevné $l \in \{1, 2, \ldots, d\}$: $Z' \equiv \frac{\partial Z}{\partial x_l}$ pro funkci Z. Derivujme rovnici (3.88) dle $x_l : \left(\frac{\partial}{\partial x_l}(3.88)\right) \Rightarrow$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u'}{\partial x_j}\right) + bu' = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a'_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - b'u + f'. \tag{3.93}$$

Násobme (3.93) u', integrujme přes $\mathbb{R}^d$ a užijme integraci per partes (Greenova věta). Dostaneme

$$\int_{\mathbb{R}^d} a_{ij}\frac{\partial u'}{\partial x_j}\frac{\partial u'}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d} b(u')^2\,\mathrm{d}x$$
$$= -\int_{\mathbb{R}^d} a'_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u'}{\partial x_i} - \int_{\mathbb{R}^d} b'uu'\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d} f'u'\,\mathrm{d}x. \tag{3.94}$$

Připomeňme, že u splňuje (3.90) a $\|f\|_{(W^{1,2}(\mathbb{R}^d))^\star} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$, je-li $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Levá strana (3.94) je díky podmínce elipticity zdola omezená $\alpha \|\nabla u'\|_2^2$. Pravou stranu (3.94) nejdříve upravíme použitím integrace per partes $\int f'u'\,\mathrm{d}x = -\int fu''\,\mathrm{d}x$ a pak odhadujeme

$$|\mathrm{PS}\ (3.94)| \leq \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^d\\ i,j=1,\ldots,d}} |a'_{ij}(x)|\,\|\nabla u\|_2\,\|\nabla u'\|_2 + \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|b'|\,\|u\|_2\,\|u'\|_2$$
$$+ \|f\|_2\,\|u''\|_2 \leq C\|f\|_2\,\|\nabla u'\|_2 + C\|f\|_2^2 + \|f\|_2\,\|\nabla u'\|_2 \leq \widetilde{C}(\alpha)\,\|f\|_2^2 + \frac{\alpha}{2}\|\nabla u'\|_2^2 . \tag{3.95}$$

Dáme-li dolní odhad levé strany (3.94) dohromady s horním odhadem pravé strany (3.94), obdržíme

$$\alpha\|\nabla u'\|_2^2 \leq C\|f\|_2^2 + \frac{\alpha}{2}\|\nabla u'\|_2^2 ,$$

což díky (3.90) implikuje odhad (3.92). ■

Tento důkaz je formální (nesprávný), neboť vycházel z klasické formulace úlohy. My však nevíme, že slabé řešení $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ splňuje rovnici (3.88) skoro všude (či bodově) v $\mathbb{R}^d$, tím méně pak, že rovnici můžeme derivovat. Musíme tedy k důkazu vyjít ze slabé formulace (3.89).

Důkaz. 2. Rigorózní. Věta 2.3.1 říká

$$u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d) \Longleftrightarrow u \in L^2 \& \frac{1}{|h|}\|r_h u - u\|_2 \leq C < \infty \quad \forall |h| \leq h_0.$$

Chceme ukázat, že $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$. K tomu stačí ověřit (neboť již víme, že $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla u(x+h\vec{e}_k) - \nabla u(x)|^2}{|h|^2}\,\mathrm{d}x \leq C\|f\|_2^2 \quad \forall k = 1, 2, \ldots, d, \tag{3.96}$$

kde vektor $\vec{e}_k = (0, \ldots, 1, 0 \ldots)$ je k-tý vektor kanonické báze v $\mathbb{R}^d$.

Odhad (3.92) pak plyne z Věty 2.3.1, bodu 2. Označme $\Delta_k^h u(x) = u(x + h\vec{e}_k) - u(x)$, kde k je pevné. Protože $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$, tak zřejmě $\Delta_k^h u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$.

Položme $r_k^{-h}\varphi = \varphi(x - h\vec{e}_k)$. Je-li $\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$, pak $r_k^{-h}\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ pro libovolné $k = 1, 2, \ldots, d$ a můžeme ji použít jako testovací funkci v (3.89). Po substituci dostaneme

$$\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x+h\vec{e}_k)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x+h\vec{e}_k)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d} b(x+h\vec{e}_k)u(x+h\vec{e}_k)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x+h\vec{e}_k)\varphi(x). \tag{3.97}$$

Nyní od (3.97) odečteme (3.89) a do výsledku dosadíme za $\varphi := \Delta_k^h u$. Po úpravách máme

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\frac{\partial\Delta_k^h u(x)}{\partial x_j}\frac{\partial\Delta_k^h u(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d} b(x)|\Delta_k^h u(x)|^2\,\mathrm{d}x\\ = -\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{i,j=1}^d \big(a_{ij}(x+h\vec{e}_k)-a_{ij}(x)\big)\frac{\partial u(x+h\vec{e}_k)}{\partial x_j}\frac{\partial\Delta_k^h u(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x\\ -\int_{\mathbb{R}^d}\big(b(x+h\vec{e}_k)-b(x)\big)u(x+h\vec{e}_k)\Delta_k^h u(x)\,\mathrm{d}x\\ +\int_{\mathbb{R}^d}\big(f(x+h\vec{e}_k)-f(x)\big)\Delta_k^h u(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (3.98)\end{aligned}$$

Substitucí upravme poslední člen na tvar

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\Delta_k^{-h}(\Delta_k^h u(x))\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\big(u(x+h\vec{e}_k)-2u(x)+u(x-h\vec{e}_k)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Podělme výslednou rovnici h^2. Protože $\frac{\Delta_k^h u}{h}$ je omezeno v $L^2(\mathbb{R}^d)$ nezávisle na h, plyne z Věty 2.3.1, že (položme $(g = \Delta_k^h u/h)$)

$$\frac{1}{|h|}\left\|\Delta_k^{-h}\left(\frac{\Delta_k^h u}{h}\right)\right\|_2 = \frac{1}{|h|}\left\|\Delta_k^{-h} g\right\|_2 \le c\left\|\nabla g\right\|_2 = c\left\|\nabla\frac{\Delta_k^h u}{h}\right\|_2.$$

Poslední člen v (3.98) je tedy odhadnut shora pomocí

$$c\left\|f\right\|_2\left\|\nabla\frac{\Delta^h u}{h}\right\|_2.$$

Ostatní členy v (3.98) jsou odhadnuty podobně jako ve formálním důkazu. Proto dostáváme

$$\begin{aligned}\alpha\left\|\nabla\frac{\Delta_k^h u}{h}\right\|_2^2 &\le C\Big(\left\|\frac{\Delta_k^h\mathbb{A}}{h}\right\|_\infty\|\nabla u\|_2\left\|\nabla\frac{\Delta_k^h u}{h}\right\|_2\\ &\quad+\left\|\frac{\Delta_k^h b}{h}\right\|_\infty\|u\|_2\left\|\nabla\frac{\Delta_k^h u}{h}\right\|_2+\|f\|_2\left\|\nabla\frac{\Delta_k^h u}{h}\right\|_2\Big)\\ &\le C(\|\mathbb{A}\|_{1,\infty},\|b\|_{1,\infty})\Big(\|f\|_2^2+\|u\|_{1,2}^2\Big)+\frac{\alpha}{2}\left\|\nabla\frac{\Delta_k^h u}{h}\right\|_2.\end{aligned}$$

Použitím (3.90) je nerovnost (3.96) dokázána. ■

Máme-li úlohu v omezené oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, pak postupujeme podobně (nikoliv stejně): *musíme však dávat pozor, aby hodnoty $u(x+he^i)$ byly definovány.* To vede k rozdělení úlohy na zkoumání regularity

1. Vnitřní. Necítí hraniční podmínky, je citlivá jen na koeficienty rovnice a f. Odhady se provádí na podoblasti množiny Ω a závisí na vzdálenosti této podoblasti od $\partial\Omega$.
2. Hraniční. Ta se dále dělí na regularitu derivací v tečných směrech (podél hranice) a regularitu derivací v normálových směrech.

Příkladem věty o vnitřní regularitě je následující tvrzení:

Věta 3.6.3 Buď Ω omezená oblast. Nechť $u \in W^{1,2}(\Omega)$ splňuje

$$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x+\int_\Omega bu\varphi\,\mathrm{d}x=\int_\Omega f\varphi\,\mathrm{d}x\quad\forall\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega). \qquad (3.99)$$

Nechť $f \in L^2(\Omega)$, $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ pro $i,j = 1,2,\ldots,d$, $b \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $b \ge 0$ s.v. na Ω. Pak $\forall\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$

$$\|u\|_{2,2,\Omega'} \le C(\Omega')\left\|f\right\|_{2,\Omega}.$$

Důkaz. Buď $\xi \in \mathcal{D}(\Omega), \xi \equiv 1$ na $\Omega', 0 \le \xi \le 1$. Vezměme místo φ v (3.99) funkci $\varphi\xi^2$ a přepišme (3.99) pro veličinu $w = u\xi$, pak w rozšiřme nulou vně Ω. Potom lze chápat rovnici na $\mathbb{R}^d$. I když není b striktně kladné na $\mathbb{R}^d$, víme, že všechny funkce mají v $\mathbb{R}^d$ kompaktní nosič. Navíc máme

$$\|u\|_{1,2} \le C\|f\|_2.$$

Proto můžeme použít Větu 3.6.2. Přesněji, pokud $u \in W^{1,2}(\Omega)$ řeší

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + bu\varphi \right) \mathrm{d}x = \int_\Omega f\varphi \, \mathrm{d}x \tag{3.100}$$

pro $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, vezmeme–li za φ v (3.100) $\varphi\xi^2$, kde $\xi \equiv 1$ v Ω', $\xi \in \mathcal{D}(\Omega), \xi(x) \in [0,1]$, dostaneme

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(a_{ij} \frac{\partial(u\xi)}{\partial x_j} \frac{\partial(\varphi\xi)}{\partial x_i} + b(u\xi)(\varphi\xi) \right) \mathrm{d}x \\ &\qquad = \int_\Omega (f\xi)(\varphi\xi)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} u \frac{\partial \xi}{\partial x_j}\right) \varphi\xi \,\mathrm{d}x - \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \varphi\xi \,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.101}$$

Dodefinujeme-li $a_{ij}, b, f, \varphi\xi, u\xi$ vně Ω nulou a označíme-li $w = u\xi, \psi = \varphi\xi$ a $g \equiv f\xi - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} u \frac{\partial \xi}{\partial x_j}\right) - \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \xi}{\partial x_i}$, dostáváme z (3.101)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + bw\psi \right) = \int_{\mathbb{R}^d} g\psi \,\mathrm{d}x \quad \forall \psi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d), \text{ supp } \psi \subset \Omega.$$

Protože víme, že

$$\|w\|_{1,2} \le C\|f\|_2,$$

lze nyní s úspěchem využít Větu 3.6.2. ∎

Mluvíme-li o globální regularitě (tj. vnitřní i hraniční dohromady), pak platí následující tvrzení.

Věta 3.6.4 Nechť Ω je třídy $C^{k-1,1}, k \ge 2$. Buď $a_{ij} \in W^{k-1,\infty}(\Omega)$, $b \ge 0$ s.v. v Ω, $b \in W^{k-1,\infty}(\Omega)$, $\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \alpha|\xi|^2$. Buď $u_0 \in W^{k-\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ a $f \in W^{k-2,2}(\Omega)$. Pak u, jediné slabé řešení Dirichletovy úlohy

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + bu &= f \quad \text{v } \Omega, \\ u &= u_0 \quad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

patří do $W^{k,2}(\Omega)$ a platí

$$\|u\|_{k,2,\Omega} \le C\left(\|f\|_{k-2,2,\Omega} + \|u_0\|_{k-\frac{1}{2},2,(\partial\Omega)} \right).$$

Poznámka 3.6.5.
- Je-li $d = 3$ pak z Věty 2.5.25 o spojitém vnoření dostáváme $u \in C^{2,\frac{1}{2}}(\overline{\Omega})$ (pro $k = 4$). Tedy u je klasickým řešením původní úlohy.
- Pro Neumannův problém platí podobná věta. Za analogických předpokladů na $a_{i,j}$, $i,j = 1,2,\dots,d$, b a f jako ve Větě 3.6.4 máme
$$g \in W^{k-\frac{3}{2},2}(\partial\Omega) \Rightarrow u \in W^{k,2}(\Omega), \quad k \ge 2.$$
- Pro smíšenou úlohu si ale musíme dát pozor. Singularita může vzniknout na přechodu mezi Γ_2 a Γ_1.

3.7 Souvislost s variačním počtem — řešitelnost pro symetrický koercivní operátor

V této části si ukážeme, jak pro jisté operátory souvisí řešitelnost (3.9) s minimalizací jistých kvadratických funkcionálů. V celé této sekci tedy nebudeme uvažovat obecný eliptický operátor L, ale soustředíme se na symetrické operátory L (samoadjungované), které jsou navíc koercivní. Zavedeme tedy dva následující pojmy.

Definice 3.7.1 — Symetrický lineární eliptický operátor. Buď L eliptický operátor. Řekneme, že je symetrický, pokud je zadán pomocí

$$(L\mathbf{u})^\alpha := -\sum_{\beta=1}^{N} \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial x_j}\right) + \sum_{\beta=1}^{N} b^{\alpha\beta} u^\beta \tag{3.102}$$

a pro každé $\alpha, \beta \in \{1, \dots, N\}$ a $i, j \in \{1, \dots, d\}$ platí

$$a_{ij}^{\alpha\beta} = a_{ji}^{\beta\alpha}, \quad b^{\alpha\beta} = b^{\beta\alpha} \quad \text{skoro všude v } \Omega. \tag{3.103}$$

Takový operátor budeme opět často zapisovat ve zkrácené formě

$$L\mathbf{u} := -\operatorname{div}(\vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u}) + \vec{\mathbf{b}}\mathbf{u}$$

a podmínku (3.102) budeme zapisovat jako

$$\vec{\mathbb{A}} = \vec{\mathbb{A}}^T, \qquad \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}}^T.$$

Namísto (3.5)–(3.8) budeme tedy uvažovat zjednodušený problém

$$\begin{aligned} L\mathbf{u} &= \mathbf{f} && \text{v } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 && \text{na } \Gamma_1, \\ \vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u}\cdot\vec{\nu} &= \mathbf{g} && \text{na } \Gamma_2, \\ \vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u}\cdot\vec{\nu} + \sigma\mathbf{u} &= \mathbf{g} && \text{na } \Gamma_3, \end{aligned} \tag{3.104}$$

kde budeme navíc předpokládat symetrii σ, tj.,

$$\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\beta\alpha} \text{ pro každé } \alpha, \beta \in \{1, \dots, N\} \text{ skoro všude na } \partial\Omega. \tag{3.105}$$

Připomeňme ještě značení z (3.32)

$$\begin{aligned} \widetilde{b}(x) &:= \inf_{\{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^N;\, |\mathbf{z}|=1\}} \sum_{\alpha,\beta=1}^N b^{\alpha\beta}(x) z^\alpha z^\beta, \qquad x \in \Omega, \\ \widetilde{\sigma}(x) &:= \inf_{\{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^N;\, |\mathbf{z}|=1\}} \sum_{\alpha,\beta=1}^N \sigma^{\alpha\beta}(x) z^\alpha z^\beta, \qquad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

a v této sekci budeme uvažovat vždy případ

$$\widetilde{b}(x) \geq 0, \qquad \widetilde{\sigma}(x) \geq 0 \qquad \text{skoro všude.} \tag{3.106}$$

Příslušná bilineární forma pro problém (3.104) má tvar

$$B_{L,\sigma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) := \int_\Omega \left(\vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\varphi} + \vec{\mathbf{b}}\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\right) \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_3} \sigma\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\, \mathrm{d}S.$$

Slabým řešením problému (3.104) (porovnej s Definicí 3.2.1) pak rozumíme $\mathbf{u}$ takové, že $\mathbf{u} - \mathbf{U}_0 \in V$, $\mathbf{U}_0 \in W^{1,2}(\Omega)$, stopa $\mathbf{U}_0 = \mathbf{u}_0$ na Γ_1, a pro každé $\boldsymbol{\varphi} \in V$ platí

$$B_{L,\sigma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_V + \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)}. \tag{3.107}$$

Všimněme si, že díky předpokládaným symetriím platí $B_{L,\sigma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) = B_{L,\sigma}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})$, a tedy naše úloha je samoadjungovaná. To nám umožní formulovat problém existence řešení ekvivalentním způsobem jako problém hledání minima jistého funkcionálu. Označme si prostor

$$W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^N) := \{\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) : \varphi_\alpha \in W^{1,2}(\Omega) \text{ pro každé } \alpha \in \{1, \dots, N\}\}$$

a definujeme funkcionál $\Phi\colon W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\Phi_{L,\sigma}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} B_{L,\sigma}(\mathbf{u}, \mathbf{u}). \tag{3.108}$$

Potom platí následující věta.

Věta 3.7.2 — Vztah slabého řešení a minima funkcionálu. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ s příslušnými částmi hranice $\{\Gamma_i\}_{i=1}^3$ a operátor L symetrický eliptický ve smyslu Definice 3.7.1. Buď dále pro každé $\alpha, \beta = 1, \dots, N$ $\sigma^{\alpha\beta} \in L^\infty(\Gamma_3)$ splňující navíc (3.105) a společně s $\vec{\mathbf{b}}$ také (3.106). Konečně buď $\mathbf{u} \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ libovolné splňující $\mathbf{u} - \mathbf{U}_0 \in V$, $\mathbf{U}_0$ jako výše. Potom následující výroky jsou ekvivalentní.

(i) Funkce $\mathbf{u}$ je slabé řešení, tj. splňuje (3.107).

(ii) Pro každé $\boldsymbol{\varphi} \in V$ platí, že

$$\Phi_{L,\sigma}(\mathbf{u} + \boldsymbol{\varphi}) - \Phi_{L,\sigma}(\mathbf{u}) \geq \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_V + \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)}. \tag{3.109}$$

Ještě než přistoupíme k důkazu této věty, uveďme si ekvivalentní zápis (ii) v případě, že $\mathbf{f} \in (W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^N))^*$. Pro tato lepší $\mathbf{f}$ můžeme skutečně zformulovat (ii) jako problém minimalizace na konvexní množině a dostáváme (důkaz je přenechán čtenáři jako snadné cvičení), že najít $\mathbf{u}$ splňující (ii) je ekvivalentní nalezení $\mathbf{u}$ takového, že $\mathbf{u} - \mathbf{U}_0 \in V$ a že pro každé $\mathbf{v}$ splňující $\mathbf{v} - \mathbf{U}_0 \in V$ platí

$$\Phi_{L,\sigma}(\mathbf{u}) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}\rangle_V - \langle \mathbf{g}, \mathbf{u}\rangle_{W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)} \le \Phi_{L,\sigma}(\mathbf{v}) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle_V + \langle \mathbf{g}, \mathbf{v}\rangle_{W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)}.$$

Problém (3.107) se pak také nazývá **Eulerovými–Lagrangeovými rovnicemi** funkcionálu $\Phi_{L,\sigma}(\mathbf{u}) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}\rangle_V - \langle \mathbf{g}, \mathbf{u}\rangle_{W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)}$ a (3.107) se dá obdržet jako

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\Phi_{L,\sigma}(\mathbf{u}+t\boldsymbol{\varphi}) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}+t\boldsymbol{\varphi}\rangle_V - \langle \mathbf{g}, \mathbf{u}+t\boldsymbol{\varphi}\rangle_{W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)}\Big)\right]_{t=0} = 0,$$

nebo-li, že $t = 0$ je kritickým bodem funkcionálu $\Phi_{L,\sigma}(\mathbf{u}+t\boldsymbol{\varphi}) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}+t\boldsymbol{\varphi}\rangle_V - \langle \mathbf{g}, \mathbf{u}+t\boldsymbol{\varphi}\rangle_{W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)}$ pro každé $\boldsymbol{\varphi} \in V$.

Důkaz Věty 3.7.2. Začněme s implikací (i) $\Longrightarrow$ (ii). Přímo z definice $\Phi_{L,\sigma}$ (viz (3.108)), z faktu, že $\mathbf{u}$ řeší (3.107), a z toho, že $B_{L,\sigma}$ je díky předpokladům symetrická bilineární forma, získáme

$$\begin{aligned}\Phi_{L,\sigma}(\mathbf{u}+\boldsymbol{\varphi}) - \Phi_{L,\sigma}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}B_{L,\sigma}(\mathbf{u}+\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}+\boldsymbol{\varphi}) - \frac{1}{2}B_{L,\sigma}(\mathbf{u},\mathbf{u}) \\ &= \frac{1}{2}B_{L,\sigma}(\mathbf{u},\mathbf{u}) + B_{L,\sigma}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi}) + \frac{1}{2}B_{L,\sigma}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}) - \frac{1}{2}B_{L,\sigma}(\mathbf{u},\mathbf{u}) \\ &= \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}\rangle_V + \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi}\rangle_{W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)} + \frac{1}{2}B_{L,\sigma}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}).\end{aligned}$$

K dokončení důkazu první implikace tedy stačí ukázat, že $B_{L,\sigma}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}) \ge 0$ pro každé $\boldsymbol{\varphi} \in V$. To je ale zřejmé díky předpokladům na eliptičnost matice $\vec{\mathbb{A}}$ (viz (3.3)), a nezápornost $\widetilde{b}$ a $\widetilde{\sigma}$ (viz (3.106)).

Přikročme nyní k důkazu druhé implikace (ii) $\Longrightarrow$ (i). Buď nyní $\psi \in V$ libovolné. Použitím předpokladu (ii) a stejným výpočtem jako výše zjistíme, že

$$\begin{aligned}0 &\le \Phi_{L,\sigma}(\mathbf{u}+\boldsymbol{\psi}) - \Phi_{L,\sigma}(\mathbf{u}) - \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\psi}\rangle_V - \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\psi}\rangle_{W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)} \\ &= B_{L,\sigma}(\mathbf{u},\boldsymbol{\psi}) + \frac{1}{2}B_{L,\sigma}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}) - \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\psi}\rangle_V - \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\psi}\rangle_{W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)}.\end{aligned}$$

Pro libovolné $t > 0$ a $\boldsymbol{\varphi} \in V$ volme ve výše uvedené nerovnosti $\boldsymbol{\psi}\colon = t\boldsymbol{\varphi}$, což díky bilinearitě vede k

$$0 \le tB_{L,\sigma}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi}) + \frac{1}{2}t^2 B_{L,\sigma}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}) - t\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}\rangle_V - t\langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi}\rangle_{W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)}.$$

Vydělením $t > 0$ a limitním přechodem $t \to 0_+$ tak dostaneme

$$\begin{aligned}0 &\le \lim_{t\to 0_+}\left(B_{L,\sigma}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi}) + \frac{1}{2}tB_{L,\sigma}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}) - \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}\rangle_V - \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi}\rangle_{W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)}\right) \\ &= B_{L,\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi}) - \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}\rangle_V - \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi}\rangle_{W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)}.\end{aligned}$$

Tato nerovnost platí pro všechna $\boldsymbol{\varphi} \in V$ a tedy i pro $-\boldsymbol{\varphi}$, což díky linearitě nerovnice v proměnné $\boldsymbol{\varphi}$ už vede k tomu, že je splněna rovnost (3.107) a tedy platí (i). ■

Výše jsme si ukázali, že najít slabé řešení je pro některé typy úloh (přesněji pro symetrické) ekvivalentní tomu najít minimizér jisté variační úlohy. Nyní si navíc ukážeme, že v případě, kdy $b^{\alpha\beta} = 0$ a $|\Gamma_3| = 0$, můžeme problém formulovat na první pohled zcela odlišně, ale stejně jsme vedeni ke stejnému cíli. Tato nová formulace se nazývá **duální formulace**. Zde duální bude znamenat, že namísto variační formulace pro $\mathbf{u}$ se budeme zabývat variační formulací pro $\vec{\mathbf{T}} = \vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u}$. K tomu si tedy zadefinujeme nejdříve vhodnou uzavřenou podmnožinu $L^2(\Omega;\mathbb{R}^{d\times N})$

$$\begin{aligned}V^* := \Big\{\vec{\mathbf{T}} \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^{d\times N})\colon &\text{ pro každé } \boldsymbol{\varphi} \in V \text{ platí} \\ &\int_\Omega \vec{\mathbf{T}}\cdot\nabla\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}\rangle_V + \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi}\rangle_{W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)}\Big\}.\end{aligned} \tag{3.110}$$

Tato definice neznamená nic jiného než to, že $\vec{\mathbf{T}} \in V^*$ splňuje ve smyslu distribucí následující úlohu

$$\begin{aligned}-\mathrm{div}\,\vec{\mathbf{T}} &= \mathbf{f} \quad \text{v } \Omega, \\ \vec{\mathbf{T}}\cdot\vec{\nu} &= \mathbf{g} \quad \text{na } \Gamma_2\end{aligned} \tag{3.111}$$

a tedy pokud $\mathbf{u}$ je slabé řešení, pak automaticky $\vec{\mathbf{T}} = \vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u} \in V^*$. Zaveďme ještě tedy duální funkcionál

$$\Phi^*(\vec{\mathbf{T}}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \vec{\mathbb{A}}^{-1}\vec{\mathbf{T}} \cdot \vec{\mathbf{T}} \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla\vec{U}_0 \cdot \vec{\mathbf{T}} \,\mathrm{d}x, \tag{3.112}$$

kde $\vec{\mathbb{A}}^{-1}$ značí inverzní matici k $\vec{\mathbb{A}}$, tj. platí

$$\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{k=1}^{d}(\vec{\mathbb{A}})_{ik}^{\alpha\nu}(\vec{\mathbb{A}}^{-1})_{kj}^{\nu\beta} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}.$$

Poznamenejme, že díky měřitelnosti, omezenosti a eliptičnosti matice $\vec{\mathbb{A}}$ (viz (3.4)), inverzní matice $\vec{\mathbb{A}}^{-1}$ existuje a je opět měřitelná, omezená a eliptická. Konečně můžeme zformulovat větu o ekvivalenci duální formulace a existenci slabého řešení.

Věta 3.7.3 — Duální variační formulace. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ s příslušnými částmi hranice $\{\Gamma_i\}_{i=1}^3$, $|\Gamma_3| = 0$ a operátor L symetrický eliptický ve smyslu Definice 3.7.1. Buď dále $b^{\alpha\beta} = 0$ pro každé $\alpha, \beta \in \{1, \dots, N\}$. Potom jsou následující výroky jsou ekvivalentní.

(i) Funkce $\vec{\mathbf{T}} \in V^*$ je taková, že pro každé $\vec{\mathbf{W}} \in V^*$ platí

$$\Phi^*(\vec{\mathbf{T}}) \leq \Phi^*(\vec{\mathbf{W}}).$$

(ii) $\vec{\mathbf{T}} = \vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u}$, kde $\mathbf{u}$ je slabé řešení, tj., $\mathbf{u} - \mathbf{U}_0 \in V$ a splňuje (3.107).

Důkaz. Důkaz začneme implikací (ii) $\implies$ (i). Je-li $\mathbf{u}$ slabé řešení, pak přímo z definice V^* (viz (3.110)) a slabé formulace (3.107) plyne, že $\vec{\mathbf{T}} = \vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u} \in V^*$. Buď nyní $W \in V^*$ libovolné. Díky elipticitě matice $\vec{\mathbb{A}}^{-1}$ a definici Φ^* získáme

$$\begin{aligned}
\Phi^*(\vec{\mathbf{W}}) - \Phi^*(\vec{\mathbf{T}}) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\vec{\mathbb{A}}^{-1}\vec{\mathbf{W}} \cdot \vec{\mathbf{W}} - \vec{\mathbb{A}}^{-1}\vec{\mathbf{T}} \cdot \vec{\mathbf{T}} \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla\mathbf{U}_0 \cdot (\vec{\mathbf{W}} - \vec{\mathbf{T}})\Big) \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \vec{\mathbb{A}}^{-1}(\vec{\mathbf{W}} - \vec{\mathbf{T}}) \cdot (\vec{\mathbf{W}} - \vec{\mathbf{T}}) \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \vec{\mathbb{A}}^{-1}\vec{\mathbf{T}} \cdot (\vec{\mathbf{W}} - \vec{\mathbf{T}}) \,\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_\Omega \nabla\mathbf{U}_0 \cdot (\vec{\mathbf{W}} - \vec{\mathbf{T}}) \,\mathrm{d}x \\
&\geq \int_\Omega \vec{\mathbb{A}}^{-1}\vec{\mathbf{T}} \cdot (\vec{\mathbf{W}} - \vec{\mathbf{T}}) \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla\mathbf{U}_0 \cdot (\vec{\mathbf{W}} - \vec{\mathbf{T}}) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \nabla u \cdot (\vec{\mathbf{W}} - \vec{\mathbf{T}}) \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla\mathbf{U}_0 \cdot (\vec{\mathbf{W}} - \vec{\mathbf{T}}) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega (\vec{\mathbf{W}} - \vec{\mathbf{T}}) \cdot \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{U}_0) \,\mathrm{d}x = 0,
\end{aligned}$$

kde poslední rovnost využívá faktů, že $\mathbf{u} - \mathbf{U}_0 \in V$ a $\vec{\mathbf{T}}, \vec{\mathbf{W}} \in V^*$. Vidíme tedy, že $\Phi^*(\vec{\mathbf{W}}) \geq \Phi^*(\vec{\mathbf{T}})$ pro každé $\vec{\mathbf{W}} \in V^*$.

Nyní se budeme věnovat implikaci (i) $\implies$ (ii). Nejdříve si odvodíme **Eulerovy–Lagrangeovy rovnice** pro problém formulovaný v (i). Buď tedy $\vec{\mathbf{T}} \in V^*$ minimizér. Buď dále $\vec{\mathbf{Z}} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{d\times N})$ libovolná funkce splňující pro každé $\boldsymbol{\varphi} \in V$

$$\int_\Omega \vec{\mathbf{Z}} \cdot \nabla\boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x = 0. \tag{3.113}$$

Pro libovolné $t > 0$ položme $\vec{\mathbf{W}} := \vec{\mathbf{T}} + t\vec{\mathbf{Z}}$. Protože $\vec{\mathbf{T}} \in V^*$ a $\vec{\mathbf{Z}}$ splňuje (3.113), potom je zřejmé, že $\vec{\mathbf{W}} \in V^*$ a může být tedy použito ve variační formulaci. Z vlastnosti (i) tedy máme

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{t}(\Phi^*(\vec{\mathbf{W}}) - \Phi^*(\vec{\mathbf{T}})) = \frac{1}{t}\big(\Phi^*(\vec{\mathbf{T}} + t\vec{\mathbf{Z}}) - \Phi^*(\vec{\mathbf{T}})\big) \\
&= \frac{1}{t}\int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\vec{\mathbb{A}}^{-1}(\vec{\mathbf{T}} + t\vec{\mathbf{Z}}) \cdot (\vec{\mathbf{T}} + t\vec{\mathbf{Z}}) - \frac{1}{2}\vec{\mathbb{A}}^{-1}\vec{\mathbf{T}} \cdot \vec{\mathbf{T}} - t\nabla\mathbf{U}_0 \cdot \vec{\mathbf{Z}}\Big) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \Big(\vec{\mathbb{A}}^{-1}\vec{\mathbf{T}} \cdot \vec{\mathbf{Z}} + \frac{t}{2}\vec{\mathbb{A}}^{-1}\vec{\mathbf{Z}} \cdot \vec{\mathbf{Z}} - \nabla\mathbf{U}_0 \cdot \vec{\mathbf{Z}}\Big) \,\mathrm{d}x \\
&\overset{t\to 0_+}{\to} \int_\Omega (\vec{\mathbb{A}}^{-1}\vec{\mathbf{T}} - \nabla\mathbf{U}_0) \cdot \vec{\mathbf{Z}} \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Protože však $(-\vec{\mathbf{Z}})$ také splňuje (3.113), získáme obrácenou nerovnost, a tedy pro každé $\vec{\mathbf{Z}} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{d\times N})$ splňující (3.113) platí

$$\int_\Omega (\vec{\mathbb{A}}^{-1}\vec{\mathbf{T}} - \nabla\mathbf{U}_0) \cdot \vec{\mathbf{Z}} \,\mathrm{d}x = 0. \tag{3.114}$$

Rovnice (3.114) jsou Eulerovy–Lagrangeovy rovnice minimalizační úlohy pro Φ^*.

Ve druhém kroku důkazu si ukážeme, že platnost (3.114) vyžaduje od $\vec{\mathbf{T}}$ jisté vlastnosti a to zejména existenci $\mathbf{u}$ takového, že $\mathbf{u}-\mathbf{u}_0 \in V$ a $\vec{\mathbf{T}} = \vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u}$. Pokud tedy takové $\mathbf{u}$ skutečně existuje, pak musí splňovat $\nabla\mathbf{u} = \vec{\mathbb{A}}^{-1}\vec{\mathbf{T}}$ skoro všude v Ω. Namísto tohoto na první pohled silného požadavku hledejme nejdříve $\mathbf{u}$ takové, že $\mathbf{u}-\mathbf{U}_0 \in V$ a

$$\int_\Omega \nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \vec{\mathbb{A}}^{-1}\vec{\mathbf{T}}\cdot\nabla\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x \quad \text{pro každé } \boldsymbol{\varphi}\in V. \tag{3.115}$$

Protože je $\vec{\mathbb{A}}^{-1}$ omezená, můžeme zadefinovat $\langle \mathbf{f},\boldsymbol{\varphi}\rangle_V := \int_\Omega \vec{\mathbb{A}}^{-1}\vec{\mathbf{T}}\cdot\nabla\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x$ a vidíme, že hledáme slabé řešení eliptického problému. Díky Větě 3.3.2 (ověření předpokladů je přenecháno čtenáři) víme, že existuje právě jedno řešení (v případě, že $|\Gamma_1| = 0$, pak jde o Neumannovu úlohu a řešení je jednoznačné až na konstantu) problému (3.115). Nyní si již ukážeme, jak z (3.114) a (3.115) plyne (ii).

Díky (3.115) platí, že $\vec{\mathbf{Z}}$ definované pomocí $\vec{\mathbf{Z}} := \vec{\mathbb{A}}^{-1}\vec{\mathbf{T}} - \nabla\mathbf{u}$ splňuje (3.113) a tedy může být použito v (3.115). Tím získáme identitu

$$\int_\Omega \vec{\mathbb{A}}^{-1}\vec{\mathbf{T}}\cdot(\vec{\mathbb{A}}^{-1}\vec{\mathbf{T}}-\nabla\mathbf{u})\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla\mathbf{U}_0\cdot(\vec{\mathbb{A}}^{-1}\vec{\mathbf{T}}-\nabla\mathbf{u})\,\mathrm{d}x. \tag{3.116}$$

Dále volba $\boldsymbol{\varphi} := \mathbf{u}-\mathbf{U}_0$ v (3.115) dává

$$\int_\Omega \nabla\mathbf{u}\cdot(\nabla\mathbf{u}-\nabla\mathbf{U}_0)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \vec{\mathbb{A}}^{-1}\vec{\mathbf{T}}\cdot(\nabla\mathbf{u}-\nabla\mathbf{U}_0)\,\mathrm{d}x. \tag{3.117}$$

Sečtením (3.116) a (3.117) a převedením všech členů na jednu stranu rovnice tak získáme (i díky symetrii $\vec{\mathbb{A}}$)

$$\begin{aligned}
0 &= \\
&\int_\Omega \Big(\vec{\mathbb{A}}^{-1}\vec{\mathbf{T}}\cdot(\vec{\mathbb{A}}^{-1}\vec{\mathbf{T}}-\nabla\mathbf{u}) + \nabla\mathbf{u}\cdot(\nabla\mathbf{u}-\nabla\mathbf{U}_0) + \nabla\mathbf{u}_0\cdot\nabla\mathbf{u} - \vec{\mathbb{A}}^{-1}\mathbf{T}\cdot(\nabla\mathbf{u})\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |\Big(\vec{\mathbb{A}}^{-1}\vec{\mathbf{T}}|^2 - 2\vec{\mathbb{A}}^{-1}\vec{\mathbf{T}}\cdot\nabla\mathbf{u} + |\nabla\mathbf{u}|^2\Big)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\vec{\mathbb{A}}^{-1}\mathbf{T}-\nabla\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Platí tedy, že $\vec{\mathbf{T}} = \vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u}$ skoro všude v Ω a $\mathbf{u}-\mathbf{U}_0 \in V$. Navíc, protože $\vec{\mathbf{T}} \in V^*$, pak $\mathbf{u}$ musí splňovat (využíváme faktu $\vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u} = \vec{\mathbf{T}} \in V^*$) slabou formulaci (3.107) a tedy je i slabé řešení. Důkaz je tím hotov. ∎

Poznámka 3.7.4. V předchozím textu jsme viděli, že pro symetrické operátory bez absolutních členů, tj. v případech kdy $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} = \mathfrak{o}$, jsou primární variační úloha (minimizér pro Φ) a duální úloha (minimizér pro Φ^*) v jistém smyslu ekvivalentní a vedoucí k témuž řešení. Rozdíl spočívá v tom, že minimalizací Φ vynucujeme platnost rovnice $L\mathbf{u} = \mathbf{f}$, zatímco minimalizací Φ^* vynucujeme platnost vztahu $\vec{\mathbf{T}} = \vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u}$. Z pohledu aplikací je pak výhodnější řešit úlohu pro Φ, pokud nás zajímá především tvar $\mathbf{u}$, a úlohu pro Φ^*, pokud nás zajímá především tvar $\vec{\mathbf{T}} = \vec{\mathbb{A}}\nabla\mathbf{u}$.

V první části této kapitoly jsme si ukázali řešitelnost pomocí Laxovy–Milgramovy věty. Nyní ukážeme, že v případě symetrických operátorů, které jsou V–eliptické, lze důkaz existence provést mnohem jednodušeji za pomocí hledání minima funkcionálu.

Příklad 3.7.5 (Existence pomocí minimalizace funkcionálu)**.** Ukažte existenci řešení pro (3.104) tím, že hledáte $\mathbf{u}$ splňující (3.109).

Řešení. Uvažujeme nyní eliptickou úlohu se symetrickým operátorem a předpokládejme, že platí (3.106) a bilineární forma $B_{L,\mathfrak{c}}$ je V-eliptická. Ukážeme, jak je pak možno řešit úlohu (3.104). Hledejme řešení $\mathbf{u} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{w}$, kde $\mathbf{w} \in V$. Věta 3.7.2 nám říká, že $\mathbf{u}$ je slabé řešení právě tehdy, když

$$\Phi_{L,\mathfrak{c}}(\mathbf{u}+\boldsymbol{\varphi}) - \Phi_{L,\mathfrak{c}}(\mathbf{u}) \ge \langle \mathbf{f},\boldsymbol{\varphi}\rangle_V + \langle \mathbf{g},\boldsymbol{\varphi}\rangle_{W^{\frac12,2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)}.$$

Buď $\boldsymbol{\psi} \in V$ libovolné a volme $\boldsymbol{\varphi} := \boldsymbol{\psi} - \mathbf{w} \in V$, kde $\mathbf{w}$ je dáno $\mathbf{u} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{w}$. Potom výše uvedená nerovnice přejde na tvar

$$\begin{aligned}
&\Phi_{L,\mathfrak{c}}(\mathbf{U}_0+\mathbf{w}) - \langle \mathbf{f},\mathbf{w}\rangle_V - \langle \mathbf{g},\mathbf{w}\rangle_{W^{\frac12,2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)} \\
&\qquad\qquad \le \Phi_{L,\mathfrak{c}}(\mathbf{U}_0+\boldsymbol{\psi}) - \langle \mathbf{f},\boldsymbol{\psi}\rangle_V - \langle \mathbf{g},\boldsymbol{\psi}\rangle_{W^{\frac12,2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)}.
\end{aligned}$$

Protože $\boldsymbol{\psi} \in V$ je libovolné, hledáme vlastně minimizér jistého funkcionálu. Uvažujeme tedy

$$I := \inf_{\mathbf{w}\in V} \Phi_{L,\mathfrak{c}}(\mathbf{U}_0+\mathbf{w}) - \langle \mathbf{f},\mathbf{w}\rangle_V - \langle \mathbf{g},\mathbf{w}\rangle_{W^{\frac12,2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)}.$$

Z definice infima je zřejmé, že pro každé $\boldsymbol{\varphi} \in V$ platí

$$I \le \Phi_{L,\mathfrak{c}}(\mathbf{U}_0+\boldsymbol{\psi}) - \langle \mathbf{f},\boldsymbol{\psi}\rangle_V - \langle \mathbf{g},\boldsymbol{\psi}\rangle_{W^{\frac12,2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)}$$

a volbou $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}$ tedy máme

$$I \le \Phi_{L,\sigma}(\mathbf{U}_0) < \infty.$$

Z definice infima můžeme najít posloupnost $\{\mathbf{w}^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ takovou, že

$$I = \lim_{n\to\infty} \Big(\Phi_{L,\sigma}(\mathbf{U}_0 + \mathbf{w}^n) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{w}^n\rangle_V - \langle \mathbf{g}, \mathbf{w}^n\rangle_{W^{\frac12,2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)}\Big)$$

a navíc víme, že existuje n_0 takové, že pro každé $n \ge n_0$

$$\Phi_{L,\sigma}(\mathbf{U}_0 + \mathbf{w}^n) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{w}^n\rangle_V - \langle \mathbf{g}, \mathbf{w}^n\rangle_{W^{\frac12,2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)} \le I + 1 \le \Phi(\mathbf{U}_0) + 1. \tag{3.118}$$

Vidíme tedy, že posloupnost $\mathbf{w}^n$ je omezená ve V, a ze spojitosti operátoru stop také vidíme, že je omezená ve $W^{\frac12,2}(\partial\Omega)$. Díky reflexivitě existuje podposloupnost (opět nebudeme přeznačovat) taková, že

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^n &\rightharpoonup \mathbf{w} \quad \text{slabě ve } V,\\ \mathbf{w}^n &\rightharpoonup \mathbf{w} \quad \text{slabě ve } W^{\frac12,2}(\Omega). \end{aligned} \tag{3.119}$$

Využitím definice Φ a V-elipticity, symetrie a bilinearity $B_{L,\sigma}$ získáme navíc následující odhad

$$\begin{aligned} \Phi_{L,\sigma}(\mathbf{U}_0 + \mathbf{w}^n) &= \frac12 B_{L,\sigma}(\mathbf{U}_0 + \mathbf{w}^n, \mathbf{U}_0 + \mathbf{w}^n)\\ &= \frac12 B_{L,\sigma}(\mathbf{U}_0 + \mathbf{w}, \mathbf{U}_0 + \mathbf{w}^n) + \frac12 B_{L,\sigma}(\mathbf{w}^n - \mathbf{w}, \mathbf{U}_0 + \mathbf{w})\\ &\quad + \frac12 B_{L,\sigma}(\mathbf{w}^n - \mathbf{w}, \mathbf{w}^n - \mathbf{w})\\ &= \frac12 B_{L,\sigma}(\mathbf{U}_0 + \mathbf{w}, \mathbf{U}_0 + \mathbf{w}) + B_{L,\sigma}(\mathbf{U}_0 + \mathbf{w}, \mathbf{w}^n - \mathbf{w})\\ &\quad + \frac12 B_{L,\sigma}(\mathbf{w}^n - \mathbf{w}, \mathbf{w}^n - \mathbf{w})\\ &\ge \Phi(\mathbf{U}_0 + \mathbf{w}) + B_{L,\sigma}(\mathbf{w}^n - \mathbf{w}, \mathbf{U}_0 + \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Navíc díky V-elipticitě víme, že existuje $\mathbf{F} \in V^\star$ takové, že $\mathbf{F} = B_{L,\sigma}(\cdot, \mathbf{U}_0 + \mathbf{w})$. Z definice infima I a díky slabým konvergencím (3.119) tak získáme

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to\infty} \Big(\Phi_{L,\sigma}(\mathbf{U}_0 + \mathbf{w}^n) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{w}^n\rangle_V - \langle \mathbf{g}, \mathbf{w}^n\rangle_{W^{\frac12,2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)}\Big)\\ &\ge \Phi(\mathbf{U}_0 + \mathbf{w}) + \lim_{n\to\infty} \Big(\langle \mathbf{F}, \mathbf{w}^n - \mathbf{w}\rangle - \langle \mathbf{f}, \mathbf{w}^n\rangle_V - \langle \mathbf{g}, \mathbf{w}^n\rangle_{W^{\frac12,2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)}\Big)\\ &= \Phi(\mathbf{U}_0 + \mathbf{w}) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{w}\rangle_V - \langle \mathbf{g}, \mathbf{w}\rangle_{W^{\frac12,2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)}. \end{aligned}$$

Z definice infima I však na druhou stranu plyne, že

$$I \le \Phi(\mathbf{U}_0 + \mathbf{w}) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{w}\rangle_V - \langle \mathbf{g}, \mathbf{w}\rangle_{W^{\frac12,2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)}$$

a tedy nutně

$$\begin{aligned} I &= \Phi(\mathbf{U}_0 + \mathbf{w}) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{w}\rangle_V - \langle \mathbf{g}, \mathbf{w}\rangle_{W^{\frac12,2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)}\\ &\le \Phi(\mathbf{U}_0 + \boldsymbol{\varphi}) - \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}\rangle_V - \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi}\rangle_{W^{\frac12,2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)} \end{aligned}$$

pro každé $\boldsymbol{\varphi} \in V$. Funkce $\mathbf{w}$ je tedy minimizér a následně díky Větě 3.7.2 $\mathbf{u} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{w}$ je slabé řešení. □

3.8 Nelineární verze Laxovy–Milgramovy věty

Uvažujme obecnější nelineární diferenciální rovnici 2. řádu s pravou stranou $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(x, u(x), \nabla u(x))) + a_0(x, u(x), \nabla u(x)) = f(x) \quad &\text{v } \Omega\\ u = u_0 \quad &\text{na } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.120}$$

Rovnici lze například získat z rovnováhy energie v klidu, kdy rychlost je nulová, vyjádřenou vztahem

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{q} + r = 0, \tag{3.121}$$

kde $\boldsymbol{q} = (q_1, \dots, q_d)$ reprezentuje tok tepla a r je zdroj tepla. Připouštíme zcela obecnou závislost q_i a r na poloze $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, teplotě u a jejím gradientu, tzn.

$$\begin{aligned} q_i(x) &= a_i(x, u(x), \nabla u(x)), \qquad i = 1, 2, \dots, d,\\ r(x) &= a_0(x, u(x), \nabla u(x)). \end{aligned}$$

Dosazením těchto konstitutivních vztahů do (3.121) získáme (3.120) s pravou stranou $f = 0$. Předpokládejme:

Pro $i = 0, 1, \dots, d$ jsou funkce $a_i : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$
Carathéodoryho funkce, tzn.

- pro všechna $z \in \mathbb{R}$ a $\vec{p} \in \mathbb{R}^d$ jsou $a_i(\cdot, z, \vec{p})$ měřitelné v Ω,
- pro s.v. $x \in \Omega$ jsou $a_i(x, \cdot, \cdot)$ spojité v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. (A1)

a

Existují $C_i > 0, i = 0, 1, \dots, d,$ tak, že pro s.v $x \in \Omega$
a pro všechna $x \in \mathbb{R}, \vec{p} \in \mathbb{R}^d$ je $|a_i(x, z, p)| \le C_i(1 + |z| + |\vec{p}|)$. (A2)

Zatímco předpoklad (A1) je dostatečně obecný, předpoklad (A2) výrazně omezil uvažovanou třídu nelinearit: všechny mají tzv. lineární růsty jak v u tak v ∇u. Předpoklad (A2) tak připouští nelineární funkce, ty však mají stejné růsty jako operátory studované v předchozím sekcích. Snadno si však čtenář vymyslí nelinearity s polynomiálními, logaritmickými, exponenciálními růsty.

Definice 3.8.1 — Slabé řešení úlohy (3.120). Řekneme, že $u \in W^{1,2}(\Omega)$ je slabé řešení úlohy (3.120), jestliže

- $u - U_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$
- $$\int_\Omega \left(a_i(x, u, \nabla u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_0(x, u, \nabla u)\varphi \right) \mathrm{d}x = \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{3.122}$$

Předpokládáme, že (A1) a (A2) platí a $f \in L^2(\Omega)$.

Cvičení 3.8.2. Ukažte, že za předpokladů (A1) a (A2) je

$$\int_\Omega \left[a_i(x, u, \nabla u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_0(x, u, \nabla u)\varphi \right] \mathrm{d}x < \infty \quad \text{pokud } u, \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Nyní je přirozeně zavést (nelineární!) $\widetilde{T} : W_0^{1,2}(\Omega) \to (W_0^{1,2}(\Omega))^\star$ předpisem

$$\langle \widetilde{T}u, \varphi \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \int_\Omega \left[a_i(\cdot, u, \nabla u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_0(\cdot, u, \nabla u)\varphi \right] \mathrm{d}x. \tag{3.123}$$

Ze Cvičení 3.8.2 plyne, že $\widetilde{T} : W_0^{1,2}(\Omega) \to \left(W_0^{1,2}(\Omega \right)^\star$ je omezený.

Nyní zformulujeme nelineární variantu Laxovy–Milgramovy věty.

Věta 3.8.3 Buď X Hilbertův a $T : X \to X$ je lipschitzovsky spojitý, tzn.

$$(\exists M > 0)(\forall u, v \in X) \quad \|Tu - Tv\|_X \le M \|u - v\|_X, \tag{3.124}$$

a silně monotónní, tzn.

$$(\exists m > 0)(\forall u, v \in X) \quad (Tu - Tv, u - v)_X \ge m \|u - v\|_X^2. \tag{3.125}$$

Pak pro každé $F \in X$ existuje právě jeden $u \in X$ tak, že

$$Tu = F. \tag{3.126}$$

Důkaz. Všimněme si nejdříve, že

$$m \|u - v\|_X^2 \le (Tu - Tv, u - v)_X \le \|Tu - Tv\|_X \|u - v\|_X \le M \|u - v\|_X^2$$

a tak $m \le M$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $m < M$. (Jinak M zvětšíme.) Pro $\varepsilon > 0$ a $F \in X$ libovolné definujme operátor $A : X \to X$ předpisem

$$Au \equiv u - \varepsilon(Tu - F). \tag{3.127}$$

Ukážeme-li, že A je kontrakce v X, pak důkaz věty plyne z Banachovy věty o pevném bodu. Pro každé $u, v \in X$ však máme

$$\begin{aligned}
\|Au - Av\|_X^2 =& (u - v - \varepsilon(Tu - Tv), u - v - \varepsilon(Tu - Tv))_X \\
=& (u - v, u - v)_X - 2\varepsilon(u - v, Tu - Tv)_X \\
&+ \varepsilon^2 (Tu - tv, Tu - Tv)_X \\
=& \|u - v\|_X^2 - 2\varepsilon(Tu - Tv, u - v)_X + \varepsilon^2 \|Tu - Tv\|_X^2.
\end{aligned}$$

Využijeme-li lipschitzovskosti a silné monotonie T, dostaneme

$$\|Au - Av\|_X^2 \leq (1 - 2\varepsilon m + \varepsilon^2 M^2) \|u - v\|_X^2 .$$

Funkce $g(\varepsilon) := 1 - 2\varepsilon m + \varepsilon^2 M^2$ nabývá minima pro $\varepsilon = \frac{m}{M^2}$ a $g\left(\frac{m}{M^2}\right) = 1 - \frac{m^2}{M^2} < 1$. Zobrazení A je tedy kontraktivní a tvrzení Věty 3.8.3 je dokázáno. ■

Vraťme se k naší úloze (3.120). Větu 3.8.3 nelze využít přímo na operátor $\widetilde{T}$, neboť ten nezobrazuje $W_0^{1,2}(\Omega)$ do sebe. Můžeme však využít Rieszovu větu a k $\widetilde{T} \in \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^\star$ přiřadit $T(u) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tak, že

$$\langle \widetilde{T}u, \varphi \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} = (Tu, \varphi)_{W_0^{1,2}(\Omega)}, \tag{3.128}$$

a

$$\|Tu\|_{1,2} = \|\widetilde{T}u\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))^\star}. \tag{3.129}$$

K tomu, abychom ověřili, že $T : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$ je lipschitzovský a silně monotónní, tedy stačí ukázat, že $\widetilde{T} : W_0^{1,2}(\Omega) \to (W_0^{1,2}(\Omega))^\star$ je lipschitzovský a silně monotónní, tzn.

$$(\exists \tilde{M} > 0)(\forall u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)) \left\|\tilde{T}u - \tilde{T}v\right\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))^\star} \leq \tilde{M} \|u - v\|_{1,2,\Omega} \tag{3.130}$$

a

$$(\exists \tilde{m} > 0)(\forall u, v \in W_0^{1,2}(\Omega))\langle \tilde{T}u - \tilde{T}v, u - v\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} \geq \tilde{m} \|u - v\|_{1,2}^2 . \tag{3.131}$$

Následující lemma dává postačující podmínky, kdy (3.130) a (3.131) platí.

Lemma 3.8.4 (1) Jestliže

$$\frac{\partial a_i}{\partial z} \text{ a } \frac{\partial a_i}{\partial p} \text{ jsou omezené v } \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \text{ pro } i = 0, 1, \dots, d, \tag{A3}$$

pak $\widetilde{T}$ je lipschitzovsky spojitý.
(2) Jestliže platí

$$(\exists \alpha > 0)(\text{s.v. } x \in \Omega) \left(\forall \xi = (\xi_0, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^{d+1}\right)$$
$$\sum_{\substack{i=0\\j=1}}^{d} \left(\frac{\partial a_i}{\partial p_j}\xi_i\xi_j + \frac{\partial a_i}{\partial z}\xi_i\xi_0\right) \geq \alpha|\xi|^2, \tag{A4}$$

pak $\widetilde{T}$ je silně monotónní.

Důkaz. Základem důkazu obou tvrzení je následující identita

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{T}u - \widetilde{T}v, \varphi\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} &= \int_\Omega \Big((a_i(\cdot, u, \nabla u) - a_i(\cdot, v, \nabla v)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\
&\quad + \big(a_0(\cdot, u, \nabla u) - a_0(\cdot, v, \nabla v)\big)\varphi \Big) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \left[\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} a_i(\cdot, v + s(u - v), \nabla v + s\nabla(u - v)) \,\mathrm{d}s \,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right.\\
&\quad \left. + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} a_0(\cdot, v + s(u - v), \nabla v + s\nabla(u - v)) \,\mathrm{d}s \,\varphi \right] \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \left[\int_0^1 \frac{\partial a_i}{\partial Z}(\dots)(u - v) \,\mathrm{d}s \,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right.\\
&\quad \left. + \int_0^1 \frac{\partial a_i}{\partial p_l}(\dots) \frac{\partial (u_l - v)}{\partial x_l} \,\mathrm{d}s \,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right] \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega \varphi \int_0^1 \left[\frac{\partial a_0}{\partial z}(\dots)(u - v) + \frac{\partial a_0}{\partial p_l}(\dots) \frac{\partial (u - v)}{\partial x_l} \right] \mathrm{d}s \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Zbytek důkazu je ponechán čtenáři. ■

Věta 3.8.5 — Existence, jednoznačnost a spojitá závislost na datech. Nechť $f \in (W_0^{1,2}(\Omega))^\star$ a rozšíření U_0 hraniční podmínky u_0 splňuje

$$U_0 \in W^{1,2}(\Omega) \text{ a stopa } U_0 = u_0.$$

Nechť koeficienty $a_i : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ splňují (A1) — (A4). Pak existuje právě jedno slabé řešení $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ úlohy (3.120), které splňuje (3.122). Navíc existuje $C > 0$ tak, že

$$\|u\|_{1,2} \le C\left[\|f\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))^\star} + \|U_0\|_{1,2,\Omega} + 1\right]. \tag{3.132}$$

Důkaz. Nejdříve zavedeme operátor $\widetilde{T} : W^{1,2}(\Omega) \to (W_0^{1,2}(\Omega))^\star$ vztahem (3.123). Cílem je ukázat existenci $u \in W^{1,2}(\Omega)$ tak, že

$$\begin{aligned} u - U_0 &\in W_0^{1,2}(\Omega) \\ \langle \widetilde{T}(u), \varphi\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} &= \langle f, \varphi\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \end{aligned} \tag{3.133}$$

Hledejme u ve tvaru $u = U_0 + w$, kde $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Definujme operátor $\widetilde{S} : W_0^{1,2}(\Omega) \to (W_0^{1,2}(\Omega))^\star$ předpisem

$$\widetilde{S}w = \widetilde{T}(U_0 + w).$$

Ztotožníme-li $\widetilde{S}$ s operátorem S: $W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$ a s $f \in (W^{1,2}(\Omega))^\star$ pomocí Rieszovy věty (viz (3.128)–(3.129)) a užijeme-li Lemma 3.8.4 a Větu 3.8.3, dostáváme existenci a jednoznačnost řešení úlohy

$$Sw = g \quad \text{v } (W^{1,2}(\Omega))^\star,$$

což dává tvrzení. Abychom dokázali (3.132), bereme nejdříve v (3.133) za $\varphi = u - U_0$ a pak k této rovnici přičteme $-\langle \widetilde{T}(U_0), u - U_0\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}$. Dostaneme

$$\langle \widetilde{T}(u) - \widetilde{T}(U_0), u - U_0\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \langle f, u - U_0\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} - \langle \widetilde{T}(U_0), u - U_0\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

S využitím silné monotónie $\widetilde{T}$ a lineárního růstu $a_i, i = 0, \dots, d$, dostaneme

$$\|u - U_0\|_{1,2}^2 \le C\left[\|f\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))^\star} + \|U_0\|_{1,2} + 1\right]\|u - U_0\|_{1,2}.$$

Protože $u = u - U_0 + U_0$, (3.132) je dokázáno. ■

Příklad 3.8.6. Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} -\Delta u + (\operatorname{arctg} u + \pi)u &= f \qquad \text{v } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.134}$$

Ukažme, že pro libovolné $f \in W^{-1,2}(\Omega)$ existuje právě jedno slabé řešení úlohy (3.134). Zřejmě má funkce $a_0 := (\operatorname{arctg} u + \pi)u$ lineární růst, stačí tedy ověřit předpoklady Lemmatu 3.8.4. Pokud označíme $a_i := \frac{\partial u}{\partial x_i}$, jsou zřejmě splněny podmínky z první části lemmatu a stačí ověřit, že $\frac{\mathrm{d}a_0}{\mathrm{d}u} \ge \alpha_0 > 0$. Počítejme

$$\frac{\mathrm{d}a_0}{\mathrm{d}u} = \operatorname{arctg} u + \pi + \frac{u}{u^2+1} \ge \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} > 1,$$

tedy všechny potřebné předpoklady jsou splněny a úloha (3.134) má pro libovolnou pravou stranu $f \in (W^{1,2}(\Omega))^\star$ právě jedno řešení.

Kapitola 4

Nonlinear elliptic equations of second order

In this chapter we shall present several techniques which can be used to solve nonlinear problems.

4.1 Application of the theory of monotone operators

We consider a similar problem as in the previous section, hence we look for a function $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ solving the problem

$$
\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, u(x), \nabla u(x)) + a_0(x, u(x), \nabla u(x)) &= f(x) \qquad \text{in } \Omega, \\
u &= u_0 \qquad \text{on } \partial\Omega,
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, functions $a_i\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ are Carathéodory, similarly as in the previous section, thus for any $z \in \mathbb{R}$ and $\vec{p} \in \mathbb{R}^d$ are the functions $a_i(\cdot, z, \vec{p})$ measurable on Ω and for a.e. $x \in \Omega$ the functions $a_i(x, \cdot, \cdot)$ are continuous in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $i = 0, 1, \dots, d$, and

$$
|a_i(x, z, \vec{p})| \le C_i(|z|^{r-1} + |\vec{p}|^{r-1}) + h_i(x), \qquad i = 0, 1, \dots, d,
\tag{4.2}
$$

where $h_i \in L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)$, $1 < r < \infty$.

Recall that due to Theorem A.3.41 we know that the mappings

$$
u \mapsto a_i(x, u, \nabla u), \qquad i = 0, 1, \dots, d
$$

are continuous from $W^{1,r}(\Omega)$ to $L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)$, $1 < r < \infty$. We further assume that the following two conditions are fulfilled. First, let the coercivity condition hold:

$$
\sum_{i=1}^{d} a_i(x, z, \vec{p}) p_i + a_0(x, z, \vec{p}) z \ge C_1 |\vec{p}|^r + C_2(x)|z|^r - C_3(x),
\tag{4.3}
$$

where $C_1 > 0$, $C_2(x) \ge 0$ a $C_3 \in L^1(\Omega)$, and second, let the monotonicity condition hold:

$$
\sum_{i=1}^{d} \Big(a_i(x, z^1, \vec{p}^1) - a_i(x, z^2, \vec{p}^2) \Big) (p_i^1 - p_i^2) + \Big(a_0(x, z^1, \vec{p}^1) - a_0(x, z^2, \vec{p}^2)(z^1 - z^2) \ge 0
\tag{4.4}
$$

for arbitrary z^1, $z^2 \in \mathbb{R}$ and arbitrary $\vec{p}^1$, $\vec{p}^2 \in \mathbb{R}^d$; the latter will be in some situations replaced by the strict monotonicity condition

$$
\sum_{i=1}^{d} \Big(a_i(x, z^1, \vec{p}^1) - a_i(x, z^2, \vec{p}^2) \Big) (p_i^1 - p_i^2) + \Big(a_0(x, z^1, \vec{p}^1) - a_0(x, z^2, \vec{p}^2)(z^1 - z^2) > 0
\tag{4.5}
$$

for all z^1, $z^2 \in \mathbb{R}$ and all $\vec{p}^1$, $\vec{p}^2 \in \mathbb{R}^d$ such that $(z^1, \vec{p}^1) \ne (z^2, \vec{p}^2)$.

The definition of a weak weak solution is similar to the case of the nonlinear version of the Lax–Milgram lemma

Definition 4.1.1 — Weak solution for problems with a monotone operator. A function $u \in W^{1,r}(\Omega)$ is called a weak solution to (4.1), if $u - U_0 \in W_0^{1,r}(\Omega)$, $U_0 \in W^{1,r}(\Omega)$, the trace of U_0 is u_0 on $\partial\Omega$, and the following identity holds

$$
\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{d} a_i(x, u, \nabla u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_0(x, u, \nabla u)\varphi \Big) \,\mathrm{d}x = \langle f, \varphi \rangle_{W_0^{1,r}(\Omega)}
\tag{4.6}
$$

for any $\varphi \in W_0^{1,r}(\Omega)$.

Note that all integrals in the weak formulation of (4.6) are due to our assumptions finite. We look for the solution in the form $u = v + U_0$. We define the operator T: $W_0^{1,r}(\Omega) \to (W_0^{1,r}(\Omega))^* =: W^{-1,r'}(\Omega)$ as follows:

$$\begin{aligned} &\langle T(v),\varphi\rangle_{W_0^{1,r}(\Omega)} \\ &:= \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^d a_i(x, v+U_0, \nabla v + \nabla U_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_0(x, v+U_0, \nabla v + \nabla U_0)\varphi \Big) \,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Then the weak formulation can be rewritten as operator equation

$$T(v) = f \qquad \text{in } W^{-1,r'}(\Omega). \tag{4.8}$$

Assumptions formulated on a_i ensure the following properties of T.

Lemma 4.1.2 Let (4.2)–(4.4) or (4.5) hold. Then
(i) The operator T is continuous from $W_0^{1,r}(\Omega)$ to $W^{-1,r'}(\Omega)$.
(ii) The operator T is coercive, i.e.

$$\lim_{\|v\|_{W^{1,r}(\Omega)} \to \infty} \frac{\langle T(v), v\rangle_{W^{1,r}(\Omega)}}{\|v\|_{W^{1,r}(\Omega)}} = \infty.$$

(iii) The operator T is monotone, i.e. for $v^1, v^2 \in W^{1,r}(\Omega)$, $v^1 - v^2 \in W_0^{1,r}(\Omega)$

$$\langle T(v^1) - T(v^2), v^1 - v^2\rangle_{W_0^{1,r}(\Omega)} \geq 0$$

or strictly monotone, i.e. for $v^1, v^2 \in W^{1,r}(\Omega)$, $v^1 - v^2 \in W_0^{1,r}(\Omega)$, $v^1 \neq v^2$

$$\langle T(v^1) - T(v^2), v^1 - v^2\rangle_{W_0^{1,r}(\Omega)} > 0.$$

Proof. (i) The continuity follows from the Theorem on Nemytskii operator (Theorem A.3.41), due to which the mappings $u \mapsto a_i(x, u, \nabla u)$ are continuous from $W_0^{1,r}(\Omega)$ to $L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)$.
(ii) Let us compute

$$\begin{aligned} \langle T(v), v\rangle_{W_0^{1,r}(\Omega)} &= \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^d a_i(x, v+U_0, \nabla v + \nabla U_0) \frac{\partial (v+U_0)}{\partial x_i} \\ &\qquad + a_0(x, v+U_0, \nabla v + \nabla U_0)(v+U_0) \Big) \,\mathrm{d}x \\ &\quad - \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^d a_i(x, v+U_0, \nabla v + \nabla U_0) \frac{\partial U_0}{\partial x_i} \\ &\qquad + a_0(x, v+U_0, \nabla v + \nabla U_0) U_0 \Big) \,\mathrm{d}x \\ &\geq C_1(\|\nabla(v+U_0)\|_{L^r(\Omega)}^r - 1) - C_2 \|v+U_0\|_{W^{1,r}(\Omega)}^{r-1} \|U_0\|_{W^{1,r}(\Omega)} \\ &\geq C\|\nabla(v+U_0)\|_{L^r(\Omega)}^r - C, \end{aligned}$$

which yields claim (ii).
(iii) Finally, due to the fact that $v^1 - v^2 = (v^1 + U_0) - (v^2 + U_0)$, the monotonicity (the strict monotonicity) follows directly from property (4.3). ■

We will also need one corollary of the Brouwer Fixed Point Theorem proved later:

Theorem 4.1.3 — Brouwer Fixed Point Theorem. Let $\vec{u}$: $\overline{B_R(0)} \to \overline{B_R(0)} \subset \mathbb{R}^N$ be a continuous mapping, $N \geq 1$. Then there exists at least one fixed point of the mapping $\vec{u}$ in $\overline{B_R(0)}$, i.e. there exists $\vec{x} \in \overline{B_R(0)}$ such that $\vec{u}(\vec{x}) = \vec{x}$.

The proof will be given later, in Section 4.5.
We in fact need its corollary

Corollary 4.1.4 (Variant of the Brouwer theorem). Let $\vec{g}$: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ be continuous. Assume there exists $R > 0$ such that

$$(\vec{g}(\vec{v}), \vec{v})_{\mathbb{R}^N} \geq 0$$

for all $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$, $|\vec{v}| = R$. Then there exists at least one $\vec{z} \in \overline{B_R(0)}$ such that $\vec{g}(\vec{z}) = \vec{0}$.

Proof. Assume that such $\vec{z}$ does not exist, hence

$$\vec{g}(\vec{x}) \neq \vec{0} \qquad \forall \vec{x} \in \overline{B_R(0)}.$$

Denote

$$\vec{F}(\vec{z}) = -R\frac{\vec{g}(\vec{x})}{|\vec{g}(\vec{x})|}.$$

Then $\vec{F}$ is a continuous mapping which maps $\overline{B_R(0)}$ into itself. Due to the Brouwer fixed point theorem (Theorem 4.1.3) there exists $\vec{x}_1 \in \overline{B_R(0)}$, a fixed point of the mapping $\vec{F}$. Then

$$\vec{z}_1 = -R\frac{\vec{g}(\vec{x}_1)}{|\vec{g}(\vec{x}_1)|}.$$

Hence $|\vec{x}_1| = R$, and

$$0 \le (\vec{g}(\vec{x}_1), \vec{x}_1)_{\mathbb{R}^N} = \Big(\vec{g}(\vec{x}_1), -R\frac{\vec{g}(\vec{x}_1)}{|\vec{g}(\vec{x}_1)|}\Big)_{\mathbb{R}^N} = -R|\vec{g}(\vec{x}_1)| < 0$$

which yields a contradiction. ■

We can now formulate and prove the main result from this section.

Theorem 4.1.5 — Existence result for the problem with monotone operator. Assume that the Carathéodory functions $\{a_i\}_{i=0}^d$ fulfil (4.2)–(4.4), where $1 < r < \infty$. Let $f \in W^{-1,r'}(\Omega)$, $U_0 \in W^{1,r}(\Omega)$, where the trace $U_0 = u_0$ on $\partial\Omega$. Then there exists a weak solution to (4.1) in the sense of Definition 4.1.1. If the condition of strict monotonicity (4.5) holds, the solution is unique.

Proof. Let the operator T be as above. We look for a solution to the problem

$$T(v) = f \qquad \text{ve } W^{-1,r'}(\Omega).$$

Let $\{h_i\}$, $i \in \mathbb{N}$ be a countable dense subset of $W_0^{1,r}(\Omega)$ and we denote by V_n the linear hull of the first n such functions. We define

$$A\colon (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^n a_i h_i := v_n \in V_n.$$

Furthermore, denote (recall that for a fixed n our space V_n is finite dimensional and thus all norms are equivalent)

$$\|\vec{a}\|_{\mathbb{R}^n} = \|v_n\|_{W^{1,r}(\Omega)} = \|Aa\|_{W^{1,r}(\Omega)}.$$

We also define $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ by

$$\vec{g}(\vec{a}) = \{\langle T(A\vec{a}) - f, h_i\rangle_{W_0^{1,r}(\Omega)}\}_{i=1}^n.$$

As the operator T is continuous (a weaker notion of continuity would be enough at this moment), the mapping $\vec{g}$ is also continuous. Moreover, the mapping T is coercive, therefore

$$\begin{aligned}(g(\vec{a}), \vec{a})_{\mathbb{R}^n} &= \langle T(v_n), v_n\rangle_{W_0^{1,r}(\Omega)} - \langle f, v_n\rangle_{W_0^{1,r}(\Omega)} \\ &\ge \Big(\frac{\langle T(v_n), v_n\rangle_{W_0^{1,r}(\Omega)}}{\|v_n\|_{W^{1,r}(\Omega)}} - \|f\|_{W^{-1,r'}(\Omega)}\Big)\|v_n\|_{W^{1,r}(\Omega)} \ge 0,\end{aligned}$$

if $\|v_n\|_{W^{1,r}(\Omega)} \ge R$ for a sufficiently large R (independent of n!). Therefore due to Corollary 4.1.4 for any $n \in \mathbb{N}$ there exists at least one $\vec{a}^n \in \mathbb{R}^n$ such that

$$\vec{g}(\vec{a}^n) = \vec{0},$$

hence

$$\langle T(A\vec{a}^n) - f, h\rangle_{W_0^{1,r}(\Omega)} = 0, \qquad h \in LIN\{h_i\}_{i=1}^n$$

and moreover, for $v^n := \sum_{i=1}^n a_i^n h_i$ the estimate $\|v^n\|_{W^{1,r}(\Omega)} \le R$ holds for R independent of n.

Therefore due to Theorem B.2.7 we know that there exists $v \in W_0^{1,r}(\Omega)$ and a subsequence $\{v^{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{v^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ such that

$$v^{n_k} \rightharpoonup v \qquad \text{in } W^{1,r}(\Omega).$$

Moreover, as $T(v^n)$ is a bounded sequence in $W^{-1,r'}(\Omega)$ and $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ is a dense subset of $W^{1,r}(\Omega)$, we also have

$$T(v^{n_k}) \overset{*}{\rightharpoonup} f$$

in $W^{-1,r'}(\Omega)$ (and due to the reflexivity the sequence converges also weakly). Furthermore,

$$\lim_{k\to\infty} \langle T(v^{n_k}), v^{n_k}\rangle_{W_0^{1,r}(\Omega)} = \lim_{k\to\infty} \langle f, v^{n_k}\rangle_{W_0^{1,r}(\Omega)} = \langle f, v\rangle_{W_0^{1,r}(\Omega)}. \tag{4.9}$$

Using the monotonicity of T, we have for arbitrary $\varphi \in W_0^{1,r}(\Omega)$

$$\langle T(v^{n_k}) - T(\varphi), v^{n_k} - \varphi \rangle_{W_0^{1,r}(\Omega)} \geq 0. \tag{4.10}$$

By virtue of (4.9) and letting $k \to \infty$ v (4.10) we get

$$\langle f - T(\varphi), v - \varphi \rangle_{W_0^{1,r}(\Omega)} \geq 0 \qquad \text{for any } \varphi \in W_0^{1,r}(\Omega). \tag{4.11}$$

We now perform Minty's trick. We set $\varphi := v - \lambda w$ in inequality (4.11), where $w \in W_0^{1,r}(\Omega)$ is arbitrary and $\lambda > 0$. This yields

$$\langle f - T(v - \lambda w), \lambda w \rangle_{W_0^{1,r}(\Omega)} \geq 0 \qquad \text{for any } w \in W_0^{1,r}(\Omega). \tag{4.12}$$

Dividing (4.12) by λ, we have

$$\langle f - T(v - \lambda w), w \rangle_{W_0^{1,r}(\Omega)} \geq 0 \qquad \text{for any } w \in W_0^{1,r}(\Omega). \tag{4.13}$$

Due to the continuity of T, letting $\lambda \to 0_+$, we have

$$\langle f - T(v), w \rangle_{W_0^{1,r}(\Omega)} \geq 0 \qquad \text{for any } w \in W_0^{1,r}(\Omega). \tag{4.14}$$

Finally, it is enough to recall that (4.14) holds for arbitrary $w \in W_0^{1,r}(\Omega)$ (and thus also for $-w$). We get equality

$$\langle f - T(v), w \rangle_{W_0^{1,r}(\Omega)} = 0 \qquad \text{for any } w \in W_0^{1,r}(\Omega) \tag{4.15}$$

and thus $u := v + U_0$ is a weak solution to our problem.

Assuming additionally the strict monotonicity condition (4.5) (hence the operator T is strictly monotone, see Lemma (4.1.2), item (iii)), we can show the uniqueness. Assume that u^1 and u^2 are two different solutions to our problem. As $u^1 - u^2 \in W_0^{1,r}(\Omega)$, we have

$$0 < \langle T(u^1) - T(u^2), u^1 - u^2 \rangle_{W_0^{1,r}(\Omega)} = \langle f - f, u^1 - u^2 \rangle_{W_0^{1,r}(\Omega)} = 0,$$

which yields a contradiction. Therefore $u^1 = u^2$. ■

Example 4.1.6. Consider problem (4.1), where

$$\begin{aligned} a_i(x, u, \nabla u) &= |\nabla u|^{r-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, \dots d, \\ a_0(x, u, \nabla u) &= |u|^{r-2} u. \end{aligned}$$

The coercivity condition (4.3) and the growth condition (4.2) are indeed fulfilled. Let us verify that the strict monotonicity condition (4.5) holds. We compute

$$\begin{aligned} &\big(|\nabla u^1|^{r-2}\nabla u^1 - |\nabla u^2|^{r-2}\nabla u^2\big) \cdot (\nabla u^1 - \nabla u^2) + \big(|u^1|^{r-2}u^1 - |u^2|^{r-2}u^2\big)(u^1 - u^2) \\ &\quad = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(|\nabla(u^2 + t(u^1 - u^2))|^{r-2}\nabla(u^2 + t(u^1 - u^2))\Big)\,\mathrm{d}t \cdot \nabla(u^1 - u^2) \\ &\qquad + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(|u^2 + t(u^1 - u^2)|^{r-2}(u^2 + t(u^1 - u^2))\Big)\,\mathrm{d}t(u^1 - u^2) \\ &\quad = (r-1)\int_0^1 \nabla(u^2 + t(u^1 - u^2))|^{r-2}\,\mathrm{d}t|\nabla(u^1 - u^2)|^2 \\ &\qquad + (r-1)\int_0^1 |u^2 + t(u^1 - u^2)|^{r-2}\,\mathrm{d}t|u^1 - u^2|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

and even, for $u^1 \neq u^2$, the inequality is sharp. Therefore the strict monotonicity condition (4.5) holds and thus for any $f \in W^{-1,r'}(\Omega)$ and any $u_0 \in W^{1-\frac{1}{r},r}(\Omega)$ there exists unique weak solution to

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(|\nabla u|^{r-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) + \sum_{i=1}^d |u|^{r-2}u &= f \qquad \text{in } \Omega \\ u &= u_0 \qquad \text{on } \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.16}$$

in the sense of Definition 4.1.1.

4.2 Compact perturbations

The aim of this section is to show that some nonlinear problems can be solved using the compact embedding theorems together with the compactness of the trace operator. We will demonstrate this on the following example. We consider

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + f(u) = F \qquad & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n_{\mathbb{A}}} + g(u) = G \qquad & \text{on } \Gamma_1 \\ u = 0 \qquad & \text{on } \Gamma_2, \end{aligned} \tag{4.17}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\Omega \in C^{0,1}$, $\frac{\partial u}{\partial n_{\mathbb{A}}} = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i} n_i$ is the derivative with respect to the conormal, $\vec{n}$ is the outer normal to $\partial\Omega$, and $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup M$, where $|M|_{d-1} = 0$ and Γ_1, Γ_2 are open subsets of $\partial\Omega$.

We will assume the following

$$\begin{gathered} a_{ij} \in L^\infty(\Omega),\ i,j = 1,2,\dots,d \\ \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \alpha_0|\xi|^2,\ \alpha_0 > 0, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^r, \text{ arbitrary} \\ \int_\Omega f(v)v \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} g(v)v \,\mathrm{d}S \ge 0, \forall v \in V = \{u \in W^{1,2}(\Omega); Tu = 0 \text{ on } \Gamma_2\} \\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ is continuous }, |f(v)| \le C(1+|v|^p), 1 \le p \le \frac{d+2}{d-2}\,(p<\infty \text{ if } d=2) \\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ is continuous }, |g(v)| \le C(1+|v|^q), 1 \le q \le \frac{d}{d-2}\,(q<\infty \text{ if } d=2) \\ F \in V^*, G \in W^{-\frac12,2}(\Gamma_1) = \big(W^{\frac12,2}(\Gamma_1)\big)^*. \end{gathered} \tag{4.18}$$

We aim at proving the following result.

Theorem 4.2.1 Under the assumptions (4.18) there exists a weak solution to (4.17), i.e. a function $u \in V$ such that

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + f(u)\varphi\Big)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} g(u)\varphi \,\mathrm{d}S = \langle F,\varphi\rangle_V + \langle G,\varphi\rangle_{W^{\frac12,2}(\Gamma_1)}$$

for all $\varphi \in V$.

Proof. Before starting, note that all terms in the weak formulation in Theorem 4.2.1 are finite. We proceed very similarly as in the proof of the main result from the previous section, i.e. for the monotone operator case. We only modify the arguments in order to pass to the limit from the Galerkin approximation to the continuous one.

Step 1: Approximation. We take $\{w_i\}_{i=1}^\infty$ a dense subset of V. Note that we may take in particular such functions that $w_i \in C^\infty(\overline{\Omega})$ and $w_i = 0$ on Γ_2 for all $i \in \mathbb{N}$. Let us fix $n \in \mathbb{N}$ and look for

$$u^n(x) := \sum_{i=1}^{n} c_i^n w_i(x)$$

such that

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial u^n}{\partial x_j}\frac{\partial w_k}{\partial x_i} + f(u^n)w_k\Big)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} g(u^n)w_k \,\mathrm{d}S \\ = \langle F, w_k\rangle_V + \langle G, w_k\rangle_{W^{\frac12,2}(\Gamma_1)}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

$k = 1,2,\dots,n$.

Step 2: Existence of a solution for the approximation. We use as before Corollary 4.1.4 (corollary of the Brouwer fixed point theorem). We consider the mapping Φ:

$$\begin{aligned} \{d_i\}_{i=1}^n \mapsto \Big\{ \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial(\sum_{l=1}^n d_l w_l)}{\partial x_j}\frac{\partial w_k}{\partial x_i} + f\Big(\sum_{l=1}^{n} d_l w_l\Big)w_k\Big)\,\mathrm{d}x \\ + \int_{\Gamma_1} g\Big(\sum_{l=1}^{n} d_l w_l\Big) w_k \,\mathrm{d}S - \langle F, w_k\rangle_V - \langle G, w_k\rangle_{W^{\frac12,2}(\Gamma_1)}\Big\}_{k=1}^{n}. \end{aligned}$$

Indeed, the mapping $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is continuous. Moreover (we multiply the k-th equation by d_k and sum up, for $k=1$ to n)

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial\big(\sum_{l=1}^n d_l w_l\big)}{\partial x_j} \frac{\partial\big(\sum_{l=1}^n d_l w_l\big)}{\partial x_i} + f\Big(\sum_{l=1}^n d_l w_l\Big) \sum_{l=1}^n d_l w_l \Big)\,\mathrm{d}x$$
$$+ \int_{\Gamma_1} g\Big(\sum_{l=1}^n d_l w_l\Big) \sum_{l=1}^n d_l w_l \,\mathrm{d}S - \Big\langle F, \sum_{l=1}^n d_l w_l \Big\rangle_V - \Big\langle G, \sum_{l=1}^n d_l w_l \Big\rangle_{W^{\frac12,2}(\Gamma_1)}$$
$$\geq \alpha_0 \int_\Omega \Big|\nabla(\sum_{l=1}^n d_l w_l)\Big|^2 \,\mathrm{d}x - \Big\langle F, \sum_{l=1}^n d_l w_l \Big\rangle_V - \Big\langle G, \sum_{l=1}^n d_l w_l \Big\rangle_{W^{\frac12,2}(\Gamma_1)} \geq 0$$

provided $\| \sum_{l=1}^n d_l w_l \|_{L^2(\Omega)} \geq \widetilde{R}$, where $\widetilde{R}$ depends on α_0, F, G, but in particular, is independent of n. Due to the Poincaré–Friedrichs inequality there exists $R>0$ such that if

$$\Big\| \sum_{l=1}^n d_l w_l \Big\|_{W^{1,2}(\Omega)} \geq R \Longrightarrow \big(\Phi(\vec{d}), \vec{d}\big)_{\mathbb{R}^n} \geq 0.$$

Hence using the corollary of the Brouwer fixed point theorem (Corollary 4.1.4) there exists $\{c_i^n\}_{i=1}^n$ such that

$$\Phi(\vec{c}^{\,n}) = \vec{0}.$$

Moreover, for $u^n := \sum_{i=1}^n c_i^n w_i$ we have

$$\|u^n\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq R,$$

where R is independent of n.
Step 3: Limit passage. We consider the limit $n \to \infty$. As $W^{1,2}(\Omega)$ is a Hilbert space, there exists $\{u^{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{u_n\}_{n=1}^\infty$ such that

$$u^{n_k} \rightharpoonup u \qquad \text{in } W^{1,2}(\Omega),$$

where the limit function $u \in V$. Moreover, for another subsequence (however, we do not relabel it)

$$u^{n_k} \to u \qquad \text{in } L^{\tilde p}(\Omega), 1 \leq \tilde p < \frac{2d}{d-2} \quad \text{(compact embedding)},$$
$$u^{n_k} \to u \qquad \text{in } L^{\tilde q}(\partial\Omega), 1 \leq \tilde q < \frac{2d-2}{d-2} \quad \text{(compactness of the trace operator)}.$$

We now easily have for $k \to \infty$ (the weak convergence suffices here)

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u^{n_k}}{\partial x_j} \frac{\partial w_l}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial w_l}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x$$

for any $l \in \mathbb{N}$. Next, we want to show that as $k \to \infty$,

$$\int_\Omega f(u^{n_k}) w_l \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega f(u) w_l \,\mathrm{d}x$$

for any $l \in \mathbb{N}$. To this aim, we apply the Vitali's convergence theorem. Recall that for a suitable subsequence (we do not relabel it) we have

$$u^{n_k} \to u \quad \text{a.e. in } \Omega,$$

hence

$$f(u^{n_k}) \to f(u) \text{ a.e. in } \Omega$$

due to the continuity of f. As the functions w_l are bounded for any $l \in \mathbb{N}$ and the growth of f is subcritical, we know that due to the Hölder inequality

$$\Big| \int_E f(u^{n_k}) w_l \,\mathrm{d}x \Big|$$

are uniformly small provided the measure of E is sufficiently small.

More or less similarly we may show that for $k \to \infty$

$$\int_{\Gamma_1} g(u^{n_k}) w_l \,\mathrm{d}S \to \int_{\Gamma_1} g(u) w_l \,\mathrm{d}S$$

for any $l \in \mathbb{N}$. Hence we have

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial w_l}{\partial x_i} + f(u) w_l \Big)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} g(u) w_l \,\mathrm{d}S = \langle F, w_l \rangle_V + \langle G, w_l \rangle_{W^{\frac12,2}(\Gamma_1)} \tag{4.20}$$

for any $l \in \mathbb{N}$ and therefore, for any test function φ from the linear hull of $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Step 4: Closure of the test function. Using that for arbitrary $v \in V$ there exists $v^n \to v$ in $W^{1,2}(\Omega)$, where v^n belongs to the linear hull of $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$, we easily verify that the weak formulation (4.20) holds for any test function $v \in V$. Theorem 4.2.1 is proved. ■

Remark 4.2.2. (i) It is not difficult to see that if we relax condition on the test function in the weak formulation, i.e. we require that the test functions are continuously differentiable functions in $\overline{\Omega}$ which are equal to zero on Γ_2, then we may relax the conditions on f and g in (4.18). More precisely, we may assume that

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ is continuous }, |f(v)| \le C(1 + |v|^p), 1 \le p < \frac{2d}{d-2} \ (p < \infty \text{ if } d = 2)$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ is continuous }, |g(v)| \le C(1 + |v|^q), 1 \le q < \frac{2d-2}{d-2} \ (q < \infty \text{ if } d = 2).$$

(ii) Assumptions (4.18) for f and g are fulfilled e.g. if $f(v) = \widetilde{f}(v)v$, where $\widetilde{f} \ge 0$ satisfies the growth condition above for $p \le \frac{4}{d-2}$ and $g(v) = \widetilde{g}(v)v$, where $\widetilde{g} \ge 0$ satisfies the growth condition above for $q \le \frac{2}{d-2}$. As in part (i), this condition can be further relaxed if we require smoother test functions.

4.3 Methods based on fixed point theorems

We plan to use the following fixed point theorem. All Banach spaces are assumed real.

Theorem 4.3.1 — Banach Fixed Point Theorem. Let $T\colon X \to X$, where X is a complete (metric or normed) space, such that

$$\varrho(T(u_1), T(u_2))_X \le \alpha \varrho(u_1, u_2)_X$$

for the metric space, or

$$\|T(u_1) - T(u_2)\|_X \le \alpha \|u_1 - u_2\|_X$$

for the Banach space, where $\alpha \in [0, 1)$. Then there exists a unique fixed point u_0 of T in X.

Theorem 4.3.2 — Brouwer Fixed Point Theorem. Let $T\colon B \subset \mathbb{R}^n \to B$ be continuous, where B is a convex, closed and bounded set. Then there exists a (generally non-unique) fixed point of T in B.

Theorem 4.3.3 — Schauder Fixed Point Theorem. Let $T\colon K \subset X \to K$ be continuous, where K is compact and convex and X is a Banach space. Then there exists a fixed point of T in K.

Theorem 4.3.4 — Schaeffer or a version of the Schauder Fixed Point Theorem. Let $T\colon X \to X$ be continuous and compact, X Banach space, and let the set

$$\{u \in X; u = \lambda T(u) \quad \text{for some } 0 \le \lambda \le 1\}$$

be bounded. Then there exists a fixed point of T in X.

We start with an application of Theorem 4.3.1. Note that the theorem is classical and its proof can be found in almost every advanced textbook on mathematical analysis.

4.3.1 Application of the Banach fixed point theorem

We already used this theorem in the proof of the nonlinear version of the Lax–Milgram theorem (see Theorem 3.8.3). Another typical application are local existence theorems for nonlinear problems (local in time existence of nonlinear problems or global in time existence for small data as well as existence of solutions to nonlinear elliptic problems for data closed to a known solution, typically a zero one). We will consider the latter.

We assume the following problem

$$\begin{aligned} -\Delta u + f(u, \nabla u) &= g \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.21}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is a $C^{1,1}$ domain and $g \in L^2(\Omega)$ is a given function such that $\|g\|_{L^2(\Omega)} \ll 1$. Moreover, we assume that f is a Lipschitz function in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ such that

$$\begin{aligned} f(v, \mathbf{z}) &\le C(|\mathbf{z}|^q + 1)|v|^r \\ |f(v_1, \mathbf{z}) - f(v_2, \mathbf{z})| &\le C|v_1 - v_2|(|\mathbf{z}|^q + 1)(|v_1|^{r-1} + |v_2|^{r-1}) \\ |f(v, \mathbf{z}_1) - f(v, \mathbf{z}_2)| &\le C|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2||v|^r(|\mathbf{z}_1|^{q-1} + |\mathbf{z}_2|^{q-1}), \end{aligned} \tag{4.22}$$

$1 \le q \le 3$, $1 < r < \infty$, for any v, v_1 and $v_2 \in \mathbb{R}$ and $\mathbf{z}$, $\mathbf{z}_1$ and $\mathbf{z}_2 \in \mathbb{R}^3$.

We aim at showing the following

Theorem 4.3.5 There exists a $\delta_0 > 0$ such that if $\|g\|_{L^2(\Omega)} \le \delta_0$, then there exists a unique solution (weak and strong) of (4.21) in the ball

$$B_\delta = \{u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega); \|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \le \delta\}$$

for a suitable $\delta > 0$.

Proof. Take $v \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$, $\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \le \delta$, where $\delta < 1$ will be fixed later. Assume $\delta_0 > 0$ sufficiently small (will be fixed later) and consider a mapping

$$T : W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega) \to W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$$

such that $T(v) = u$, where

$$\begin{aligned} -\Delta u &= g - f(v, \nabla v) \qquad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Since due to our assumptions $g - f(v, \nabla v) \in L^2(\Omega)$, there exists unique $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$, a solution to (4.21), and

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \le C(\|g\|_{L^2(\Omega)} + \|f(v, \nabla v\|_{L^2(\Omega)}) \le C(\|g\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|^\alpha_{W^{2,2}(\Omega)})$$

for some $\alpha > 1$ (here we used that $\delta < 1$). Therefore, in order justify that T maps B_δ into itself, we need to verify that

$$C(\delta_0 + \delta^\alpha) < \delta.$$

Indeed, taking δ sufficiently small so that $C\delta^\alpha < \frac{\delta}{2}$ and then δ_0 small so that $C\delta_0 < \frac{\delta}{2}$ we verify our required property of T.

Furthermore, for v_1, $v_2 \in B_\delta$ we have

$$\begin{aligned} -\Delta(u_1 - u_2) &= f(v_2, \nabla v_2) - f(v_1, \nabla v_1) \\ &= f(v_2, \nabla v_2) - f(v_2, \nabla v_1) + f(v_2, \nabla v_1) - f(v_1, \nabla v_1) \\ u_1 - u_2 &= 0 \qquad \text{on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Using our assumptions we have

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{W^{2,2}(\Omega)} &\le C\|(v_1 - v_2)(|\nabla v_1|^q + 1)(|v_1|^{r-1} + |v_2|^{r-1})\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + C\||\nabla v_1 - \nabla v_2||v_2|^r(|\nabla v_1|^{q-1} + |\nabla v_2|^{q-1})\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le C\delta^\beta\|v_1 - v_2\|_{W^{2,2}(\Omega)} \end{aligned}$$

for some $\beta > 0$. Choosing δ sufficiently small (possibly smaller than in the previous considerations) we may conclude that $C\delta^\beta < 1$, hence T is a contraction in B_δ. The theorem is proved. ∎

Example 4.3.6. We may take e.g. $f = |\nabla u|^2|u|^r$ for some $r > 1$ (even $r = 1$ is enough) so that assumptions (4.22) are verified (for $r = 1$ a slight modification is needed).

Exercise 4.3.7. A following generalization of the Banach Fixed Point Theorem holds:

Theorem 4.3.8 Let X, Y be Banach spaces, X is reflexive and $X \hookrightarrow Y$. Let H be a non-empty, closed, convex and bounded subset of X and let $T\colon H \to H$ be a mapping such that

$$\|T(u) - T(v)\|_Y \le \kappa\|u - v\|_Y$$

for any x, $y \in H$ and $0 \le \kappa < 1$. Then T possesses a fixed point in H.

Prove it!

4.3.2 Application of the Schauder Fixed Point Theorem

First, using the Brouwer Fixed Point Theorem 4.3.2 we show the Schauder Fixed Point Theorem 4.3.3.

Proof. (of Theorem 4.3.2.) Step 1: Choose $\varepsilon > 0$ and $\{u_i\}_{i=1}^{N_\varepsilon} \subset K$ such that

$$\bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B_\varepsilon(u_i) \supset K.$$

This follows due to the fact that K is compact. Denote by K_ε the convex hull of points $\{u_i\}_{i=1}^{N_\varepsilon}$, i.e.

$$K_\varepsilon := \Big\{ \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \lambda_i u_i;\ 0 \le \lambda_1 \le 1, i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon, \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \lambda_i = 1 \Big\}.$$

Since K is convex, we know that $K_\varepsilon \subset K$. Define $P_\varepsilon\colon K \to K_\varepsilon$ as

$$P_\varepsilon(u) := \frac{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \operatorname{dist}\big(u, K \setminus B_\varepsilon(u_i)\big) u_i}{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \operatorname{dist}\big(u, K \setminus B_\varepsilon(u_i)\big)}.$$

As K is covered by the union of the balls, the denominator is non zero for any $u \in K$. Clearly, P_ε is continuous, and for any $u \in K$

$$\|P_\varepsilon(u) - u\|_X \le \frac{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \operatorname{dist}\big(u, K \setminus B_\varepsilon(u_i)\big)\|u_i - u\|_X}{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \operatorname{dist}\big(u, K \setminus B_\varepsilon(u_i)\big)} \le \varepsilon.$$

(Recall that either $\|u_i - u\|_X \le \varepsilon$ or $\operatorname{dist}\big(u, K \setminus B_\varepsilon(u_i)\big) = 0$.)
Step 2: Consider $A_\varepsilon := P_\varepsilon(A(u))$, $u \in K_\varepsilon$. Now K_ε is finite dimensional and homeomorphic to $\mathbb{R}^M$, $M \le N_\varepsilon$. Then the Brouwer Fixed Point Theorem (Theorem 4.3.2) yields existence of at least one $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$ such that

$$A_\varepsilon(u_\varepsilon) = u_\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Step 3: Since K is compact, there exists a sequence $\varepsilon_j \to 0^+$ and $u \in K$ such that $u_{\varepsilon_j} \to u$ in X. Let us show that u is a fixed point of A in K. We have

$$\|u_{\varepsilon_j} - A(u_{\varepsilon_j})\|_X = \|A_{\varepsilon_j}(u_{\varepsilon_j}) - A(u_{\varepsilon_j})\|_X = \|P_{\varepsilon_j}(A(u_{\varepsilon_j})) - A(u_{\varepsilon_j})\|_X \le \varepsilon_j.$$

As A is continuous, $\|u_{\varepsilon_j} - A(u_{\varepsilon_j})\|_X \to \|u - A(u)\|_X$ which is due to the computation above equal to zero. The theorem is proved. ■

Next, we show Theorem 4.3.4.

Proof. (of Theorem 4.3.4.) Step 1: Choose $M > 0$ such that if $u = \lambda A(u)$ for some $0 \le \lambda \le 1$, then $\|u\|_X < M$. Define

$$\widetilde{A}(u) := \begin{cases} A(u), & \text{if } \|A(u)\|_X \le M \\ \dfrac{MA(u)}{\|A(u)\|_X}, & \text{if } \|A(u)\|_X > M. \end{cases}$$

Now, $\widetilde{A}\colon B_M(0) \to B_M(0)$. Define K as convex hull of $\widetilde{A}(B_M(0))$. As A is compact, then also $\widetilde{A}$ is compact. Hence, K is a convex, compact subset of X. Furthermore, $\widetilde{A}$ maps K into K.
Step 2: Let us now show that u is a fixed point of A. If not, then necessarily, $\|A(u)\|_X > M$ and $u = \lambda A(u)$ for $\lambda = \frac{M}{\|A(u)\|_X} \in [0,1)$. Then $\|u\|_X = \|\widetilde{A}(u)\|_X = M$ which contradicts to the choice of M. ■

Exercise 4.3.9. Prove the following easy corollary of the Schaeffer Fixed Point Theorem.

Corollary 4.3.10. Let $K \subset X$ be convex, $0 \in K$ and $A\colon K \to K$ be continuous, compact such that

$$\{u \in K; u = \lambda A(u), 0 \le \lambda \le 1\}$$

is bounded. Then A has a fixed point in K.

Next we consider the following example

$$\begin{aligned} -\Delta u + F(\nabla u) + \mu u &= f \qquad && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{on } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.23}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ is of class $C^{1,1}$, $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ is smooth, globally Lipschitz continuous with linear growth

$$|F(\mathbf{p})| \le C(1 + |\mathbf{p}|) \qquad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^d,\ C > 0. \tag{4.24}$$

We aim at proving the following result

Theorem 4.3.11 Let $f \in L^2(\Omega)$ and $\mu > 0$ be sufficiently large. Then under the assumptions above there exists a unique strong (and weak) solution to (4.23) such that $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$.

Proof. Step 1: We recall that for a given $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$f - F(\nabla u) \in L^2(\Omega).$$

Next we denote by $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$ the unique weak solution to

$$\begin{aligned} -\Delta w + \mu w &= f - F(\nabla u) \qquad && \text{in } \Omega \\ w &= 0 && \text{on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Moreover, we know that $w \in W^{2,2}(\Omega)$ and

$$\|w\|_{2,2} \leq C\|f - F(\nabla u)\|_2 \leq C(1 + \|f\|_2 + \|\nabla u\|_2).$$

Hence we define the operator

$$T : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$$

such that $T(u) = w$. We have

$$\|T(u)\|_{1,2} \leq C(1 + \|f\|_2 + \|u\|_{1,2}).$$

Step 2: We show that T: $W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$ is continuous and compact. Let $u_k \to u$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$. Then

$$\sup_k \|w_k\|_{2,2} < +\infty,$$

where $w_k = T(u_k)$. Thus there exists a subsequence $\{w_{k_j}\}_{j=1}^\infty \subset \{w_k\}_{k=1}^\infty$ and $w \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ such that

$$w_{k_j} \to w \qquad \text{in } W_0^{1,2}(\Omega)$$

(and $w_{k_j} \rightharpoonup w$ in $W^{2,2}(\Omega)$). As

$$\int_\Omega \big(\nabla w_{k_j} \cdot \nabla v + \mu w_{k_j} v\big)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega (f - F(\nabla u_{k_j}))\,\mathrm{d}x,$$

we get letting $j \to \infty$

$$\int_\Omega (\nabla w \cdot \nabla v + \mu v)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega (f - F(\nabla u))\,\mathrm{d}x$$

for all $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. To pass to the limit in the nonlinear term we use again the continuity of F, its linear growth and the Vitali convergence theorem. Hence $w = T(u)$. Due to the uniqueness of the solution in fact the whole sequence $T(u_k) \to T(u)$ in $W^{1,2}(\Omega)$ and T is continuous.

The compactness is immediate. As $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|_{1,2} < +\infty$, we have that $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|T(u_k)\|_{2,2} < +\infty$ and the compact embedding $W^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{1,2}(\Omega)$ that a bounded sequence in $W^{1,2}(\Omega)$ provides a convergent subsequence of $T(u_k)$ in the same space.

Step 3: We have to verify that the set of possible fixed points

$$\{u \in W_0^{1,2}(\Omega); u = \lambda T(u) \quad \text{for some } 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

is bounded provided μ is sufficiently large. Since the case $\lambda = 0$ is trivial, let

$$u = \lambda T(u), \qquad 0 < \lambda \leq 1,$$

i.e. $\frac{u}{\lambda} = T(u)$. Therefore

$$-\Delta u + \mu u = \lambda(f - F(\nabla u)).$$

Multiplying the equality by u and integrating it over Ω we obtain

$$\|\nabla u\|_2^2 + \mu\|u\|_2^2 \leq \lambda \int_\Omega (|f| + |\nabla u| + 1)|u|\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + C(\|u\|_2^2 + 1).$$

Assuming $C \leq \mu$ we get

$$\|u\|_{1,2} \leq C,$$

where the constant depends only on the data of the problem.

Step 4: Schaeffer's Fixed Point Theorem (Theorem 4.3.4) implies the existence of a fixed point of T, i.e. existence of a solution to (4.23) which belongs to $W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$.

Step 5: Uniqueness. Let w_1 and w_2 be two different solutions. Then, denoting $W = w_1 - w_2$, we have

$$\begin{aligned} -\Delta W + \mu W &= F(\nabla w_1) - F(\nabla w_2) \qquad \text{in } \Omega \\ W &= 0 \qquad \text{on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Multiplying the equation by W we get using the Lipschitz continuity of F

$$\begin{aligned} \|\nabla W\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}^2 + \mu\|W\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C\|\nabla W\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}\|W\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{2}\|\nabla W\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}^2 + C_1\|W\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

The uniqueness follows provided $C_1 \leq \mu$. ■

4.4 Introduction to the calculus of variations

4.4.1 Basic ideas

We consider the problem

$$A(u) = 0 \tag{4.25}$$

for a special class of operators A, namely such that A is a "gradient"of a potential, i.e.

$$A(u) = I'[u] = 0. \tag{4.26}$$

It means (at least formally) that a solution to (4.25) is a critical point of the functional I. Under additional assumptions on I we even show that the critical point is a minimum of I. The advantage is that to prove existence of a minimum for certain class of functionals is easier than to prove existence of a solution to a nonlinear equation.

Definition 4.4.1 Let L: $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \Omega \to R$. Then we call L the Lagrangian and we define

$$I[u] := \int_\Omega L(\nabla u(\cdot), u(\cdot), \cdot) \,\mathrm{d}x.$$

We also use the following notation:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{p}, z, x) &:= L(p_1, p_2, \dots, p_d, z, x_1, x_2, \dots, x_d) \\ \nabla_{\mathbf{p}} L &:= \Big(\frac{\partial L}{\partial p_1}, \frac{\partial L}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial L}{\partial p_d}\Big) \\ \nabla_z L &:= \frac{\partial L}{\partial z} \\ \nabla_x L &:= \Big(\frac{\partial L}{\partial x_1}, \frac{\partial L}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_d}\Big). \end{aligned}$$

We consider the following problem. We look for

$$u := \operatorname{argmin}_{w \in X; w = g \text{ on } \partial\Omega} I[w],$$

where X is a certain function space (typically a Sobolev space) with fixed boundary condition. We show that if the function L is smooth and u is sufficiently smooth, then u is a (classical) solution to a certain partial differential equation.

We set $i(\tau) := I[u + \tau v]$, where $\tau \in \mathbb{R}$, $u = g$ on $\partial\Omega$ and $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Then $u + \tau v = g$ on $\partial\Omega$. Assume that u is a minimizer of I. Then $i(\tau)$ has a minimum at $\tau = 0$. Since the function i is according to our assumptions smooth, we have

$$i'(0) = 0.$$

(This derivative is in the context of the functional analysis called the Gâteaux derivative or differential of the functional I.) Formally we get

$$i'(\tau) = \int_\Omega \Big(\nabla_{\mathbf{p}} L(\nabla(u + \tau v), u + \tau v, \cdot) \cdot \nabla v + \nabla_z L(\nabla(u + \tau v), u + \tau v, \cdot) v\Big) \,\mathrm{d}x.$$

Therefore

$$0 = i'(0) = \int_\Omega \Big(\nabla_{\mathbf{p}} L(\nabla u, u, \cdot) \cdot \nabla v + \nabla_z L(\nabla u, u, \cdot) v\Big) \,\mathrm{d}x$$

for all $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Therefore, under our smoothness assumptions

$$0 = \int_\Omega \Big(-\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial p_i}(\nabla u, u, \cdot) + \frac{\partial L}{\partial z}(\nabla u, u, \cdot)\Big) v \,\mathrm{d}x$$

for all $v \in C_0^\infty(\Omega)$. The Du Bois–Reymond lemma yields finally

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial p_i}(\nabla u(x), u(x), x) + \frac{\partial L}{\partial z}(\nabla u(x), u(x), x) &= 0 \qquad \text{in } \Omega, \\ u &= g \qquad \text{on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

The equation above is called the Euler–Lagrange equation corresponding to the functional I.

Example 4.4.2. a) Let

$$L(\mathbf{p}, z, x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) p_i p_j - z f(x),$$

where $a_{ij} = a_{ji}$ for $i, j = 1, \ldots, d$ in Ω. Then

$$I[w] = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} - w f \Big)\, \mathrm{d}x.$$

The corresponding Euler–Lagrange equation is then

$$- \sum_{i,j=1}^{d} \Big(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \Big) = f.$$

b) Let

$$L(\mathbf{p}, z, x) = \frac{1}{2} |\mathbf{p}|^2 - F(z),$$

where $F'(z) = f(z)$. Then

$$I[w] = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2} |\nabla w|^2 - F(w) \Big)\, \mathrm{d}x,$$

and the Euler–Lagrange equation is

$$-\Delta u = f(u).$$

c) Let

$$L(\mathbf{p}, z, x) = \big(1 + |\mathbf{p}|^2\big)^{\frac{1}{2}}$$

(minimal surface problem). Then

$$I[w] = \int_\Omega \big(1 + |\nabla w|^2\big)^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}x,$$

and the Euler–Lagrange equation is

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \Big) = 0$$

in Ω. Adding the boundary condition $u = g$ on $\partial\Omega$ we get a problem whose solution solves the following problem. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ be given. We look for a graph of function $u = u(x)$ defined in Ω with fixed value $u = g$ on $\partial\Omega$ such that the area of the surface $(x, u(x))$, $x \in \Omega$, is minimal.

We next consider the second derivative of our function $i(\tau)$. Recall that under the smoothness assumption the necessary condition for having a minimum of i at $\tau = 0$ is $i''(0) \geq 0$. We compute

$$\begin{aligned} i''(\tau) = \int_\Omega \Big[& \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 L}{\partial p_i \partial p_j} (\nabla u + \tau \nabla v, u + \tau v, \cdot) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \\ & + 2 \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 L}{\partial p_i \partial z} (\nabla u + \tau \nabla v, u + \tau v, \cdot) v \frac{\partial v}{\partial x_i} \\ & + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} (\nabla u + \tau \nabla v, u + \tau v, \cdot) v^2 \Big]\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} i''(0) = \int_\Omega \Big[& \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 L}{\partial p_i \partial p_j} (\nabla u, u, \cdot) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + 2 \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 L}{\partial p_i \partial z} (\nabla u, u, \cdot) v \frac{\partial v}{\partial x_i} \\ & + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} (\nabla u, u, \cdot) v^2 \Big]\, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4.27}$$

for all $v \in C_0^\infty(\Omega)$. By approximation, we can in fact use functions which are only Lipschitz continuous, however, still compactly supported in Ω. We now aim at proving the necessary condition for the minimum. We fix $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$, take $\varepsilon > 0$ and a function $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ and define

$$v(x) := \varepsilon \varrho \Big(\frac{x \cdot \boldsymbol{\xi}}{\varepsilon} \Big) \zeta(x),$$

where the function

$$\varrho(z) = \begin{cases} z, & 0 \leq z \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - z, & \frac{1}{2} < z \leq 1, \end{cases}$$

and extend the function as 1-periodic to $\mathbb{R}$, i.e. $\varrho(z) = \varrho(z+1)$ for all $z \in \mathbb{R}$. Therefore $|\varrho'(z)| = 1$ a.e. in $\mathbb{R}$, and

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = \varrho'\Big(\frac{x \cdot \boldsymbol{\xi}}{\varepsilon}\Big)\xi_i(x)\zeta(x) + O(\varepsilon) \qquad \text{for } \varepsilon \to 0_+.$$

Using this function in (4.27) and passing with $\varepsilon \to 0_+$ we get due to the fact that $i''(0) \geq 0$

$$0 \leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 L}{\partial p_i \partial p_j}(\nabla u, u, \cdot)\xi_i\xi_j\zeta^2 \,\mathrm{d}x.$$

As this inequality holds for arbitrary $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$, we get

$$\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 L}{\partial p_i \partial p_j}(\nabla u(x), u(x), x)\xi_i\xi_j \geq 0$$

for all $\xi \in \mathbb{R}^d$ and all $x \in \Omega$. This indicates (but does not prove!) that the existence of a minimum for our class of functionals is connected with the convexity of L in the first variable.

4.4.2 Systems

We now assume that the Lagrangian depends on vector-valued function, i.e. its gradient is a tensor (matrix); hence

$$L\colon \mathbb{R}^{N\times d} \times \mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}.$$

We use the notation

$$L = L(\vec{\mathbf{P}}, \vec{z}, x),$$

where

$$\vec{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} p_1^1 & \dots & p_d^1 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ p_1^N & \dots & p_d^N \end{pmatrix}$$

and define

$$I[\vec{w}] = \int_\Omega L(\nabla\vec{w}(\cdot), \vec{w}(\cdot), \cdot)\,\mathrm{d}x,$$

where $\vec{w}\colon \Omega \to \mathbb{R}^N$,

$$\nabla\vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial w_1}{\partial x_d} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial w_N}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial w_N}{\partial x_d} \end{pmatrix}$$

and we fix again the boundary condition $\vec{w} = \vec{g}$. We now deduce the Euler–Lagrange equations (or rather the system of Euler–Lagrange equations) for the minimizer of I. We set $i(\tau) = I[\vec{u} + \tau\vec{v}]$, where $\vec{v} \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$ and compute $i'(0)$ which we set to be equal to 0. We get

$$\begin{aligned} 0 = i'(0) = \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^d \sum_{k1}^N \frac{\partial L}{\partial p_i^k}(\nabla\vec{u}(\cdot), \vec{u}(\cdot), \cdot)\frac{\partial v^k}{\partial x_i} \\ + \sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial z^k}(\nabla\vec{u}(\cdot), \vec{u}(\cdot), \cdot)v^k\Big)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

i.e.

$$-\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial L}{\partial p_i^k}(\nabla\vec{u}(x), \vec{u}(x), x)\Big) + \frac{\partial L}{\partial z^k}(\nabla\vec{u}(x), \vec{u}(x), x) = 0 \tag{4.28}$$

in Ω, $k = 1, 2, \dots, N$, and $\vec{u} = \vec{g}$ on $\partial\Omega$.

4.4.3 Null Lagrangians. Proof of Brouwer Fixed Point Theorem

There exist special Lagrangians such that any smooth function is a solution to the corresponding Euler–Lagrange equations.

Definition 4.4.3 The function L: $\mathbb{R}^{N\times d} \times \mathbb{R}^d \times R \to \mathbb{R}$ is called a null Lagrangian, if the corresponding Euler–Lagrange equations

$$-\sum_{i=1}^{d} \Big(\frac{\partial L}{\partial p_i^k}(\nabla \vec{u}(x), \vec{u}(x), x) \Big) + \frac{\partial L}{\partial z^k}(\nabla \vec{u}(x), \vec{u}(x), x) = 0,$$

$k = 1, 2, \dots, d$, are fulfilled by any smooth function $\vec{u}$: $\Omega \to \mathbb{R}^N$.

In the scalar case ($N = 1$) only the linear functions in $\mathbf{p}$ (with constant coefficients) are null Lagrangians. A more interesting situation is in the vectoriel case, especially if $d = N$, as we shall see later.

We start with one special property of the null Lagrangians which says that the corresponding energy depends only on the boundary conditions of the functions.

Theorem 4.4.4 Let L be a null Lagrangian. Let $\vec{u}_1$ and $\vec{u}_2$ be two functions from $C^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$ such that

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 \qquad \text{on } \partial\Omega.$$

Then

$$I[\vec{u}_1] = I[\vec{u}_2].$$

Proof. Define

$$i(\tau) = I(\tau\vec{u}_1 + (1-\tau)\vec{u}_2], \qquad 0 \le \tau \le 1.$$

Then

$$\begin{aligned} i'(\tau) = &\int_\Omega \Big[\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial p_i^k}(\tau\nabla\vec{u}_1 + (1-\tau)\nabla\vec{u}_2, \tau\vec{u}_1 + (1-\tau)\nabla\vec{u}_2, \cdot)\Big(\frac{\partial u_1^k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_2^k}{\partial x_i}\Big) \\ &+ \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial L}{\partial z^k}(\tau\nabla\vec{u}_1 + (1-\tau)\nabla\vec{u}_2, \tau\vec{u}_1 + (1-\tau)\nabla\vec{u}_2, \cdot)(u_1^k - u_2^k)\Big] \,\mathrm{d}x \\ = &\sum_{k=1}^{N}\int_\Omega \Big[\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial L}{\partial p_i^k}(\tau\nabla\vec{u}_1 + (1-\tau)\nabla\vec{u}_2, \tau\vec{u}_1 + (1-\tau)\nabla\vec{u}_2, \cdot)\Big) \\ &+ \frac{\partial L}{\partial z^k}(\tau\nabla\vec{u}_1 + (1-\tau)\nabla\vec{u}_2, \tau\vec{u}_1 + (1-\tau)\nabla\vec{u}_2, \cdot)(u_1^k - u_2^k)\Big] \,\mathrm{d}x = 0, \end{aligned}$$

where we used in the application of the Gauss theorem that $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{0}$ on $\partial\Omega$ as well as the fact that L is a null Lagrangian. ■

Definition 4.4.5 Assume $\mathbb{A}$ is an $d \times d$ matrix. Then we define cof $\mathbb{A}$ as a matrix, whose (k, i) entries are as follows:

$$(\operatorname{cof} \mathbb{A})_i^k = (-1)^{k+i} \det(\mathbb{A}_i^k),$$

where the matrix $(\mathbb{A}_i^k)$ is matrix obtained from the matrix $\mathbb{A}$ by deleting the k-th row and the i-th column.

Lemma 4.4.6 Let $\mathbf{u}$: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ be a smooth function. Then

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\operatorname{cof} \nabla\mathbf{u}\Big)_i^k = 0, \qquad k = 1, 2, \dots, d.$$

Proof. Step 1: We recall the following linear algebra identity

$$(\det \mathbb{P})\mathbb{I} = \mathbb{P}^T \operatorname{cof} \mathbb{P}$$

which holds for any $\mathbb{P}$, matrix of the type $d \times d$. We may rewrite the identity above component-wise

$$(\det \mathbb{P})\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{d} p_i^k (\operatorname{cof} \mathbb{P})_j^k, \tag{4.29}$$

$i, j = 1, 2, \dots, d$. Therefore

$$\frac{\partial(\det \mathbb{P})}{\partial p_m^k} = (\operatorname{cof} \mathbb{P})_m^k$$

for $k, m = 1, 2, \dots, d$ (recall that $(\operatorname{cof} \mathbb{P})_m^k$ does not contain the entry p_m^k).

Step 2: Take $\mathbb{P} = \nabla \mathbf{u}$ in (4.29), differentiate the identity with respect to x_j and sum the identity over j. It yields

$$\sum_{j,k,l=1}^{d} \delta_{ij} (\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u})_m^k \frac{\partial^2 u^k}{\partial x_m \partial x_j} = \sum_{k,j=1}^{d} \Big(\frac{\partial^2 u^k}{\partial x_i \partial x_j} (\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u})_j^k + \frac{\partial u^k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u})_j^k \Big).$$

Hence

$$\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial u^k(x)}{\partial x_i} \Big(\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} (\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u}(x))_j^k \Big) = 0. \tag{4.30}$$

Step 3: If $\det(\nabla \vec{u})(x_0) \neq 0$ then

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} (\operatorname{cof} \nabla \vec{u}(x_0))_j^k = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, d$$

where we used that the non-zero determinant implies unique solvability (the trivial one) of (4.30). If the determinant is non-zero, we choose $\varepsilon > 0$, sufficiently small, such that $\det(\nabla \mathbf{u}(x_0) + \varepsilon \mathbb{I}) \neq 0$ and we repeat Steps 1–3 for $\widetilde{\mathbf{u}} := \mathbf{u}(x) + \varepsilon x$ and finally let $\varepsilon \to 0_+$. ■

We have the following non-trivial example of a null Lagrangian.

Lemma 4.4.7 The determinant function is a null Lagrangian.

Proof. We have to show that

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\frac{\partial (\det(\nabla \mathbf{u}(x)))}{\partial p_i^k} \Big) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, d.$$

Recall that

$$\frac{\partial \det(\nabla(\mathbf{u}))}{\partial p_i^k} = (\operatorname{cof}(\nabla \mathbf{u}))_i^k.$$

Then, due to Lemma 4.4.6

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\frac{\partial (\det(\nabla \mathbf{u}))}{\partial p_i^k} \Big) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u})_i^k = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, d.$$

■

Using this result we may now prove the Brouwer Fixed Point Theorem

Theorem 4.4.8 — Brouwer Fixed Point Theorem. Let $\mathbf{u}\colon \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^d$ be continuous. Then $\mathbf{u}$ possesses at least one fixed point in $\overline{B_1(0)}$, i.e. there exists at least one $x_0 \in \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^d$ such that

$$\mathbf{u}(x_0) = x_0.$$

Proof. Step 1: We first claim that there does not exist a smooth function

$$\mathbf{w}\colon B := \overline{B_1(0)} \to \partial B$$

such that

$$\mathbf{w}(x) = x \qquad \text{on } \partial B. \tag{4.31}$$

Step 2: Suppose that such a function exists. Let $\mathbf{I}$ denote the identity mapping, i.e. $\mathbf{I}(x) = x$ for all $x \in B$. Due to our assumption, $\mathbf{w} = \mathbf{I}$ on ∂B. As the determinant is a null Lagrangian, Theorem 4.4.4 implies

$$\int_B \det(\nabla \mathbf{w})\, \mathrm{d}x = \int_B \det(\nabla \mathbf{I})\, \mathrm{d}x = |B| \neq 0. \tag{4.32}$$

On the other hand, as $\mathbf{w}\colon B \to \partial B$, we have $|\mathbf{w}| = 1$. Therefore

$$(\nabla \mathbf{w})^T \mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

As $|\mathbf{w}| = 1$, the equality says that 0 is an eigenvalue of $(\nabla \mathbf{w})^T$ for all $x \in B$, whence $\det(\nabla \mathbf{w}) \equiv 0$ in B which contradicts to (4.32) and thus the smooth function considered in Step 1 cannot exist.
Step 3: Let us show that even no such merely continuous function may exist. Let $\mathbf{w}$ be such a continuous function. We extend it by the identity function ($\mathbf{w}(x) := x$) for $x \in \mathbb{R}^d \setminus B$. Observe that $\mathbf{w}(x) \neq \mathbf{0}$ for $x \in \mathbb{R}^d$. Fix $\varepsilon > 0$ and mollify the function, i.e. $\mathbf{w}_\varepsilon := \eta_\varepsilon \star \mathbf{w}$. Then also $\mathbf{w}_\varepsilon \neq \mathbf{0}$ in $\mathbb{R}^d$. As η_ε is a radial function, we also have $\mathbf{w}_\varepsilon(x) = x$ for $x \in \mathbb{R}^d \setminus B_2(0)$ if $\varepsilon < 1$ (recall that $\int_{\mathbb{R}^d} (x - y) \eta_\varepsilon(y)\, \mathrm{d}y = x$).

Then

$$\widetilde{\mathbf{w}} := \frac{2\mathbf{w}_\varepsilon}{|\mathbf{w}_\varepsilon|}$$

would be a smooth function fulfilling assumptions from Step 1 (with $B = \overline{B_2(0)}$). Hence such a function cannot exist.
Step 4: Let $\mathbf{u}\colon B \to B$ be continuous such that $\mathbf{u}$ does not possess any fixed point in B. Define $\mathbf{w}\colon B \to \partial B$ so that x is the point which hits ∂B on the ray starting at $\mathbf{u}(x)$ and going through x. Since $\mathbf{u}(x) \neq x$ and $\mathbf{u}$ is continuous, the mapping $\mathbf{w}$ is well defined and continuous on B such that $\mathbf{w}$ maps B to ∂B and $\mathbf{w}(x) = x$ on ∂B. This contradicts to Step 3. ■

4.5 Existence of minimizers for some problems of calculus of variations. Convexity

Let us start with the following abstract problem. We look for a function u (provided it exists) such that the functional $I[\cdot]\colon X \to \mathbb{R}$, where X is a Banach space and $\mathcal{A} \subset X$, has its minimum at u, i.e.

$$u = \mathrm{argmin}_{w\in\mathcal{A}} I[w], \text{ i.e. } I[u] = \min_{w\in\mathcal{A}} I[w].$$

Let $u_n \in \mathcal{A}$ be a minimizing sequence. We would like to extract an at least weakly convergent subsequence. To this aim, we assume that
(1) $\mathcal{A}$ is non-empty
(2) I is bounded from below on $\mathcal{A}$ ($\inf_{w\in\mathcal{A}} I[w] > -\infty$)
(3) I is coercive on $\mathcal{A}$, i.e. $\lim_{|\|w\|_X\to\infty} I[w] = +\infty$
Then the sequence $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded. Further
(4) X is a reflexive Banach space
(5) the set $\mathcal{A}$ is closed and convex (hence weakly closed)
Then the sequence contains a weakly convergent subsequence whose limit belongs to $\mathcal{A}$. However, we can hardly expect that $I[u_{n_k}] \to I[u]$ for $k \to \infty$, such a condition would restrict the class of functionals considerably. We therefore assume a weaker condition, namely that
(6) I is weakly lower semicontinuous, i.e. $I[u] \le \liminf_{k\to\infty} I[u_k]$ whenever $u_k \rightharpoonup u$ in X.
Then we know that $I[u] \le \inf_{w\in\mathcal{A}} I[w]$, thus the equality holds, and u is the minimizer. We proved

Theorem 4.5.1 — Main Theorem of the Calculus of Variations. Let X be a reflexive Banach space, $\mathcal{A} \subset X$ non-empty, closed and convex. Let $I\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ be coercive, bounded from below and weakly lower semicontinuous on X. Then there exists $u \in \mathcal{A}$ such that $I[u] = \min_{w\in\mathcal{A}} I[w]$.

We restrict ourselves on functionals which can be represented by means of Lagrangians, i.e.

$$I[w] := \int_\Omega L(\nabla u(x), u(x), x)\,\mathrm{d}x, \qquad u \in \mathcal{A}, \tag{4.33}$$

and we aim at formulating suitable conditions on $L(\cdot,\cdot,\cdot)$ and $\mathcal{A}$ so that we will be able to apply Theorem 4.5.1. We deal separately with the case when u is a scalar-valued and a vector-valued function.

4.5.1 Scalar case (one Euler–Lagrange equation)

In order to verify that the functional is coercive, we assume that

$$L(\mathbf{p}, z, x) \ge \alpha|\mathbf{p}|^{L^q(\Omega)} - \beta, \tag{4.34}$$

$\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$, $z \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$. Then

$$I[w] = \int_\Omega L(\nabla w(x), w(x), x)\,\mathrm{d}x \ge \int_\Omega (\alpha|\nabla w|^q - \beta)\,\mathrm{d}x = \alpha\|\nabla w\|^q_{L^q(\Omega;\mathbb{R}^d)} - \gamma.$$

Therefore $I[w] \to +\infty$ as $\|\nabla w\|_{L^q(\Omega;\mathbb{R}^d)} \to +\infty$. Additionally, if we assume

$$\mathcal{A} = \Big\{w \in W^{1,q}(\Omega);\ w = g \text{ on } \partial\Omega\Big\}$$

and fix $g \in W^{1-\frac{1}{q},q}(\partial\Omega)$, then even

$$I[w] \to +\infty \qquad \text{as} \qquad \|w\|_{1,q} \to +\infty,$$

as $\|\nabla w\|_{L^q(\Omega);\mathbb{R}^d)} + \|g\|_{L^q(\Omega)}$ is a norm equivalent to the $W^{1,q}$-norm on $\mathcal{A}$. Note also that $\mathcal{A}$ is weakly closed.

The only condition which remains to verify is the weak lower semicontinuity of I on $W^{1,q}(\Omega)$. We already know that a necessary condition for a function u to be a minimizer of a smooth Lagrangian is

$$\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 L}{\partial p_i \partial p_j}(\nabla u(x), u(x), x)\xi_i\xi_j \geq 0$$

for all $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$.

We will show that the convexity is indeed the right condition. We will assume (for simplicity) that $L(\cdot,\cdot,\cdot)$ is a smooth function on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \Omega$ at least twice continuously differentiable with respect to $\mathbf{p}$ and z and once with respect to x. We have the following result

Lemma 4.5.2 Let L be as above, additionally bounded from below and let the mapping

$$\mathbf{p} \mapsto L(\mathbf{p}, z, x)$$

be convex $\forall z \in \mathbb{R}$ and $x \in \Omega$ on $\mathbb{R}^d$. Let $\Omega \in C^0$. Then

$$I[w] := \int_\Omega L(\nabla w, w, x)\,\mathrm{d}x$$

is weakly lower semicontinuous on $W^{1,q}(\Omega)$, $1 < q < \infty$.

Proof. Step 1: Let $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W^{1,q}(\Omega)$ be such that $u_k \rightharpoonup u$ (weakly) in $W^{1,q}(\Omega)$. Let

$$\ell := \liminf_{k\to\infty} I[u_k].$$

We aim at showing that $I[u] \leq \ell$.
Step 2: Note that we may choose a subsequence (we do not relabel it) such $\ell = \lim_{k\to\infty} I[u_k]$ and $u_k \to u$ in $L^q(\Omega)$. Moreover, $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|_{W^{1,q}(\Omega)} < +\infty$.
Step 3: We fix $\varepsilon > 0$. Then there exists $E_\varepsilon \subset \Omega$, $|\Omega \setminus E_\varepsilon| < \varepsilon$ such that $u_k \rightrightarrows u$ in E_ε. We set

$$F_\varepsilon = \Big\{x \in \Omega;\ |u(x)| + |\nabla u(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon}\Big\}.$$

Recall that $|\Omega \setminus F_\varepsilon| \to 0$ as $\varepsilon \to 0$. Finally set

$$G_\varepsilon = F_\varepsilon \bigcap E_\varepsilon$$

(note that $|\Omega \setminus G_\varepsilon| \to 0$ as $\varepsilon \to 0$.
Step 4: By adding a suitable constant we may without loss of generality assume that $L(\cdot,\cdot,\cdot)$ is non-negative in Ω. Then

$$\begin{aligned} I[u_k] &= \int_\Omega L(\nabla u_k, u_k, x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{G_\varepsilon} L(\nabla u_k, u_k, x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{G\varepsilon} L(\nabla u, u_k, x)\,\mathrm{d}x + \int_{G_\varepsilon} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial L}{\partial p_i}(\nabla u, u_k, x)\Big(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Now it is easy to verify, due to the definition of G_ε,

$$\int_{G_\varepsilon} L(\nabla u, u_k, x)\,\mathrm{d}x \to \int_{G_\varepsilon} L(\nabla u, u, x)\,\mathrm{d}x$$

and due to the weak convergence of $\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u$ in $L^q(\Omega)$

$$\int_{G_\varepsilon} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial L}{\partial p_i}(\nabla u, u_k, x)\Big(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)\,\mathrm{d}x \to 0,$$

both for $k \to \infty$. Whence

$$\ell \geq \int_{G_\varepsilon} L(\nabla u, u, x)\,\mathrm{d}x$$

for any $\varepsilon > 0$. Passing with $\varepsilon \to 0$ and using the Lebesgue Monotone Convergence Theorem A.3.2 we conclude

$$\ell \geq \int_\Omega L(\nabla u, u, x)\,\mathrm{d}x = I[u],$$

which finishes the proof. ∎

Therefore we have

Theorem 4.5.3 Let $\mathcal{A} = \{u \in W^{1,q}(\Omega);\ u = g \text{ on } \partial\Omega\}$ with $g \in W^{1-\frac{1}{q},q}(\partial\Omega)$. Let L fulfil the coercivity condition (4.34) and let L be convex in the first variable.

Then there exists at least one $u \in \mathcal{A}$ such that

$$I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w].$$

Proof. As $\mathcal{A}$ is non-empty, closed and convex, L is coercive and weakly lower semicontinuous, we may apply Theorem 4.5.1. ■

In order to ensure the uniqueness, we have to require more. One possibility is

$$L = L(\mathbf{p}, x) \qquad (L \text{ does not depend on } z), \tag{4.35}$$

$$\exists \theta > 0: \qquad \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 L}{\partial p_i \partial p_j}(\mathbf{p}, x)\xi_i \xi_j \geq \theta |\boldsymbol{\xi}|^2 \qquad \text{(uniform convexity)}. \tag{4.36}$$

Then

Theorem 4.5.4 Under assumptions (4.35)–(4.36), for L sufficiently smooth, the minimizer of $I[\cdot]$ over $\mathcal{A}$ (defined above) is unique, provided it exists.

Proof. Assume that u_1, u_2 are two different minimizers. As $\mathcal{A}$ is convex, we have that $\frac{u_1+u_2}{2} \in \mathcal{A}$. We show that

$$I\Big[\frac{u_1 + u_2}{2}\Big] \leq \frac{1}{2} I[u_1] + \frac{1}{2} I[u_2]$$

with strict inequality provided $u_1 \neq u_2$. Note that

$$L(\mathbf{p}, x) \geq L(\mathbf{q}, x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial p_i} L(\mathbf{q}, x)(p_i - q_i) + \frac{\theta}{2} |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2.$$

Taking $\mathbf{p} = \nabla u_1$, $\mathbf{q} = \frac{1}{2}(\nabla u_1 + \nabla u_2)$ we get

$$\begin{aligned} &I\Big[\frac{\nabla u_1 + \nabla u_2}{2}\Big] + \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial p_i} L\Big(\frac{\nabla u_1 + \nabla u_2}{2}, x\Big)\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \frac{\partial u_2}{\partial x_i}\Big)\,\mathrm{d}x \\ &+ \frac{\theta}{8} \int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 \,\mathrm{d}x \leq I[u_1], \end{aligned} \tag{4.37}$$

and for $\mathbf{p} = \nabla u_2$, $\mathbf{q} = \frac{1}{2}(\nabla u_1 + \nabla u_2)$ we get

$$\begin{aligned} &I\Big[\frac{\nabla u_1 + \nabla u_2}{2}\Big] + \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial p_i} L\Big(\frac{\nabla u_1 + \nabla u_2}{2}, x\Big)\Big(\frac{\partial u_2}{\partial x_i} - \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\Big)\,\mathrm{d}x \\ &+ \frac{\theta}{8} \int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 \,\mathrm{d}x \leq I[u_2]. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Summing up (4.38) with (4.37) and multiplying the resulted inequality by $\frac{1}{2}$ we obtain

$$I\Big[\frac{\nabla u_1 + \nabla u_2}{2}\Big] + \frac{\theta}{8} \int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 \,\mathrm{d}x \leq \frac{I[u_1] + I[u_2]}{2}.$$

Evidently, if $I[u_1] = I[u_2]$ and u_1 and u_2 are minimizers, then $\nabla u_1 = \nabla u_2$ a.e. in Ω. But since $u_1 = u_2$ a.e. on $\partial\Omega$, then $u_1 = u_2$ a.e. in Ω which finishes the proof. ■

Next, under certain growth conditions on L, we verify that the minimizer solves the corresponding Euler–Lagrange equation. We assume

$$|L(\mathbf{p}, z, x)| \leq C(|\mathbf{p}|^q + |z|^q + 1), \tag{4.39}$$

and

$$|\nabla_{\mathbf{p}} L(\mathbf{p}, z, x)| + |\nabla_z L(\mathbf{p}, z, x)| \leq C(|\mathbf{p}|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1) \tag{4.40}$$

for some $1 < q < \infty$.

Theorem 4.5.5 Assume conditions (4.39)–(4.40), where L is a sufficiently regular function. Let u be a minimizer of I over $\mathcal{A} = \{u \in W^{1,q}(\Omega; u = g \text{ on } \partial\Omega\}$ with q as in (4.39)–(4.40). Then u is a weak solution to the corresponding Euler–Lagrange equations, i.e.

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^d \frac{\partial L}{\partial p_i}(\nabla u, u, x) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial L}{\partial z}(\nabla u, u, x) v \Big) \, \mathrm{d}x = 0$$

for all $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

Proof. We performed the formal proof at the beginning of Section 4.4. We now present a rigorous proof, based on the verification that we may differentiate the function (i.e., an integral) with respect to a parameter.

We set $i(\tau) := I[u + \tau v]$. Due to (4.39), $i(\tau)$ is finite. We study for $\tau \neq 0$ the difference quotients

$$\frac{i(\tau) - i(0)}{\tau} = \int_\Omega \frac{L(\nabla u + \tau \nabla v, u + \tau v, x) - L(\nabla u, u, x)}{\tau} \, \mathrm{d}x =: \int_\Omega L^\tau(x) \, \mathrm{d}x$$

and aim at computing the limit when $\tau \to 0_+$. We see that due to our assumptions

$$\lim_{\tau \to 0} L^\tau(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial L}{\partial p_i}(\nabla u, u, x) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial L}{\partial z}(\nabla u, u, x)$$

a.e. in Ω. Using the Theorem on Integrals dependent on a Parameter (consequence of the Lebesgue Dominated Convergence Theorem) we get the desired equality since estimate (4.40) provides an integrable majorant. Since u is a minimizer of $I[\cdot]$, we know that $i'(0) = 0$. ■

Remark 4.5.6. If L is convex in $\mathbf{p}$ and z, then each weak solution is a minimizer. In this case namely

$$L(\mathbf{p}, z, x) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial L}{\partial p_i}(\mathbf{p}, z, x)(q_i - p_i) + \frac{\partial L}{\partial z}(\mathbf{p}, z, x)(r - z) \leq L(\mathbf{q}, r, x).$$

Taking $\mathbf{p} = \nabla u$, $\mathbf{q} = \nabla w$, $z = u$, $r = w$, integrating over Ω yields

$$I[u] + \int_\Omega \Big(\frac{\partial L}{\partial p_i}(\nabla u, u, x)(\frac{\partial w}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}) + \frac{\partial L}{\partial z}(\nabla u, u, x)(w - u) \Big) \, \mathrm{d}x \leq I[w].$$

Hence

$$I[u] \leq I[w]$$

for all $w \in \mathcal{A}$ due to the fact that $u - w = 0$ on Ω implies that the integral on the left-hand side above vanishes.

4.5.2 Vectoriel case (system of equations)

Since the Fundamental Theorem of Calculus of Variations (Theorem 4.5.1) holds also in this case, we can modify the previous conditions to get existence of a minimizer, its uniqueness and connection to the solution of the (now system of) Euler–Lagrange equations under basically the same assumptions as above. As before, we assume that L is at least twice continuously differentiable with respect the the first two variables and once with respect to the last variable. Furthermore, let

$$|L(\vec{\mathbf{P}}, \vec{z}, x)| \geq C_1 |\vec{(}P)|^q - C_2, \qquad \text{coercivity}, \tag{4.41}$$

$$L \text{ is convex in the variable } \vec{\mathbf{P}}, \tag{4.42}$$

and

$$\mathcal{A} = \Big\{ \vec{u} \in W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N); \vec{u} = \vec{g} \text{ on } \partial\Omega \Big\} \text{ is non-empty}, \tag{4.43}$$

(i.e. $\vec{g} \in W^{1-\frac{1}{q},q}(\partial\Omega; \mathbb{R}^N)$). Then

Theorem 4.5.7 Under assumptions (4.41)–(4.43) (for L sufficiently smooth) there exists a minimizer of $I[\vec{w}] = \int_\Omega L(\nabla \vec{w}, \vec{w}, \cdot) \, \mathrm{d}x$ over the set $\mathcal{A}$, i.e. a function $\vec{u} \in \mathcal{A}$ such that

$$I[\vec{u}] \leq I[\vec{w}] \qquad \forall \vec{w} \in \mathcal{A}.$$

If we assume further that

$$L = L(\vec{\mathbf{P}}, x), \qquad \sum_{i,j=1}^d \sum_{k,l=1}^N \frac{\partial^2 L}{\partial p_i^k \partial p_j^l}(\vec{\mathbf{P}}, x) \xi_i^k \xi_j^l \geq \theta |\vec{\boldsymbol{\xi}}|^2 \tag{4.44}$$

for all $\vec{\boldsymbol{\xi}} \in \mathbb{R}^{N \times d}$ and some $\theta > 0$, then

Theorem 4.5.8 Under the assumptions (4.44) and (4.43), the minimizer of $I[\vec{w}]$ (provided it exists), is unique.

Finally, let

$$L(\vec{\mathbf{P}}, \vec{z}, x)| \leq C(|\vec{\mathbf{P}}|^q + |\vec{z}|^q + 1), \tag{4.45}$$

and

$$|\nabla_{\vec{\mathbf{P}}} L(\vec{\mathbf{P}}, \vec{z}, x)| + |\nabla_{\vec{z}} L(\vec{\mathbf{P}}, \vec{z}, x)| \leq C(|\vec{\mathbf{P}}|^{q-1} + |\vec{z}|^{q-1} + 1) \tag{4.46}$$

for some $1 < q < \infty$. Then

Theorem 4.5.9 Let L, sufficiently smooth, satisfy (4.45) and (4.46). Let $\vec{u}$ be a minimizer of $I[\cdot]$ over the set $\mathcal{A}$. Then $\vec{u}$ is a solution to the corresponding system of the Euler–Lagrange equations, i.e. $\vec{u} \in \mathcal{A}$, and

$$\sum_{k=1}^{N} \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial L}{\partial p_i^k}(\nabla \vec{u}, \vec{u}, \cdot) \frac{\partial v^k}{\partial x_i} + \frac{\partial L}{\partial z^k}(\nabla \vec{u}, \vec{u}, \cdot) v^k \Big) \, \mathrm{d}x = 0$$

for any $\vec{v} \in W_0^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N)$.

However, in applications (e.g. in the elasticity theory), the convexity of the Lagrangian in $\vec{\mathbf{P}}$ contradicts physical principles. However, we may replace the convexity by so-called polyconvexity, namely that for $d = N$ the Lagrangian is a convex function of $\vec{\mathbf{P}}$ and of the determinant of $\vec{\mathbf{P}}$, see below. The fact that the theory works perfectly in this case is based on the following partially counterintuitive result

Lemma 4.5.10 Let $d < q < \infty$ and let

$$\mathbf{u_k} \rightharpoonup \mathbf{u} \qquad \text{in } W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d),$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ is at least of class $C^{0,1}$. Then

$$\det \nabla \mathbf{u}_k \rightharpoonup \det \nabla \mathbf{u}$$

in $L^{\frac{q}{d}}(\Omega)$.

Proof. Recall that we have $\det \mathbb{P}\mathbb{I} = \mathbb{P}(\operatorname{cof} \mathbb{P})^T$ (see Lemma 4.4.6). Hence

$$\det \mathbb{P} = \sum_{j=1}^{d} p_j^i (\operatorname{cof} \mathbb{P})_j^i, \qquad i = 1, 2, \dots, d.$$

Step 1: Let $\mathbf{w} \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Then

$$\det(\nabla \mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial w^i}{\partial x_j} (\operatorname{cof} \nabla \mathbf{w})_j^i, \qquad i = 1, 2, \dots, d.$$

Due to Lemma 4.4.6

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big[\Big(\operatorname{cof} \nabla \mathbf{w} \Big)_j^i \Big], \qquad i = 1, 2, \dots, d.$$

Therefore

$$\det(\nabla \mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(w^i \Big(\operatorname{cof} \nabla \mathbf{w})_j^i \Big), \qquad i = 1, 2, \dots, d.$$

Hence for arbitrary $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega v \det(\nabla \mathbf{w}) \, \mathrm{d}x = - \sum_{j=1}^{d} \int_\Omega w^i \Big(\operatorname{cof} \nabla \mathbf{w} \Big)_j^i \frac{\partial v}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x, \qquad i = 1, 2, \dots, d.$$

Step 2: Due to the last inequality

$$\int_\Omega v \det(\nabla \mathbf{u}_k) \, \mathrm{d}x = - \sum_{j=1}^{d} \int_\Omega u_k^i \Big(\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u}_k \Big)_j^i \frac{\partial v}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x, \qquad i = 1, 2, \dots, d, \ k \in \mathbb{N}.$$

As $W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, the sequence $\mathbf{u}_k \to \mathbf{u}$ in $C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^d)$. (In fact, the compact embedding ensures this only for a subsequence, but as $\mathbf{u}_k \rightharpoonup \mathbf{u}$ in $W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, the convergence holds for the whole sequence). Assume for a moment that we know

$$\int_\Omega \psi \Big(\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u}_k)_j^i \, \mathrm{d}x \to \int_\Omega \psi \Big(\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u} \Big)_j^i \, \mathrm{d}x$$

for any $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Then we have the desired weak convergence

$$\int_\Omega v\det(\nabla \mathbf{u}_k)\,\mathrm{d}x = -\sum_{j=1}^d \int_\Omega u_k^i \Big(\operatorname{cof}\nabla \mathbf{u}_k\Big)_j^i \frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x$$
$$\to -\sum_{j=1}^d \int_\Omega u^i \Big(\operatorname{cof}\nabla \mathbf{u}\Big)_j^i \frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega v\det(\nabla \mathbf{u})\,\mathrm{d}x.$$

However, $(\operatorname{cof}\nabla \mathbf{u}_k)$ is a matrix whose entries are determinants of matrices of the type $(d-1)\times(d-1)$. Therefore they can be analyzed as above and they can be rewritten as above after integration by parts to a product of a determinant of order $(d-2)\times(d-2)$ of derivatives of the function and the function itself. After finitely many steps we end up with a product of a derivative and the function; the function converges strongly even in the $C(\overline{\Omega})$ and the derivative converges weakly in $L^q(\Omega)$.
Step 3: As $\det(\nabla \mathbf{u}_k)$ is bounded in $L^{\frac{q}{d}}(\Omega)$, there exists a subsequence such that

$$\det(\nabla \mathbf{u}_{k_n}) \rightharpoonup A$$

in $L^{\frac{q}{d}}(\Omega)$. But due to Steps 1 and 2 $A = \det(\nabla \mathbf{u})$ and as we can from any subsequence get a subsequence with the same limit, then the whole sequence must converge to the same limit, i.e.

$$\det(\nabla \mathbf{u}_k) \rightharpoonup \det(\nabla \mathbf{u})$$

in $L^{\frac{q}{d}}(\Omega)$. ■

Assume now that $N = d$ and let

$$L(\mathbb{P}, \mathbf{z}, x) = F(\mathbb{P}, \det \mathbb{P}, \mathbf{z}, x).$$

Finally, let

$$\begin{gathered}\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d,\ x \in \Omega \text{ the mapping} \\ (\mathbb{P}, r) \mapsto F(\mathbb{P}, r, \vec{z}, x)\end{gathered} \tag{4.47}$$

be convex. We call such Lagrangians polyconvex.

Lemma 4.5.11 Let $d < q < \infty$, L is bounded from below, sufficiently smooth and polyconvex. Then the functional

$$I[\mathbf{w}] = \int_\Omega L(\nabla \mathbf{w}, \mathbf{w}, x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega L(\nabla \mathbf{w}, \det(\nabla \mathbf{w}), \mathbf{w}, x)\,\mathrm{d}x$$

is weakly lower semicontinuous on $W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$.

Proof. We proceed similarly as in the proof of Lemma 4.5.2. Let $\mathbf{u}_k \rightharpoonup \mathbf{u}$ in $W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Then due to Lemma 4.5.11 $\det(\nabla \mathbf{u}_k) \rightharpoonup \det(\nabla \mathbf{u})$ in $L^{\frac{q}{d}}(\Omega)$. We define the set G_ε similarly as in Lemma 4.5.2 and assume without loss of generality that $I \geq 0$. Then

$$\begin{aligned} I[\mathbf{u}_k] &= \int_\Omega L(\nabla \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k, x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{G_\varepsilon} L(\nabla \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k, x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{G_\varepsilon} F(\nabla \mathbf{u}_k, \det(\nabla \mathbf{u}_k), \mathbf{u}_k, x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{G_\varepsilon} F(\nabla \mathbf{u}, \det(\nabla \mathbf{u}), \mathbf{u}_k, x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{G_\varepsilon} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial F}{\partial p_j^i}(\nabla \mathbf{u}, \det(\nabla \mathbf{u}), \mathbf{u}_k, x)\Big(\frac{\partial u_k^i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{G_\varepsilon} \frac{\partial F}{\partial r}(\nabla \mathbf{u}, \det(\nabla \mathbf{u}), \mathbf{u}_k, x)\Big(\det(\nabla \mathbf{u}_k) - \det(\nabla \mathbf{u})\Big)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

We finish the proof as in Lemma 4.5.2. ■

We can therefore prove, exactly as above

Theorem 4.5.12 Let $d < q < \infty$, let L be sufficiently smooth and fulfil (4.41), (4.43) and (4.47). Let F be also sufficiently smooth. Then there exists $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$ such that

$$I[\mathbf{u}] = \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{A}} I[\mathbf{w}].$$

Kapitola 5

Function spaces for evolutionary equations

In this chapter, we introduce the necessary function spaces and tools needed later for the correct formulation of the evolutionary partial differential equations in the weak setting. We will try to prove most of the results, even though part of the text will rather remind a textbook in functional analysis or measure theory, where, however, some of these results are not so carefully studied due to the fact that most of the applications of them are connected with the theory of partial differential equations.

We aim at studying mappings

$$f\colon I \subset \mathbb{R} \to X,$$

where X is a Banach space. Most of the results in this section remain true even if we replace the one-dimensional interval by a measurable subset of $\mathbb{R}^d$, however, since we do not need this level of generality, we remain in $\mathbb{R}$. Moreover, instead of the Lebesgue measure on $\mathbb{R}$ we may as well consider a more general measure μ. The space X is always a Banach space; sometimes, however, we will require more properties (separability, reflexivity etc.). For simplicity, we always assume in this chapter that $I \subset \mathbb{R}$ is open and bounded, even though most of the results remain true for arbitrary interval in $\mathbb{R}$; however, the proof must be slightly modified in this case.

5.1 Bochner integral

First, we construct a new type of integral, in order to be able to integrate functions with values in general Banach spaces.

Definition 5.1.1 A function $s\colon I \to X$ is called a simple function, if we can write

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}(t),$$

where $x_i \in X$, E_i are pairwise disjoint, measurable, and $\sum_{i=1}^{n} \lambda_1(E_i) < +\infty$.

Definition 5.1.2 a) A function $f\colon I \to X$ is (strongly) measurable, if there exists a sequence of simle functions $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ such that

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n(t) - f(t)\|_X = 0$$

for almost all $t \in I$.
b) A function $f\colon I \to X$ is weakly measurable if

$$\langle x', f\rangle_X$$

is measurable for all $x' \in X^*$, where X^* denotes the dual space to X.

Definition 5.1.3 A function $f\colon I \to X$ is called almost separably valued, if there exists a set $N \subset I$, $\lambda_1(N) = 0$ such that $f(I \setminus N)$ is separable.

We have the following important result

Theorem 5.1.4 — Pettis. A function $f\colon I \to X$ is measurable if and only if f is weakly measurable and almost separably valued.

Proof. "$\Longrightarrow$": If f is measurable, there exists $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a sequence of simple functions such that $s_n \to f$ a.e. in I (in the norm of X). Then $\langle x', s_n\rangle_X \to \langle x', f\rangle_X$ pointwise a.e. in I which implies that f is weakly measurable. Moreover, up to a set of measure zero, f takes values in the closure of values taken by $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, therefore f is almost separably valued.

"$\Longleftarrow$": Let f be weakly measurable and almost separably valued. Let $N \subset I$ be a null set such that $f(I \setminus N)$ is separable. Let $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be dense in $f(I \setminus N)$. Due to the Hahn–Banach Theorem there exists a sequence $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ such that $\|x'_n\|_{X^*} = 1$ and $\langle x'_n, x_n\rangle = \|x_n\|_X$. Let $t \in I \setminus N$ and let $x_{n_k} \to f(t)$. Then for every $\varepsilon > 0$ there exists $k \in \mathbb{N}$ (sufficiently large) such that

$$\begin{aligned}\langle x'_{n_k}, f(t)\rangle_X &\le \|f(t)\|_X \le \|x_{n_k}\|_X + \varepsilon = \langle x'_{n_k}, x_{n_k}\rangle_X + \varepsilon\\ &= \langle x'_{n_k}, x_{n_k} - f(t)\rangle_X + \langle x'_{n_k}, f(t)\rangle_X + \varepsilon \le \langle x'_{n_k}, f(t)\rangle_X + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Letting $\varepsilon \to 0^+$ and recalling that $\|x'_{n_k}\|_{X^*} = 1$ we get

$$\|f(t)\|_X = \sup_{n\in\mathbb{N}} \langle x'_{n_k}, f(t)\rangle_X,$$

therefore, as $\|f(t)\|_X$ is a pointwise supremum of countably many measurable functions, it is measurable.

Define

$$f_n(\cdot) := \|f(\cdot) - x_n\|_X,$$

then as above, f_n is measurable. Let $\varepsilon > 0$ and $E_n = \{t \in I; f_n(t) \le \varepsilon\}$. Then E_n is measurable. Define g: $I \to X$ as follows

$$g(t) := \begin{cases} x_n & \text{if } t \in E_n \setminus \bigcup_{m<n} E_m,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Then $\|f - g\|_X \le \varepsilon$ a.e. (as $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is dense). Let $\varepsilon = 2^{-n}$, $n \in N$. We thus construct a sequence $g_n = \sum_{i=1}^{\infty} x_{i,n}\chi_{E_{i,n}}$, where $x_{i,n} \in X$ and $\cup_{i\in\mathbb{N}} E_{i,n} = I$, of countably valued functions which converge to f a.e. For each $n \in \mathbb{N}$, let $F_n = \cup_{i=1}^{k_n} E_{i,n}$, where k_n is chosen so large that $\lambda_1(I \setminus F_n) < 2^{-n}$.

Let $s_n := g_n\chi_{F_n}$. Then s_n are simple functions, $s_n \to f$ a.e. in I. To see this, let $t \in \cap_{n=k}^{\infty} F_n$ for some $k \in N$. Then for all $n > k$ we have $s_n(t) = g_n(t)$, thus $\|f(t) - s_n(t)\|_X < 2^{-n}$ and therefore $s_n(t) \to f(t)$ for all $t \in \cup_{k=1}^{\infty} \cap_{n=k}^{\infty} F_n$. But for each j and each $k > j$ we have

$$\lambda_1(I \setminus \bigcap_{n=k}^{\infty} F_n) \le \sum_{n=k}^{\infty} \lambda_1(I \setminus F_n) < 2^{-k+1},$$

whence $I \setminus \cup_{k=1}^{\infty} \cap_{n=k}^{\infty} F_n$ is a null set. Thus $s_n \to f$ outside a null set. ■

We have the following corollaries

Corollary 5.1.5. Let $I \subset R$ be open and let f: $I \to X$ be continuous. Then f is measurable.

Proof. As f is continuous, then f is separably valued (recall that rational numbers from I are dense in I). Moreover, for any $x' \in X^*$, the sequence $\langle x', f\rangle_X$ is continuous and thus measurable. We may therefore use Theorem 5.1.4. ■

Corollary 5.1.6. Let f_n be a sequence of measurable functions such that $f_n(t) \to f(t)$ for a.e. $t \in I$. Then f is measurable.

Proof. For any $x' \in X^*$ and t outside a null set $N \subset I$ we have $\langle x', f_n(t)\rangle_X \to \langle x', f(t)\rangle_X$. Thus $\langle x', f\rangle_X$ as a pointwise a.e. limit of measurable functions is measurable. Let us show that f is almost separably valued. For each $n \in N$ choose E_n a null set such that $f_n(I \setminus E_n)$ lies in a separable subspace X_n and let $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n \cup N$. Then $\lambda_1(E) = 0$ and $f|_{I\setminus E}$ takes values in the weak closure of the span of $\cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. As this set is convex, then this set is also closed by the Mazur theorem (Theorem B.2.13) and thus $f|_{I\setminus E}$ is separable. We may therefore use Theorem 5.1.4. ■

We are now ready to define the Bochner integral. For a simple function s, evidently, we may set

$$\int_I s \,\mathrm{d}\lambda_1 := \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_1(E_i),$$

where $s = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}$. It can be easily shown, similarly as for the Lebesgue integral, that this definition is independent of the representative of s and that

$$\Big\| \int_I s \,\mathrm{d}\lambda_1 \Big\|_X \le \int_I \|s\|_X \,\mathrm{d}\lambda_1.$$

We now extend the definition to measurable functions.

Definition 5.1.7 — Bochner integral. A measurable function f: $I \to X$ is Bochner integrable, if there exists a sequence $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of simple functions converging to f a.e. such that

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|f - s_n\|_X \,\mathrm{d}\lambda_1 = 0.$$

Then for such a function f we define
$$\int_I f\,\mathrm{d}\lambda_1 := \lim_{n\to\infty} s_n\,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Note that the definition is correct in the sense that
$$\Big\| \int_I s_n\,\mathrm{d}\lambda_1 - \int_I s_m\,\mathrm{d}\lambda_1 \Big\|_X \le \int_I \|s_n - s_m\|_X\,\mathrm{d}\lambda_1 \le \int_I \|s_n - f\|_X\,\mathrm{d}\lambda_1$$
$$+ \int_I \|s_m - f\|_X\,\mathrm{d}\lambda_1 \to 0 \qquad \text{as } n,m\to\infty.$$

Hence $\int_I s_n\,\mathrm{d}\lambda_1$ is a Cauchy sequence and due to the completeness of X it is convergent. If $\{\widetilde{s}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is another sequence of simple functions approximating f in X a.e., it is easy to see that the limits of sequences $\left\{\int_I s_n\,\mathrm{d}\lambda_1\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ and $\left\{\int_I \widetilde{s}_n\,\mathrm{d}\lambda_1\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ are the same which shows that the definition of the interval is independent of the approximating sequence of the simple functions. The linearity of the Bochner integral is a consequence of the linearity of the integral for simple functions.

The following fundamental theorem yields the correspondence of the Bochner and Lebesgue integrals.

Theorem 5.1.8 — Bochner. Let $f\colon I\to X$ be a measurable function. Then f is Bochner integrable over I if and only if $\|f\|_X$ is Lebesgue integrable over I. Moreover,
$$\Big\|\int_I f\,\mathrm{d}\lambda_1\Big\|_X \le \int_I \|f\|_X\,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Proof. "$\Longrightarrow$": Let f be Bochner integrable, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be the corresponding sequence of simple functions. As $\Big|\|f\|_X - \|s_n\|_X\Big| \le \|f - s_n\|_X$, we see that $\|f\|_X$ is the a.e. limit of $\{\|s_n\|_X\}_{n\in\mathbb{N}}$ and thus $\|f\|_X$ is Lebesgue measurable. Moreover, we have
$$\int_I \|f\|_X\,\mathrm{d}\lambda_1 \le \int_I \|f - s_n\|_X\,\mathrm{d}\lambda_1 + \int_I \|s_n\|_X\,\mathrm{d}\lambda_1.$$
The second integral on the right-hand side is finite due to the properties of the simple functions while the first integral is finite due to the definition of the Bochner integral, at least for n sufficiently large. Therefore $\|f\|_X$ is Lebesgue integrable over I. Furthermore,
$$\Big\| f\,\mathrm{d}\lambda_1\Big\|_X = \lim_{n\to\infty}\Big\|\int_I s_n\,\mathrm{d}\lambda_1\Big\|_X \le \lim_{n\to\infty}\int_I \|s_n\|_X\,\mathrm{d}\lambda_1,$$
as $\int_I s_n\,\mathrm{d}\lambda_1 \to \int_I f\,\mathrm{d}\lambda_1$ in X. As $\int_I \|f - s_n\|_X\,\mathrm{d}\lambda_1 \to 0$, the last term converges to $\int_I \|f\|_X\,\mathrm{d}\lambda_1$ which proves the second claim of the theorem.

"$\Longleftarrow$": Let $\|f\|_X$ be measurable and $\int_I \|f\|_X\,\mathrm{d}\lambda_1 < \infty$. Let $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of simple functions converging to f a.e. We define new simple functions
$$\widetilde{s}_n(t) := \begin{cases} s_n(t) & \text{if } \|s_n(t)\|_X \le 2\|f(t)\|_X, \\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$
Then $\|(\widetilde{s}_n - f)(t)\|_X \to 0$ a.e. as well as $\|(\widetilde{s}_n - f)(t)\|_X$ are measurable for any $n\in\mathbb{N}$. Thus
$$\|(\widetilde{s}_n - f)(t)\|_X \le \|\widetilde{s}_n(t)\|_X + \|f(t)\|_X \le 3\|f(t)\|_X.$$
As $\|f\|_X$ is integrable, the Lebesgue Dominated Convergence Theorem (Theorem A.3.3) yields
$$\int_I \|(\widetilde{s}_n - f)(t)\|_X\,\mathrm{d}\lambda_1 \to 0.$$
Therefore f is Bochner integrable. ■

Corollary 5.1.9 (Dominated Convergence Theorem). Let $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of integrable functions and let f be a measurable function such that $f_n \to f$ a.e. in I. Let $g\in L^1(I;\mathbb{R})$ be such that $\|f_n\|_X \le g$ for all $n\in\mathbb{N}$ a.e. in I. Then f is Bochner integrable and
$$\int_I f\,\mathrm{d}\lambda_1 = \lim_{n\to\infty}\int_I f_n\,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Proof. By Lebesgue Dominated Convergence Theorem we know that $\|f\|_X$ is integrable and thus f is Bochner integrable. Now
$$\|f - f_n\|_X \le \|f\|_X + \|f_n\|_X \le \|f\|_X + g,$$

hence we may apply again Lebesgue Dominated Convergence Theorem to compute

$$\Big\| \int_I f_n \,\mathrm{d}\lambda_1 - \int_I f \,\mathrm{d}\lambda_1 \Big\|_X \le \int_I \|f_n - f\|_X \,\mathrm{d}\lambda_1 \to 0,$$

i.e. $\int_I f_n \,\mathrm{d}\lambda_1 \to \int_I f \,\mathrm{d}\lambda_1$. ■

Corollary 5.1.10. Let f be Bochner integrable. Then the sequence s_n of simple functions converging to f can be chosen such that $\|s_n(t)\|_X \le 2\|f(t)\|_X$ holds for a.e. $t \in I$.

Proof. We can use the construction from Theorem 5.1.8. ■

Corollary 5.1.11. Let $x' \in X^*$ and let f be Bochner integrable. Then

$$\int_I \langle x', f\rangle_X \,\mathrm{d}\lambda_1 = \Big\langle x', \int_I f \,\mathrm{d}\lambda_1 \Big\rangle_X.$$

Proof. By definition, for every s, a simple function, and every $x' \in X^*$,

$$\int_I \langle x', s\rangle_X \,\mathrm{d}\lambda_1 = \Big\langle x', \int_I s \,\mathrm{d}\lambda_1 \Big\rangle_X.$$

Let $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of simple function from the definition of the Bochner integral of f, possibly modified by Corollary 5.1.10, i.e. $\|s_n(t)\|_X \le 2\|f(t)\|_X$ a.e. in I. Then $\langle x', s_n\rangle_X \to \langle x', f\rangle_X$ a.e. in I and $|\langle x', s_n(t)\rangle_X| \le 2\|x'\|_{X^*}\|f(t)\|_X$ a.e. in I. Thus by Corollary 5.1.9

$$\begin{aligned}\int_I \langle x', f\rangle_X \,\mathrm{d}\lambda_1 &= \lim_{n\to\infty} \int_I \langle x', s_n\rangle_X \,\mathrm{d}\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \Big\langle x', \int_I s_n \,\mathrm{d}\lambda_1 \Big\rangle_X \\ &= \Big\langle x', \int_I f \,\mathrm{d}\lambda_1 \Big\rangle_X,\end{aligned}$$

where the last equality follows from the continuity of x' and the definition of the Bochner integral. ■

Corollary 5.1.12. Let f be Bochner integrable over I. Then

$$\lim_{\lambda_1(J)\to 0^+, J\subset I} \int_J f \,\mathrm{d}\lambda_1 = 0 \in X.$$

Proof. As $\|f\|_X$ is Lebesgue integrable by the Bochner Theorem 5.1.8, then

$$\Big\| \int_J f \,\mathrm{d}\lambda_1 \Big\|_X \le \int_J \|f\|_X \,\mathrm{d}\lambda_1 \to 0$$

as $J \subset I$, $\lambda_1(J) \to 0$, hence $\int_J f \,\mathrm{d}\lambda_1 \to 0 \in X$. ■

We finish by a generalization of the Fubini theorem for the Bochner integral.

Theorem 5.1.13 — Fubini. Let $J = I_1 \times I_2$ be a product measure space with respect to the measure $\lambda_1 \otimes \lambda_1 = \lambda_2$ and let $f\colon J \to X$ be measurable. Assume that the integral

$$\int_{I_1} \int_{I_2} \|f\|_X \,\mathrm{d}\lambda_1 \,\mathrm{d}\lambda_1$$

exists. Then f is Bochner integrable over $I_1 \times I_2$ and we have

$$\int_{I_1\times I_2} f \,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_{I_1} \int_{I_2} f \,\mathrm{d}\lambda_1 \,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_{I_2} \int_{I_1} f \,\mathrm{d}\lambda_1 \,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Conversely, if f is Bochner integrable over $I_1 \times I_2$, then the integrals above exist and the equalities hold.

Proof. If the double integral exists, then the Fubini theorem for the scalar case implies that $\|f\|_X$ is integrable and therefore f is integrable by virtue of the Bochner Theorem. Further, the integrals $\int_{I_i} \|f(t_1,t_2)\|_X \,\mathrm{d}\lambda_1(t_i)$, $i = 1, 2$ also exist a.e. on I_j, $i \cdot j = 2$, and the same is true for $\int_{I_i} f(t_1,t_2) \,\mathrm{d}\lambda_1(t_i)$, $i = 1, 2$. Recall that f is almost separably valued and the functions $t_j \mapsto \int_{I_i} \|f(t_1,t_2)\|_X \,\mathrm{d}\lambda_1(t_i)$ are almost separably valued as well. For arbitrary $x' \in X^*$ the duality pairing $\langle x', f\rangle_X$ is measurable and integrable ($\langle x', f\rangle_X \le \|x'\|_{X^*}\|f\|_X$).

By virtue of the scalar version of the Fubini theorem the functions

$$t_j \mapsto \int_{I_i} f(t_1,t_2) \,\mathrm{d}\lambda_1(t_i),$$

$i \cdot j = 2$, are measurable and integrable. Hence these functions are equal to

$$\left\langle x', \int_{I_i} f(t_1,t_2)\,\mathrm{d}\lambda_1(t_i)\right\rangle_X.$$

The Pettis theorem yields that $t_j \mapsto \int_{I_i} f(t_1,t_2)\,\mathrm{d}\lambda_1(t_i)$, $i \cdot j = 2$ are measurable and thus by Bochner integral integrable. For $x' \in X^*$ the Fubini theorem yields that

$$\int_{I_1\times I_2} \langle x', f\rangle_X\,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_{I_1}\int_{I_2} \langle x', f\rangle_X\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_{I_2}\int_{I_1} \langle x', f\rangle_X\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Therefore we may interchange the integration and the duality pairing with x' in the line above. Hence the claim holds.

Conversely, if f is Bochner integrable, then $\|f\|_X$ is integrable due to the Bochner Theorem. Fubini's Theorem for the scalar case yields that

$$\int_{I_1}\int_{I_2} \|f\|_X\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_1$$

exists and we may use the first part of the proof. ■

5.2 The spaces $L^p(I;X)$

We now introduce an analogue of the Lebesgue spaces.

Definition 5.2.1 A measurable function $f \in L^p(I;X)$, $1 \le p \le \infty$, if for $1 \le p < \infty$

$$\int_I \|f\|_X^p\,\mathrm{d}\lambda_1 < \infty,$$

and for $p = \infty$

$$\operatorname*{ess\,sup}_I \|f\|_X < \infty.$$

Remark 5.2.2. Note that a function form $L^p(I;X)$ is (recall that I is bounded) Bochner integrable. In case we would accept the possibility that I is unbounded, then the function is at least locally Bochner integrable over I. We also introduce the notation

$$\|f\|_{L^p(I;X)} := \begin{cases} 1 \le p < \infty \left(\int_I \|f\|_X^p\,\mathrm{d}\lambda_1\right)^{\frac{1}{p}}, \\ \quad p = \infty\ \operatorname{ess\,sup}_I \|f\|_X. \end{cases}$$

We now prove several results which are more or less similar to the standard results for Lebesgue spaces and which will finally lead to the result that the spaces defined above (sometimes called Bochner–Lebesgue spaces) are complete normed spaces.

Lemma 5.2.3 Let $1 \le p \le \infty$, $f \in L^p(I;X)$ and $g \in L^{p'}(I;\mathbb{R})$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$. Then $f \cdot g \in L^1(I;X)$ and

$$\left\|\int_I fg\,\mathrm{d}\lambda_1\right\|_X \le \int_I \|f\|_X|g|\,\mathrm{d}\lambda_1 \le \|f\|_{L^p(I;X)}\|g\|_{L^{p'}(I)}.$$

Proof. Evidently, fg is measurable as both functions are limits of simple functions. Using now the standard Hölder inequality

$$\int_I \|fg\|_X\,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_I \|f\|_X|g|\,\mathrm{d}\lambda_1 \le \|f\|_{L^p(I;X)}\|g\|_{L^{p'}(I)}.$$

By virtue of Bochner Theorem 5.1.8 we conclude $fg \in L^1(I;X)$ and the second part of the estimate holds. The first part is trivial. ■

Lemma 5.2.4 Let $1 \le p \le \infty$, $f \in L^p(I;X)$ and $g \in L^{p'}(I : X^*)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$ and X^* is the dual space to X. Then $\langle g, f\rangle_X \in L^1(I;\mathbb{R})$ and

$$\left|\int_I \langle g, f\rangle_X\,\mathrm{d}\lambda_1\right| \le \|f\|_{L^p(I;X)}\|g\|_{L^{p'}(I;X^*)}.$$

Proof. The proof is similar to Lemma 5.2.3 as $\langle g, f\rangle_X$ is measurable due to the fact that it is a limit of $\langle s_n', s_n\rangle_X$ which is a simple function with values in $\mathbb{R}$. The estimate follows then by virtue of the standard Hölder inequality. ■

Corollary 5.2.5. We have for $1 \le p \le q \le \infty$ that $L^q(I;X) \hookrightarrow L^p(I;X)$ and

$$\|f\|_{L^p(I;X)} \le \lambda_1(I)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_{L^q(I;X)}.$$

In general, for I possibly unbounded, we have at least that any $f \in L^q(I;X)$ is locally integrable over I and belongs to $L^1_{loc}(I;X)$.

Proof. The proof is a trivial consequence of the results above. ■

Lemma 5.2.6 Let $1 \le p \le \infty$ and let $f_n \to f$ in $L^p(I;X)$. Then there exists a subsequence $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ which converges to f a.e. in I (in the norm of X).

Proof. The sequence $\|f_n - f\|_X$ converges to zero in $L^p(I;X)$, hence there exists a subsequence $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ such that $\|f_{n_k} - f\|_X$ converges to zero pointwise a.e. Therefore $f_{n_k} \to f$ pointwise a.e. in I. ■

As in the scalar case we therefore have

Theorem 5.2.7 The spaces $L^p(I;X)$ are Banach spaces with respect to the norms $\|f\|_{L^p(I;X)}$ introduced above, where we consider two functions identical, $f_1 = f_2$, provided $f_1(t) = f_2(t)$ for a.e. $t \in I$ (in the sense of equality in X).

If $p = 2$ and X is a Hilbert space, then $L^2(I;X)$ is a Hilbert space with respect to the scalar product

$$(f,g)_{L^2(I;X)} := \int_I (u,v)_X \,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Proof. The proof is similar to the scalar case $X = \mathbb{R}$. ■

We now study the question of the density for different classes of functions in the spaces $L^p(I;X)$ and the related question of the separability of these function spaces. We denote (recall, I is a bounded, open interval in $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}
C(I;X) &= \{f\colon I \to X;\ \text{continuous}\},\\
C^k(I;X) &= \{f\colon I \to X; f, f', \dots, f^{(k)}\ \text{continuous}\},\\
C(\overline{I};X) &= \{f\colon I \to X;\ \text{continuous up to the endpoints}\},\\
C^k(\overline{I};X) &= \{f\colon I \to X; f, f', \dots, f^{(k)}\ \text{continuous up to the endpoints}\},\\
C_c(I;X) &= \{f\colon I \to X; f \in C(I;X), f\ \text{compactly supported in}\ I\},\\
C^\infty(\overline{I};X) &= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\overline{I};X),\\
C_c^\infty(\overline{I};X) &= C^\infty(\overline{I};X) \bigcap C_c(I;X).
\end{aligned}$$

Theorem 5.2.8 Let $1 \le p < \infty$. Then
(i) Simple functions are dense in $L^p(I;X)$
(ii) Functions of the form $s(t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(t)x_j$, $\varphi_j \in C_c^\infty(I;\mathbb{R})$, $x_j \in X$, are dense in $L^p(I;X)$
(iii) If the space Y is dense in X, then $C_c^\infty(I;Y)$ is dense in $L^p(I;X)$
(iv) Let ω_ε be the regularizing kernel in $\mathbb{R}$ and suppose f is extended by zero outside I; then $f \star \omega_\varepsilon \to f$ in $L^p(I;X)$ for $\varepsilon \to 0^+$

Proof. (i) Let $f \in L^p(I;X)$ be given. Then there exist a sequence of simple functions $\{\widetilde{s}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ such that $\widetilde{s}_n \to f$ a.e. in I. Define

$$s_n(t) := \begin{cases} \widetilde{s}_n(t) & \text{if } \|\widetilde{s}_n\|_X \le 1 + \|f\|_X,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Then $s_n(t) \to f(t)$ for a.e. $t \in I$, but also $\|s_n(t)\|_X \le 1 + \|f(t)\|_X$ for all $t \in I$. Hence

$$\|s_n - f\|_X^p \le (1 + 2\|f\|_X)^p \in L^1(I).$$

We may therefore use the Lebesgue Dominated Convergence Theorem (Theorem A.3.3) to conclude.
(ii) We know that functions of the type

$$\sum_{j=1}^n \chi_{E_j}(t)x_j, \qquad x_j \in X$$

are dense in $L^p(I;X)$. We may approximate the characteristic functions of a measurable set in $\mathbb{R}$ (in the norm of $L^p(I;\mathbb{R})$) by smooth compactly supported functions in I exactly as for the standard theory of the Lebesgue spaces, which yields the result.
(iii) Functions

$$s_n(t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(t)x_j, \qquad \varphi_j \in C_c^\infty(I;\mathbb{R}),\ x_j \in X$$

can be approximated in $L^p(I;X)$ by

$$\widetilde{s}_n(t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(t)y_j, \qquad \varphi_j \in C_c^\infty(I;\mathbb{R}),\ y_j \in Y$$

which yields the result.
(iv) Let $\eta > 0$. We find $v \in C_c^\infty(I;X)$ such that $\|f - v\|_{L^p(I;X)} < \eta$. Then we write

$$f - \omega_\varepsilon \star f = f - v + v - \omega_\varepsilon \star v + \omega_\varepsilon \star v - \omega_\varepsilon \star f.$$

Since

$$\omega_\varepsilon \star v - v \rightrightarrows 0 \quad \text{ in } I$$

by standard argument for mollification, we have for ε sufficiently small using triangle and Young inequalities

$$\begin{aligned}\|f - \omega_\varepsilon \star f\|_{L^p(I;X)} &\le \|f - v\|_{L^p(I;X)} + \|v - \omega_\varepsilon \star v\|_{L^p(I;X)} \\ &\quad + \|\omega_\varepsilon\|_{L^1(I;\mathbb{R})}\|f - v\|_{L^p(I;X)} < 3\eta,\end{aligned}$$

which finishes the proof. ■

Corollary 5.2.9. Let X be a separable Banach space, then $L^p(I;X)$ is separable for $1 \le p < \infty$.

Proof. It is a consequence of Theorem 5.2.8, item (iii), combined with the standard approach based on density of polynomials with rational coefficients in $C(\overline{I})$. ■

Theorem 5.2.10 — Lebesgue Points. Let $f \in L^1_{loc}(I;X)$. Then

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \|f(t+s) - f(t)\|_X \,\mathrm{d}\lambda_1(s) \to 0$$

for $h \to 0^+$ for a.e. $t \in I$. In particular,

$$f(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(t+s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s)$$

a.e. in I.

Proof. As f is measurable, then f is almost separably valued and therefore we may without loss of generality assume that X is separable. Let $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be a countable dense subset of X and consider functions $\|f - x_n\|_X$. By the Theorem on Lebesgue Points for scalar-valued functions we know that

$$\|f - x_n\|_X = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \|f(t+s) - x_n\|_X \,\mathrm{d}\lambda_1(s)$$

for all $t \in I \setminus N_n$, where $\lambda_1(N_n) = 0$. Let $N = \cup_{n\in\mathbb{N}} N_n$. Then $\lambda_1(N) = 0$. Let $\eta > 0$, $t \in I \setminus N$ and let $n \in \mathbb{N}$ be such that $\|f(t) - x_n\|_X < \frac{\varepsilon}{2}$. Then

$$\begin{aligned}0 &\le \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \|f(t+s) - f(t)\|_X \,\mathrm{d}\lambda_1(s) \\ &\le \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \Big(\|f(t+s) - x_n\|_X + \|f(t) - x_n\|_X\Big)\,\mathrm{d}\lambda_1(s) \\ &\le \|f(t) - x_n\|_X < \varepsilon.\end{aligned}$$

The second claim follows as in the scalar case. ■

Finally, we have

Lemma 5.2.11 Let f_n be a sequence of functions from $L^p(I;X)$, $1 \le p \le \infty$ such that $\|f_n\|_{L^p(I;X)} \le C < +\infty$ for all $n \in \mathbb{N}$, Let there exists $f\colon I \to X$ such that for all $t \in I$

$$f_n \rightharpoonup f(t) \qquad \text{in } X.$$

Then $f \in L^p(I;X)$ and $\|f\|_{L^p(I;X)} \le C$.

Proof. By Corollary 5.1.6 the function f is measurable. For $t \in I$ choose $x'(t) \in X^*$ such that $\|x'(t)\|_{X^*} = 1$ and $\langle x'(t), f(t)\rangle_X = \|f(t)\|_X$. By Fatou lemma for $1 \le p < \infty$

$$\begin{aligned}\|f\|^p_{L^p(I;X)} &= \int_I \|f(t)\|_X^p \,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_I \langle x'(t), f(t)\rangle_X \,\mathrm{d}\lambda_1 \\ &= \int_I \lim_{n\to\infty} |\langle x'(t), f_n(t)\rangle_X|^p \,\mathrm{d}\lambda_1 \le \liminf_{n\to\infty} \int_I |\langle x'(t), f_n(t)\rangle_X| \,\mathrm{d}\lambda_1 \\ &\le \liminf_{n\to\infty} \int_I \|f_n\|_x^p \,\mathrm{d}\lambda_1 \le C^p,\end{aligned}$$

hence $f \in L^p(I;X)$. For $p = \infty$ we first proceed for $p < \infty$ as above and then pass with $p \to \infty$. ■

5.2.1 The Radon–Nikodym Property and the dual space to $L^p(I;X)$

We might expect that the dual space to $L^p(I;X)$ for $p<\infty$ is $L^{p'}(I;X^*)$. However, this is in general not true for arbitrary Banach space and we have to add some properties of X. On the other hand, using Lemma 5.2.4, we at least know that for arbitrary Banach space X we have

$$L^{p'}(I;X^*) \hookrightarrow \big(L^p(I;X)\big)^*.$$

Moreover, for any $g\in L^{p'}(I;X^*)$ we also have

$$\|g\|_{(L^p(I;X))^*} \le \|g\|_{L^{p'}(I;X)}. \tag{5.1}$$

In fact, we also have:

Proposition 5.2.12. *For $1\le p<\infty$ the inclusion mapping $I\colon L^{p'}(I;X^*)\to \big(L^p(I;X)\big)^*$ is an isometry, i.e. equality in* (5.1) *holds.*

Proof. First, let $g=\sum_{i=1}^\infty x_i'\chi_{E_i}(t)\in L^{p'}(I;X^*)$, where $x_i'\in X^*$, E_i, $i\in\mathbb{N}$ are pairwise disjoint and $\cup_{i=1}^\infty E_i=I$. Then $\|g\|_{X^*}\in L^{p'}(I;\mathbb{R})$ and there exists a non-negative function $h\in L^p(I;\mathbb{R})$ such that $\|h\|_{L^p(I;\mathbb{R})}=1$ and

$$\|g\|_{L^{p'}(I;\mathbb{R})} = \|\,\|g\|_{X^*}\,\|_{L^{p'}(I)} \le \int_I h\|g\|_{X'}\,\mathrm{d}\lambda_1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Choose $x_i\in X$, $\|x\|_X=1$ such that

$$\|x_i'\|_{X^*} \le \langle x_i', x_i\rangle_X + \frac{\varepsilon}{2\|h\|_{L^1(I;\mathbb{R})}}$$

and define $f:=\sum_{i=1}^\infty x_i h\chi_{E_i}(t)$. Then

$$\|f\|^p_{L^p(I;X)} = \sum_{i=1}^\infty \int_{E_i}\|x_i\|_X^p h^p\,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_I h^p\,\mathrm{d}\lambda_1 = \|h\|^p_{L^p(I;\mathbb{R})}=1$$

and for this f

$$\begin{aligned}
\int_I \langle g,f\rangle_X\,\mathrm{d}\lambda_1 &= \int_I \Big\langle g, \sum_{i=1}^\infty h(t)x_i\chi_{E_i}(t)\Big\rangle_X\,\mathrm{d}\lambda_1\\
&= \int_I h(t)\sum_1^\infty \big\langle x_i', x_i\big\rangle_X \chi_{E_i}(t)\,\mathrm{d}\lambda_1\\
&\ge \int_I h(t)\sum_{i=1}^\infty \Big(\|x_i'\|_{X^*} - \frac{\varepsilon}{2\|h\|_{L^1(I;\mathbb{R})}}\Big)\chi_{E_i}(t)\,\mathrm{d}\lambda_1\\
&= \int_I h(t)\|g\|_{X^*}\,\mathrm{d}\lambda_1 - \frac{\varepsilon}{2} \ge \|g\|_{L^{p'}(I;X^*)}-\varepsilon.
\end{aligned}$$

Therefore, as we may obtain this inequality for arbitrary $\varepsilon>0$,

$$\|g\|_{(L^p(I;X))^*} \ge \|g\|_{L^{p'}(I;X^*)},$$

and the equality holds.

If $g\in L^{p'}(I;X^*)$ is arbitrary, then there exists a sequence $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ such that g_n are countably valued, $g_n\to g$ in $L^{p'}(I;X^*)$. As $\|g_n-g\|_{(L^p(I;X))^*}\le \|g_n-g\|_{L^{p'}(I;X^*)}$, the convergence holds also in $\big(L^p(I;X)\big)^*$ and thus

$$\|g\|_{(L^p(I;X))^*} = \lim_{n\to\infty}\|g_n\|_{(L^p(I;X))^*} = \lim_{n\to\infty}\|g_n\|_{L^{p'}(I;X^*)} = \|g\|_{L^{p'}(I;X^*)}.$$

Note that we used that I is bounded. The proof can be extended to unbounded interval by approximation of the unbounded interval by a sequence of bounded intervals. ■

We have the following abstract result the proof of which can be found in [Benyamini and Lindenstrauss, 2000, Theorem 5.21].

Theorem 5.2.13 — Radon–Nikodym–Rademacher Property. Let X be a Banach space and $I\subset\mathbb{R}$ an interval. Then the following two assertions are equivalent:
(i) For any vector measure $\nu\colon\Sigma\to X$ with bounded variations, where Σ denotes the σ-algebra of measurable subsets of I with respect to the Lebesgue measure λ_1, that is absolutely continuous with respect to λ_1, there exists $f\in L^1(I;X)$ such that

$$\nu(A)=\int_A f\,\mathrm{d}\lambda_1$$

for any $A\in\Sigma$.

(ii) Every Lipschitz continuous function $f\colon I \to X$ is differentiable a.e. in I.

The first property is called the Radon–Nikodym property, the second one the Rademacher property.

We will now present one class of spaces that possess property (ii).

Proposition 5.2.14 (Modified Dunford–Pettis theorem). *Let X be a separable reflexive (real) Banach space. Then X has the Rademacher property.*

Proof. We will show that for X separable reflexive Banach space the claim (ii) from Theorem 5.2.13 holds true. Let $F\colon I \to X$ be a Lipschitz continuous function with Lipschitz constant L. Let $a \in I$. We may assume without loss of generality that $F(a) = 0$ and $L = 1$ (we may consider $G(t) := \frac{F(x)-F(a)}{L}$). Therefore for any $y \in X^*$ the function $\langle y, F(\cdot)\rangle_X$ is Lipschitz continuous with the Lipschitz constant bounded by $\|y\|_{X^*}$.

By the scalar version of the Rademacher theorem there exists g_y, unique up to sets of measure zero, such that $\|g\|_{L^\infty(I;\mathbb{R})} \le \|y\|_{X^*}$, and

$$\langle y, F(t)\rangle_X = \int_a^t g_y(s)\,\mathrm{d}\lambda_1 \qquad \text{a.e. in } I.$$

As X is separable and reflexive, then X^* is also separable. Let $D \subset X^*$ be a countable dense subset and consider $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$ for some $n \in \mathbb{N}$, $y_i \in D$ and $\alpha_i \in \mathbb{Q}$. Then

$$\begin{aligned}\langle y, F(t)\rangle_X &= \Big\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i, F(t)\Big\rangle_X = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle y_i, F(t)\rangle_X \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_a^t g_{y_i}(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s) = \int_a^t \sum_{i=1}^n \alpha_i g_{y_i}(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s),\end{aligned}$$

hence

$$g_y = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_{y_i}.$$

Therefore

$$\Big|\sum_{i=1}^n \alpha_i g_{y_i}(s)\Big| = |g_y(s)| \le \|g_y\|_{L^\infty(I;\mathbb{R})} \le \|y\|_{X^*} = \|\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i\|_{X^*} \tag{5.2}$$

for a.e. $t \in I$. Thus there exists a null set $E \subset I$ such that (5.2) holds for every $t \in I \setminus E$ and all choices $(n \in \mathbb{N}; \{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset (\mathbb{Q})^n; \{y_i\}_{i=1}^n)$. As $\mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$, the estimate holds for all choices $(n \in \mathbb{N}; \{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^n; \{y_i\}_{i=1}^n)$. Thus $y \mapsto g_y(t)$ is a linear mapping from the span of D to $\mathbb{R}$ with a norm bounded by 1. By density of D it can be uniquely extended to X^*. We obtain an element $f(t) \in X^{**}$, $\|f(t)\|_{X^{**}} \le 1$. We identify this element, via the canonical mapping, with an element from X (we use the same notation) and $\|f(t)\|_X = 1$. Therefore we have for all $y \in D$ and a.e. $s \in I$ that

$$g_y(s) = \langle y, f(s)\rangle_X$$

which is measurable and bounded. Let $y \in X^*$ and $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ such that $y_n \to y$ in Y. Then $g_{y_n}(s) = \langle y_n, f(\cdot)\rangle_X$ are measurable and bounded by $\|y_n\|_{X^*}$. Therefore $\langle y, f(\cdot)\rangle_X$ is measurable and

$$\begin{aligned}\langle y, F(t)\rangle_X &= \lim_{n\to\infty} \langle y_n, F(t)\rangle_X = \lim_{n\to\infty} \int_a^t g_{y_n}(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_a^t \langle y_n, f(s)\rangle_X\,\mathrm{d}\lambda_1(s) = \int_a^t \langle y, f(s)\rangle_X\,\mathrm{d}\lambda_1(s).\end{aligned}$$

Now, as f is measurable due to Pettis Theorem 5.1.4 (it is weakly measurable and X is separable) and bounded, it is Bochner integrable and

$$\langle y, F(t)\rangle_X = \int_a^t \big\langle y, f(s)\big\rangle_X\,\mathrm{d}\lambda_1(s) = \Big\langle y, \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s)\Big\rangle_X$$

for all $y \in X^*$. Hence

$$F(t) = \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s)$$

and by Theorem on Lebesgue Points (Theorem 5.2.10) the function F is a.e. differentiable on I. Whence X has the Rademacher property and by means of Theorem 5.2.13 also the Radon–Nikodym property. ■

Remark 5.2.15. In fact, the previous proposition holds also under less restrictive assumptions. It is enough if either X is reflexive or $X = Y^*$ and X is separable. The proof is similar and requires only few changes.

The previous proposition has the following connection to the characterization of the dual space to $L^p(I;X)$.

Theorem 5.2.16 — Duality. Let X be a Banach space such that X^* has the Radon–Nikodym property. Then $\big(L^p(I;X)\big)^*$ is isometrically isomorphic to the space $L^{p'}(I;X^*)$ for $1 \le p < \infty$.

Proof. We use the Radon–Nikodym characterization. Let Σ denote all measurable subsets of I and recall that I is bounded. We define for $l \in \big(L^p(I;X)\big)^*$ a vector measure $\nu\colon \Sigma \to X^*$ as

$$\langle \nu(E), x\rangle_X = \langle l, x\chi_E\rangle_{L^p(I;X)}$$

for any $E \in \Sigma$, $x \in X$. Then

$$\begin{aligned}\big|\langle l, x\chi_E\rangle_{L^p(I;X)}\big| &\le \|l\|_{(L^p(I;X))^*}\|x\chi_E\|_{L^p(I;X)}\\ &= \|l\|_{(L^p(I;X))^*}\|x\|_X(\lambda_1(E))^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Therefore $\nu(E) \in X^*$ and $\|\nu(E)\|_{X^*} \le \|l\|_{(L^p(I;X))^*}(\lambda_1(E))^{\frac{1}{p}}$. Let $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be pairwise disjoint and measurable. Let $x \in X$. Then

$$\begin{aligned}\big\langle \nu\big(\cup_{n=1}^\infty E_n\big), x\big\rangle_X &= \langle l, x\chi_{\cup_{n=1}^\infty E_n}\rangle_{L^p(I;X)} = \Big\langle l, \sum_{n=1}^\infty x\chi_{E_n}\Big\rangle_{L^p(I;X)}\\ &= \sum_{n=1}^\infty \langle l, x\chi_{E_n}\rangle_{L^p(I;X)} = \sum_{n=1}^\infty \langle \nu(E_n), x\rangle_X.\end{aligned}$$

Note that all series converge as $\langle l, x\chi_{\cup_{n=1}^\infty E_n}\rangle_{L^p(I;X)}$ converge. Finally, let us show that ν has bounded variation. We have for E_i

$$\|\nu(E_i)\|_{X^*} = \sup_{\|x_i\|_X=1}\langle \nu(E_i), x_i\rangle_X = \sup_{\|x_i\|_X=1}\langle l, x_i\chi_{E_i}\rangle_{L^p(I;X)}.$$

Therefore for any partition π of I

$$\begin{aligned}\sum_{E_i\in\pi}\|\nu(E_i)\|_{X^*} &= \sum_{E_i\in\pi}\sup_{\|x_i\|_X=1}\langle l, x_i\chi_{E_i}\rangle_{L^p(I;X)}\\ &= \sup_{\|x_i\|_X=1\forall i}\sum_{E_i\in\pi}\langle l, x_i\chi_{E_i}\rangle_{L^p(I;X)}.\end{aligned}$$

As

$$\begin{aligned}\sum_{E_i\in\pi}\big\langle l, x_i\chi_{E_i}\big\rangle_{L^p(I;X)} &= \sum_{E_i\in\pi}\Big\langle l, \sum_{E_i\in\pi} x_i\chi_{E_i}\Big\rangle_{L^p(I;X)}\\ &\le \|l\|_{(L^p(I;X))^*}\|x_i\chi_{E_i}\|_{L^p(I;X)}\\ &\le \|l\|_{(L^p(I;X))^*}\Big(\sum_{E_i\in\pi}\|x_i\|_X^p\lambda_1(E_i)\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\le \|l\|_{(L^p(I;X))^*}\Big(\lambda_1(I)\Big)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

we have

$$|\nu|(I) \le \|l\|_{(L^p(I;X))^*}\Big(\lambda_1(I)\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

and ν is of bounded variation. Recall X^* has the Radon–Nikodym property, hence there exists $g \in L^1(I;X^*)$ such that

$$\nu(E) = \int_E g\,\mathrm{d}\lambda_1, \qquad E \in \Sigma.$$

Let $s = \sum_{i=1}^n x_i\chi_{E_i}(t)$ be a simple function. Then

$$\begin{aligned}\langle l, s\rangle_{L^p(I;X)} &= \sum_{i=1}^n\langle l, x_i\chi_{E_i}\rangle_{L^p(I;X)} = \sum_{i=1}^n\langle \nu(E_i), x_i\rangle_{L^p(I;X)}\\ &= \sum_{i=1}^n\Big\langle \int_{E_i} g\,\mathrm{d}\lambda_1, x_i\Big\rangle_X = \sum_{i=1}^n\int_{E_i}\langle g, x_i\rangle_X\,\mathrm{d}\lambda_1\\ &= \sum_{i=1}^n\int_I\langle g, x_i\chi_{E_i}\rangle_X\,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_I\langle g, s\rangle_X\,\mathrm{d}\lambda_1.\end{aligned}$$

We need to extend the formula for arbitrary L^p-function. We define the set $E_n := \{t \in I; \|g(t)\|_{X^*} \le n\}$. Recall that $\cup_{n=1}^\infty E_n = I \setminus E$, where $\lambda_1(E) = 0$. For a fixed n we have $g\chi_{E_n} \in L^\infty(I;X^*) \subset L^{p'}(I;X^*)$ and thus

$$f \mapsto \int_{E_n}\langle g, f\rangle_X\,\mathrm{d}\lambda_1$$

is a bounded functional in $\big(L^p(I;X)\big)^*$ which is equal to $\langle l, f\rangle_{L^p(I;X)}$ if f is a simple function supported in E_n. For any $f \in L^p(I;X)$ there exists a sequence $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ supported in E_n which converge to $f\chi_{E_n}$ in the a.e. in I in the $L^p(I;X)$ norm. Thus

$$\begin{aligned}\langle l, f\chi_{E_n}\rangle_{L^p(I;X)} &= \lim_{k\to\infty}\langle l, s_k\rangle_{L^p(I;X)} = \lim_{k\to\infty}\int_{E_n}\langle g, s_k\rangle_X \,\mathrm{d}\lambda_1\\ &= \int_{E_n}\langle g, f\rangle_X \,\mathrm{d}\lambda_1,\end{aligned}$$

where the last equality is a consequence of $g\chi_{E_n} \in L^{p'}(I;X^*) \subset \big(L^p(I;X)\big)^*$. Then we can compute

$$\begin{aligned}\|g\chi_{E_n}\|_{L^{p'}(I;X^*)} = \|g\chi_{E_n}\|_{(L^p(I;X))^*} &= \sup_{\|f|_{L^p(I;X)}\le 1}\int_I \langle g\chi_{E_n}, f\rangle_X \,\mathrm{d}\lambda_1\\ &= \sup_{\|f|_{L^p(I;X)}\le 1}\int_{E_n}\langle g, f\rangle_X \,\mathrm{d}\lambda_1 = \sup_{\|f|_{L^p(I;X)}\le 1}\langle l, f\chi_{E_n}\rangle_{(L^p(I;X))^*}\\ &\le \|l\|_{L^p(I;X)}.\end{aligned}$$

We have that $\|g\chi_n\|_{X^*} \to \|g\|_{X^*}$ for $n \to \infty$ for a.e. $t \in I$ and the convergence is monotonically incresing. By the Monotone Convergence Theorem then $g \in L^{p'}(I;X^*)$, $\|g\|_{L^{p'}(I;X^*)} \le \|l\|_{(L^p(I;X))^*}$. We now have

$$\begin{aligned}\langle l, f\rangle_{L^p(I;X)} &= \lim_{n\to\infty}\langle l, f\chi_{E_n}\rangle_{L^p(I;X)} = \lim_{n\to\infty}\int_{E_n}\langle g, f\rangle_X \,\mathrm{d}\lambda_1\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_I \langle g\chi_{E_n}, f\rangle_X \,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_I \langle g, f\rangle_X \,\mathrm{d}\lambda_1\end{aligned}$$

for all $f \in L^p(I;X)$. Thus $\big(L^p(I;X)\big)^* = L^{p'}(I;X^*)$ in the sense that the identity mapping conserves the norm and is bijective. For unbounded intervals we may proceed by means of an approximation of the interval by bounded ones. ■

Remark 5.2.17. Using the remark before this theorem we see that we can identify $\big(L^p(I;X)\big)^*$ with $L^{p'}(I;X^*)$ if either X is reflexive of if X^* is separable.

Corollary 5.2.18. If X is reflexive and separable, $1 < p < \infty$, then $L^p(I;X)$ is reflexive.

Proof. We know that $\big(L^p(I;X)\big)^{**} \cong L^p(I;X^{**}) \cong L^p(I;X)$. To show the reflexivity, we proceed similarly as in the case of the standard L^p-spaces. ■

As above, Corollary 5.2.18 holds if X is merely reflexive.

5.3 Spaces $W^{1,p}(I;X)$

Definition 5.3.1 Let $u \in L^1_{loc}(I;X)$ and $g \in L^1_{loc}(I;X)$. We say that g is weak derivative of u with respect to t, i.e., $g = u'$, if

$$\int_I u(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}\lambda_1(t) = -\int_I g(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}\lambda_1(t)$$

for all $\varphi \in C_c^\infty(I;\mathbb{R})$.

We have

Proposition 5.3.2. *Let $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R};X)$. Define for any $h > 0$*

$$M_h(f)(t) := \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s). \tag{5.3}$$

Then $M_h(f) \in L^p(\mathbb{R};X) \cap C(\mathbb{R};X)$ and

$$\lim_{h\to 0^+} M_h(f) = f$$

in $L^p(\mathbb{R};X)$ and a.e. in $\mathbb{R}$ (in the sense of convergence in X).

Proof. As $I = [t, t+h]$ is finite, $f \in L^1(I;\mathbb{R})$, thus (5.3) is well defined. Let $t_n \to t$. We set $f_n(s) := f(s)\chi_{[t_n,t_n+h]}$. Then f_n is bounded by f and on $[t_n, t_n+h]$, $f_n \to f$ a.e. (in the sence of convergence in X). By the Dominated Convergence Theorem (Corollary 5.1.9) we have

$$M_h(f)(t_n) \to M_h(f)(t),$$

hence $M_h(f)$ is continuous. By Hölder's inequality

$$\|M_h(f)(t)\|_X \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|f(s)\|_X \,\mathrm{d}\lambda_1(s) \leq h^{\frac{1}{p'}-1}\Big(\int_t^{t+h} \|f(s)\|_X^p \,\mathrm{d}\lambda_1(s)\Big)^{\frac{1}{p}},$$

hence

$$\|M_h(f)(t)\|_X^p \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|f(s)\|_X^p \,\mathrm{d}\lambda_1(s).$$

By standard Fubini's Theorem

$$\begin{aligned}
\|M_h(f)(t)\|_{L^p(I;X)}^p &\leq \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}}\int_h^{t+h} \|f(s)\|_X^p \,\mathrm{d}\lambda_1(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(t)\\
&= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}}\int_0^{h} \|f(t+s)\|_X^p \,\mathrm{d}\lambda_1(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(t)\\
&= \frac{1}{h}\int_0^{h}\int_{\mathbb{R}} \|f(t+s)\|_X^p \,\mathrm{d}\lambda_1(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(t) = \|f\|_{L^p(\mathbb{R};X)}^p,
\end{aligned}$$

thus $M_h(f) \in L^p(\mathbb{R};X)$ and $M_h \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R};X))$ with $\|M_h\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R};X))} \leq 1$.

We already know (see Theorem on Lebesgue Points, i.e. Theorem 5.2.10) that $M_h(f) \to f$ a.e. To show the convergence in the $L^p(\mathbb{R};X)$ norm, we compute

$$\begin{aligned}
\|f - M_h(f)\|_{L^p(\mathbb{R};X)} \leq{}& \|f-\varphi_n\|_{L^p(\mathbb{R};X)} + \|M_h(f-\varphi_n)\|_{L^p(\mathbb{R};X)}\\
&+ \|\varphi_n - M_h\varphi_n\|_{L^p(\mathbb{R};X)},
\end{aligned}$$

where $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R};X)$ is such that $\varphi_n \to f$ in $L^p(\mathbb{R};X)$. Then

$$\|f - M_h(f)\|_{L^p(\mathbb{R};X)} \leq 2\|f-\varphi_n\|_{L^p(\mathbb{R};X)} + \|\varphi_n - M_h\varphi_n\|_{L^p(\mathbb{R};X)},$$

and as $\|\varphi_n - M_h\varphi_n\|_X$ converges uniformly in $\mathbb{R}$ and both functions have bounded support, we proved that

$$\|f - M_h(f)\|_{L^p(\mathbb{R};X)} \to 0$$

for $h \to 0^+$. ∎

Remark 5.3.3. Note that if $f \in L^p(I;X)$ with I a bounded interval in $\mathbb{R}$, we can always extend f to $\mathbb{R}$ by zero outside I, so the previous proposition holds also in this case.

The previous proposition yields

Corollary 5.3.4. Let $g \in L^1_{loc}(I;X)$, $t_0 \in I$ and I is an open interval. Let

$$f(t) := \int_{t_0}^t g(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s).$$

Then $f \in C(I;\mathbb{R})$ and

$$f' = g$$

in the weak sense and a.e. in I.

Proof. In what follows we consider sufficiently small h so that $t+h$ and $t \in I$. We know that $M_h(g) = \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$, hence the continuity of f and differentiability a.e. follows from Proposition 5.3.2. We prove the weak differentiability. Let $\varphi \in C_c^\infty(I)$. Then

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}} f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda_1(t) &= -\int_I f(t) \lim_{h\to 0^+} \frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}\,\mathrm{d}\lambda_1(t)\\
&= -\lim_{h\to 0^+}\int_I f(t)\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}\,\mathrm{d}\lambda_1(t)\\
&= \lim_{h\to 0^+}\int_I \frac{f(t+h)-f(t)}{-h}\varphi(t)\,\mathrm{d}\lambda_1(t)\\
&= \lim_{h\to 0^+}\int_I M_{-h}(g)(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}\lambda_1(t).
\end{aligned}$$

By a direct modification of Proposition 5.3.2 we know that $M_{-h}g \to g$ a.e. and in $L^p(I;X)$ which implies that the last limit equals to $\int_I g\varphi \,\mathrm{d}\lambda_1(t)$. ∎

We further have

Corollary 5.3.5. Let $f \in L^1_{loc}(I;X)$ be such that $f' = 0$ a.e. in I. Then there exists $x_0 \in X$ such that $f = x_0$ a.e. in I.

Proof. Let $\vartheta \in C_c^\infty(I)$ be such that $\int_I \vartheta \, \mathrm{d}s = 1$. Define

$$x_0 := \int_I f\vartheta \, \mathrm{d}\lambda_1.$$

Let $\operatorname{supp}\vartheta \subset [a,b]$, $t_0 < a$. Then for any $\varphi \in C_c^\infty(I)$ we set

$$\psi(t) := \int_{t_0}^t \Big(\varphi(s) - \vartheta(s)\int_I \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s.$$

Hence $\psi \in C_c^\infty(I)$, and

$$0 = \int_I f\psi' \, \mathrm{d}\lambda_1 = \int_I f(t)\Big(\varphi(t) - \vartheta(t)\int_\varphi \mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}\lambda_1(t) = \int_I f\varphi\,\mathrm{d}\lambda_1 - x_0\int_I \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Therefore $f = x_0$ a.e. (by a variant of Du Bois-Reymond Lemma). ■

Definition 5.3.6 Let $1 \le p \le \infty$ and $u \in L^p(I;X)$ such that $u' \in L^p(I;X)$. Then we say that u belongs to the Sobolev–Bochner space $W^{1,p}(I;X)$ and we define

$$\|u\|_{W^{1,p}(I;X)} := \|u\|_{L^p(I;X)} + \|u'\|_{L^p(I;X)}.$$

Proposition 5.3.7. *Let $1 \le p \le \infty$, then $W^{1,p}(I;X)$ is a Banach space. If X is a Hilbert space, then $W^{1,2}(I;X)$ is a Hilbert space with respect to the scalar product*

$$(u,v)_{W^{1,p}(I;X)} := \int_I (u,v)_X \,\mathrm{d}\lambda_1 + \int_I (u',v')_X\,\mathrm{d}\lambda_1$$

for any u, $v \in W^{1,2}(I;X)$. The induced norm is an equivalent norm on $W^{1,2}(I;X)$.

Proof. Let u_n be a Cauchy sequence in $W^{1,p}(I;X)$. Then there exist u, $v \in L^p(I;X)$ such that $u_n \to u$ in $L^p(I;X)$ and $u_n' \to v$ in $L^p(I;X)$. Since evidently

$$\int_I u_n\varphi'\,\mathrm{d}\lambda_1 \to \int_I u\varphi'\,\mathrm{d}\lambda_1,$$
$$\int_I u_n'\varphi\,\mathrm{d}\lambda_1 \to \int_I u\varphi\,\mathrm{d}\lambda_1$$

(in X), we have that $u' = v$. Hence $W^{1,p}(I;X)$ is complete, the fact that the above defined functional is a norm, follows from properties of the norm in $L^p(I;X)$. The claim for the Hilbert spaces is trivial. ■

Proposition 5.3.8. *If X is reflexive and separable, then $W^{1,p}(I;X)$ is for $1 < p < \infty$ separable and reflexive.*

Proof. We know that under the assumptions of the proposition, the space $L^p(I;X)$ is separable and reflexive and so is $L^p(I;X) \times L^p(I;X)$. As $W^{1,p}(I;X)$ is a closed subset of $L^p(I;X)\times L^p(I;X)$, the claim follows. ■

Remark 5.3.9. The reflexivity holds if X is merely reflexive as well as the separability if X is only separable. This is a consequence of the remarks stated above; the separability follows from Corollary 5.2.9.

Proposition 5.3.10. *Let $1 \le p \le \infty$ and $u \in W^{1,p}(I;X)$. Then there exists $t_0 \in I$ such that for almost all $t \in I$*

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t u'(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s).$$

Proof. Let $t_1 \in I$ and let $g(t) = \int_{t_1}^t u'(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s)$. Let $w(t) = u(t) - g(t)$. By virtue of Corollary 5.3.4 we see that $w'(t) = 0$, hence Corollary 5.3.5 yields that $w(t) = x_0 \in X$. Thus $u(t) = x_0 + \int_{t_1}^t u'(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s)$ a.e. in I. We choose $t_0 \in I$ such that the previous equality holds, therefore

$$u(t) - u(t_0) = \int_{t_1}^t u'(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s) - \int_{t_1}^{t_0} u'(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s) = \int_{t_0}^t u'(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s).$$

■

In fact, Proposition 5.3.10 yields existence of $N \subset I$, a null set, such that $u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t u'(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s)$ for all t, $t_0 \in I \setminus N$. Recall that if $g \in L^1((a,b);X)$ and $f(t) = \int_a^t g(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s)$, then also $\|g\|_X \in L^1(a,b)$ and $f \in \mathrm{AC}([a,b];X)$ as $\|f\|_X \in \mathrm{AC}([a,b])$. Note that $f\colon [a,b] \to X$ is absolutely continuous on $[a,b]$ if $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0$: $\sum_{i=1}^n \|f(b_i) - f(a_i)\|_X < \varepsilon$ for all $\{[a_i,b_i\}_{i=1}^n$, disjoint collection of subintervals of I at the total length less than δ. Therefore, if $u \in W^{1,p}(I;X)$, then there exists a representative of u, a function $\widetilde{u} \in \mathrm{AC}([a,b];X)$ such that $\widetilde{u}$ is differentiable a.e., $\widetilde{u}' = u'$ and $\widetilde{u} = u$ a.e. in $[a,b]$. We therefore often assume that we work directly with this representative.

We further have

Proposition 5.3.11. *Let $1 \le p \le \infty$. We have $W^{1,p}(I;X) \hookrightarrow C(\overline{I};X)$, i.e. working with the representative from above, we have*

$$\|u\|_{C(\overline{I};X)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(I;X)}.$$

Proof. Due to Proposition 5.3.10

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} u'(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s)$$

holds for the continuous representative for any t_0, $t \in I$. Therefore

$$\max_{\overline{I}} \|u\|_X \le \|u(t_0)\|_X + \int_I \|u'\|_X \,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Furthermore,

$$\lambda_1(I)\|u(t_0)\|_X \le \int_I \|u\|_X \,\mathrm{d}\lambda_1 + \lambda_1(I)\int_I \|u'\|_X \,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Combining the last two inequalities we get the claim of the proposition. ■

Theorem 5.3.12 Let $u \in L^p(I;X)$, $1 \le p \le \infty$. Then the following assertions are equivalent.
(i) $u \in W^{1,p}(I;X)$
(ii) u is absolutely continuous on $\overline{I}$ and $u' \in L^p(I;X)$
(iii) there exists a function $v \in L^p(I;X)$ such that for all $x' \in X^*$ the function $\psi(t) := \langle x', u\rangle_X$ is absolutely continuous on I and $\psi' = \langle x', v\rangle_X$.

Proof. "(i) $\Longrightarrow$ (ii)" follows from Proposition 5.3.10 and the remark below it, and from Corollary 5.3.4.
"(ii) $\Longrightarrow$ (iii)" follows from the linearity of x' and from Corollary 5.1.11.
"(iii) $\Longrightarrow$ (i)" is more demanding. We define

$$g(t) := u(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s), \qquad t_0 \in I.$$

Then $g \in W^{1,p}(I;X)$ by Corollary 5.3.4. For any $x' \in X^*$ the function ψ defined above is absolutely continuous on $\overline{I}$, therefore by the standard properties of absolutely continuous functions

$$\langle x', u(t)\rangle_X = \psi(t) = \psi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \psi'(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s) = \langle x', u(t_0)\rangle_X + \int_{t_0}^{t} \langle x', v\rangle_X \,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Thus by Corollary 5.1.11

$$\langle x', g(t)\rangle_X = \langle x', u(t)\rangle_X,$$

which yields that

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s),$$

hence $u' = v$ and $u \in W^{1,p}(I;X)$. ■

Furthermore, we have

Theorem 5.3.13 Let $1 \le p < \infty$. Then $C^\infty(\overline{I};X)$ is dense in $W^{1,p}(I;X)$.

Proof. Let $u \in W^{1,p}(I;X)$. Then $u' \in L^p(I;X)$ and thus there exists a sequence $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of functions from $C_c^\infty(I;X)$ such that $\varphi_n \to u'$ in $L^p(I;X)$. By Proposition 5.3.10 there exists t_0 such that $u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} u'(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s)$ a.e. in I. Define

$$u_n(t) := u(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varphi_n(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s).$$

Then $u_n \in C^\infty(\overline{I};X)$, $u_n' = \varphi_n$ in I. It remains to show that $u_n \to u$ in $L^p(I;X)$. We have

$$\|u_n - u\|_X = \Big\| \int_{t_0}^{t} (\varphi_n - u')(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s)\Big\|_X \le |t - t_0|^{\frac{1}{p'}} \Big(\int_{t_0}^{t} \|(\varphi_n - u')(s)\|_X^p \,\mathrm{d}\lambda_1(s)\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Therefore

$$\begin{aligned}\|u_n - u\|_{L^p(I;X)}^p &\le \int_I |t - t_0|^{\frac{p}{p'}} \int_{t_0}^{t} \|(\varphi_n - u')(s)\|_X^p \,\mathrm{d}\lambda_1(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(t) \\ &\le (\lambda_1(I))^{\frac{p}{p'}+1}\|\varphi_n - u\|_{L^p(I;X)}^p \to 0\end{aligned}$$

as $n \to \infty$. ■

We next continue with a more general setting, where the time derivative in general belongs to a different space than the function itself.

Definition 5.3.14 — Gelfand triple. Let X be a separable reflexive Banach space such that there exists a Hilbert space H, where $X \hookrightarrow H$ densely. Then we call the triple X, $H \cong H^*$ and X^* the Gelfand triple.

In what follows we will prove that

$$X \hookrightarrow H \cong H^* \hookrightarrow X^*,$$

where both embeddings are dense. The identification of H and H^* is through the Riesz representation theorem. Let $X \in X$ and $Ix \in H$, where $I\colon X \to H$ represents the embedding. Let $\Phi\colon H^* \to H$ is the mapping which represents the Riesz representation theorem. Then we may define $i\colon X \to X^*$ as follows

$$\langle ix_0, x\rangle_X := (Ix_0, Ix)_H = \langle \Phi^{-1} Ix_0, Ix\rangle_H,$$

where x, $x_0 \in X$. The mapping $i\colon X \to X^*$ is injective and $i(X)$ is dense in X^* (due to the fact that both embeddings are dense).

Example 5.3.15. Let $X = W_0^{1,2}(\Omega)$ and $H = L^2(\Omega)$. As $W_0^{1,2}(\Omega)$ is densely embedded into $L^2(\Omega)$, the spaces $W_0^{1,2}(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ and $W^{-1,2}(\Omega) = \big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^*$ form the Gelfand triple. By the Riesz representation theorem, for any $f \in W^{-1,2}(\Omega)$ there exists unique $u_f \in W_0^{1,2}(\Omega)$ such that

$$\langle f, v\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} = ((u_f, v))_{W_0^{1,2}(\Omega)} := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x,$$

where the scalar product is equivalent to the standard scalar product on $W^{1,2}(\Omega)$. Now, if $u \in C_c^\infty(\Omega)$ (which is dense in $W_0^{1,2}(\Omega)$), then

$$((u, v))_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \Delta u v \,\mathrm{d}x$$

for any $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Hence for any $f \in W^{-1,2}(\Omega)$ there exists $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ such that $u_n \to u_f$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$, thus

$$\begin{aligned}\langle f, v\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega -\Delta u_n v \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} (-\Delta u_n, v)_{L^2(\Omega)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle i(-\Delta u_n), v\rangle_{W^{1,2}(\Omega)} =: \lim_{n\to\infty} \langle i(f_n), v\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)},\end{aligned}$$

where $f_n \in C_c^\infty(\Omega)$. Clearly, i is injective by definition and $i(W_0^{1,2}(\Omega))$ is dense in $L^2(\Omega)$. Moreover, if $f \in L^2(\Omega)$, then $-\Delta u_n \to f$ in $L^2(\Omega)$ and we have that

$$\langle f, v\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x$$

for any $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

In this setting, we can generalize the definition of the time derivative

Definition 5.3.16 Let $u \in L^p(I;X)$, where X, H and X^* form the Gelfand triple. Then we say that $v \in L^q(I;X^*)$ is the time derivative of u, if

$$\int_I \langle v, w\rangle_X \psi \,\mathrm{d}\lambda_1 = -\int_I (u, w)_H \psi' \,\mathrm{d}\lambda_1$$

for all $w \in X$, $\psi \in C_c^\infty(I)$. We denote $u' := v$.

We have the following important result.

Theorem 5.3.17 Let X, H, X^* be the Gelfand triple, and let $u \in L^p(I;X)$ with $u' \in L^{p'}(I;X^*)$. Then $u = \widetilde{u}$ a.e. in I, where $\widetilde{u} \in C(\overline{I};H)$. Moreover, $t \mapsto \|u(t)\|_H^2$ is weakly differentiable, and

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|_H^2 = 2\langle u'(t), u(t)\rangle_X$$

a.e. in I. In particular

$$\|\widetilde{u}(t_2)\|_H^2 = \|\widetilde{u}(t_1)\|_H^2 + \int_{t_1}^{t_2} 2\langle u'(s), u(s)\rangle_H \,\mathrm{d}s.$$

Remark 5.3.18. Similarly as in Theorem 5.3.17 we may also show that if u, $v \in L^p(I;X)$, u', $v' \in L^{p'}(I;X^*)$, $\psi \in C_c^\infty(I)$, then

$$\int_I \Big(\langle u', v\rangle_X + \langle v', u\rangle_X\Big) \,\mathrm{d}t = -\int_I (u, v)_H \psi' \,\mathrm{d}t.$$

Before proving the theorem we need several auxiliary results.

Lemma 5.3.19 Let $u \in L^p(I;X)$ and $u' \in L^q(I;Y)$, $1 \le p,q < \infty$, where X, Y are Banach spaces. Then there exists a sequence $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\overline{I};X)$ such that $\{u_n'\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\overline{I};Y)$, and

$$u_n \to u \qquad \text{in } L^p(I;X) \qquad \text{and} \qquad u_n' \to u' \qquad \text{in } L^q(I;Y).$$

Proof. Let without loss of generality $I = (0,T)$. We define

$$v(t) := \begin{cases} u(-t) & t \in (-T,0), \\ u(t) & t \in (0,T), \\ u(T-t) & t \in (T,2T), \end{cases}$$

and

$$\eta(t) := \begin{cases} 1 & t \in (-\frac{T}{4}, \frac{5}{4}T), \\ 0 & t < -\frac{T}{2}, \text{ or } t > \frac{3}{2}T, \\ \in [0,1] & \text{otherwise} \end{cases}$$

such that $\eta \in C_c^\infty((-T,2T))$. Denote $J = (-\frac{T}{4}, \frac{5}{4}T)$. Then $v\eta \in L^p(J;X)$ and $(\eta v)' \in L^q(J;Y)$. Define

$$u_n := (u\eta) \star \omega_{\frac{1}{n}},$$

where $\omega_{\frac{1}{n}}$ is the standard molifier. Using Theorem 5.2.8 we finish the proof, as $u_n' = u' \star \omega_{\frac{1}{n}}$ in J. ■

Lemma 5.3.20 Let X be a reflexive Banach space, Y a Banach space and $X \hookrightarrow Y$ densely. Then $Y^* \hookrightarrow X^*$ densely.

Proof. Denote $I\colon X \to Y$ the continuous injective mapping (the identity) which describes the embedding of X into Y. We know that $I(X)$ is dense in Y. We define $I^*\colon Y^* \to X^*$ as

$$\langle I^*(y'), x\rangle_X := \langle y', I(x)\rangle_Y.$$

We show that I^* is the (identity) mapping from Y^* to X^* which is injective, continuous and $I^*(Y^*)$ is dense in X^*.

Let $I^*(y') = 0$, i.e. $\langle I^*(y'), x\rangle_X = 0$ for all $x \in X$. Then $\langle y', I(x)\rangle_Y = 0$ for all $x \in X$, i.e. $y' = 0$ as $I(x)$ is dense in Y. Thus I^* is injective. Clearly, from the definition it follows that I^* is bounded. Let us show the density of the embedding.

Recall that X is reflexive and assume that $\overline{Y^*} \neq X^*$. Then there exists $x'' \in X^{**}$ such that for all $y' \in Y^*$ we have $\langle x'', I^*(y')\rangle_{X^*} = 0$, but $x'' \neq 0$. Hence there exists $x \in X$ such that $x'' = \mathcal{J}(x)$ (canonical mapping) such that

$$\langle I^*(y'), x\rangle_X = 0 \qquad \forall y' \in Y^* \implies \langle y', I(x)\rangle_Y = 0 \qquad \forall y' \in Y^*,$$

thus $I(x) = 0$, i.e $x = 0$ which leads to a contradiction. Hence $\overline{Y^*} = X^*$. ■

Definition 5.3.21 — **Weak continuity.** Let X be a Banach space. We say that $u\colon I \to X$ is continuous in the weak topology of X (weakly continuous in X), $u \in C(I;X_w)$, if the mapping

$$t \mapsto \langle x', u(t)\rangle_X$$

is continuous in I for all $x' \in X^*$.

Clearly, if $u \in C(I;X)$, then $u \in C(I;X_w)$, the other implication is generally true only if X is finite dimensional.

Lemma 5.3.22 Let X, Y be two Banach spaces, X reflexive, $X \hookrightarrow Y$ densely, $I \subset \mathbb{R}$ be bounded, open. Let $\varphi \in L^\infty(I;X)$ and $\varphi \in C(\overline{I};Y_w)$. Then $\varphi \in C(\overline{I};X_w)$.

Proof. Due to Lemma 5.3.20 we know that $Y^* \hookrightarrow X^*$ densely. Further, the mapping

$$t \mapsto \langle \eta, I\varphi(t)\rangle_Y$$

is continuous in $\overline{I}$ for all $\eta \in Y^*$, and $\varphi\colon I \to X$, where $I\colon X \to Y$ represents the embedding of X to Y. We aim at showing that

$$t \mapsto \langle \mu, I\varphi(t)\rangle_X$$

is continuous for all $\mu \in X^*$. We first define $\widetilde{\varphi}\colon I \to X$ as

$$\langle \mathcal{J}(\widetilde{\varphi}(t)), \mu\rangle_{X^*} := \liminf_{h\to 0; t+h\in I} \int_t^{t+h} \langle \mu, \varphi(s)\rangle_X \,\mathrm{d}\lambda_1(s).$$

Clearly, the right-hand side is bounded by $\|\varphi\|_{L^\infty(I;X)}\|\mu\|_{X^*}$, hence $\mathcal{J}(\widetilde{\varphi}(t)) \in X^{**}$ for all $t \in \overline{I}$. As X is reflexive, $\widetilde{\varphi} \in X$ is uniquely defined. Moreover,

$$\|\widetilde{\varphi}(t)\|_X = \sup_{\|\mu\|_{X^*}\le 1} \langle \mu, \widetilde{\varphi}(t)\rangle_X \le \sup_{\|\mu\|_{X^*}\le 1} \|\varphi\|_{L^\infty(I;X)}\|\mu\|_{X^*} \le \|\varphi\|_{L^\infty(I;X)}.$$

In particular, we may take $\mu \in Y^*$ (hence $I^*\mu \in X^*$) and get

$$\langle I^*\mu, \widetilde{\varphi}(t)\rangle_X = \langle \mu, I\widetilde{\varphi}(t)\rangle_Y.$$

As Y^* is dense in X^* and $I\widetilde{\varphi}(t) = I\varphi(t)$ due to the weak continuity in Y, we see that $\widetilde{\varphi}(t) = \varphi(t)$ for all $t \in \overline{I}$. Therefore

$$\|\varphi(t)\|_X \le \|\varphi\|_{L^\infty(I;X)}$$

for all $t \in \overline{I}$.

Now, as Y^* is dense in X^*, for any $\mu \in X^*$ and arbitrary $\varepsilon > 0$, there exists $\mu_\varepsilon \in Y^*$ such that

$$\|I^*(\mu_\varepsilon) - \mu\|_{X^*} < \varepsilon.$$

Let us fix $\varepsilon > 0$. Then we write

$$\langle \mu, \varphi(t) - \varphi(t_0)\rangle_X = \langle \mu - I^*\mu_\varepsilon, \varphi(t) - \varphi(t_0)\rangle_X + \langle I^*\mu_\varepsilon, \varphi(t) - \varphi(t_0)\rangle_X.$$

Therefore

$$|\langle \mu - I^*\mu_\varepsilon, \varphi(t) - \varphi(t_0)\rangle_X| \le \|\mu - I^*\mu_\varepsilon\|_{X^*}\|\varphi(t) - \varphi(t_0)\|_X \le 2\|\varphi\|_{L^\infty(I;X)}\varepsilon,$$

and

$$|\langle I^*\mu_\varepsilon, \varphi(t) - \varphi(t_0)\rangle_X| = |\langle \mu_\varepsilon, I(\varphi(t) - \varphi(t_0))\rangle_Y| \le \|\mu_\varepsilon\|_{Y^*}\|I(\varphi(t)) - I(\varphi(t_0))\|_Y.$$

Taking t sufficiently close to t_0 we can also the second term make smaller than ε. The lemma is proved. ■

We are now prepared to prove Theorem 5.3.17.

Proof. (of Theorem 5.3.17). Step 1: Using Lemma 5.3.19 we know that there exists $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\overline{I};X)$ such that $u_m \to u$ in $L^p(I;X)$ and $u_m' \to u'$ in $L^{p'}(I;X^*)$ as $m \to \infty$. As $X \hookrightarrow H$ and $H^* \hookrightarrow X^*$, both embeddings being dense, we have

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_m\|_H^2 = 2(u_m', u_m)_H = 2\langle u_m', u_m\rangle_X$$

(see Example 5.3.15) and integrating the identity we also see $\|u_m\|_H$ is bounded in I. Moreover, we easily get that the sequence $\|u_m\|_H^2$ is a Cauchy sequence in $C(\overline{I})$ and as $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converges in $L^p(I;H)$ to u, the limit is $\|u\|_H^2$. Therefore we have

$$\|u(t_2)\|_H^2 - \|u(t_1)\|_H^2 = 2\int_{t_1}^{t_2} \langle u', u\rangle_X \,\mathrm{d}\lambda_1,$$

as well as

$$-\int_I \|u\|_H^2\psi' \,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_I \langle u', u\rangle_X \psi \,\mathrm{d}\lambda_1$$

for arbitrary $\psi \in C_c^\infty(I)$.

Step 2: As $u \in C(\overline{I};X^*)$, due to Theorem 5.3.12, we have $u \in C(\overline{I};X_w)$ and hence by Lemma 5.3.22 $u \in C(\overline{I};H_w)$ as due to Step 1 we know that $u \in L^\infty(I;H)$.

Step 3: Let $t_0 \in \overline{I}$ be arbitrary. As $\lim_{t\to t_0}(u(t),\varphi)_H = (u(t_0),\varphi)_H$ and due to Step 1 $\lim_{t\to t_0}\|u(t)\|_H^2 = \|u(t_0)\|_H^2$, we see that

$$\lim_{t\to t_0}\|u(t) - u(t_0)\|_H^2 = 0$$

which yields $u \in C(\overline{I};H)$. ■

5.4 Compact embedding of spaces with time derivative

We close this chapter by showing a result which will for the evolutionary equations replace the result on compact embedding of Sobolev spaces and thus allow to solve nonlinear problems. We consider

$$W = W^{\alpha_0,\alpha_1}_{X_0,X_1} = \{v \in L^{\alpha_0}(I;X_0); v' \in L^{\alpha_1}(I;X_1)\},$$

where $I \subset \mathbb{R}$ is and open bounded interval, and define

$$\|u\|_W := \|u\|_{L^{\alpha_0}(I;X_0)} + \|u'\|_{L^{\alpha_1}(I;X_1)}.$$

First we have

Lemma 5.4.1 — Ehrling. Let X_0, X_1 and X be Banach spaces such that $X_0 \hookrightarrow\hookrightarrow X \hookrightarrow X_1$. Then for all $\eta > 0$ there exists $C_\eta > 0$ such that for any $v \in X_0$

$$\|v\|_{X_0} \le \eta\|v\|_{X_0} + C_\eta\|v\|_{X_1}. \tag{5.4}$$

Proof. We proceed by contradiction. Let (5.4) be not true, i.e. there exists $\eta > 0$ such that for any $m \in \mathbb{N}$ there exists $w_m \in X_0$, such that

$$\|w_m\|_X > \eta\|w_m\|_{X_0} + m\|w_m\|_{X_1}.$$

We set $v_m := \frac{w_m}{\|w_m\|_{X_0}}$, i.e.

$$\|v_m\|_X > \eta + m\|v_m\|_{X_1}.$$

As $\|v_m\|_{X_0} = 1$, then v_m is bounded in X and thus $\|v_m\|_{X_1} \to 0$. Furthermore, since $X_0 \hookrightarrow\hookrightarrow X$, there exists $\{v_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ such that $v_{m_k} \to v$ in X. However, necessarily, $v = 0$, but on the other hand,

$$\|v_{m_k}\|_X > \eta,$$

which leads to a contradiction. ∎

The main result is

Theorem 5.4.2 — Aubin–Lions. Let X_0, X_1 and X be Banach spaces such that $X_0 \hookrightarrow\hookrightarrow X \hookrightarrow X_1$. Let X_0, X_1 be reflexive, $1 < \alpha_0, \alpha_1 < \infty$ and let I be bounded. Then $W \hookrightarrow\hookrightarrow L^{\alpha_0}(I;X)$.

Proof. Step 1: Let $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ be a bounded sequence in W. We aim at showing that there exists $\{u_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ a subsequence such that $u_{m_k} \to u$ in $L_0^\alpha(I;X)$ as $k \to \infty$. As X_0, X_1 are reflexive, there exists $u \in W$ such that $u_{m_k} \rightharpoonup u$ in W, i.e.

$$\begin{aligned} u_{m_k} &\rightharpoonup u && \text{in } L^{\alpha_0}(I;X_0),\\ u'_{m_k} &\rightharpoonup u' && \text{in } L^{\alpha_1}(I;X_1). \end{aligned}$$

We need to show that $v_{m_k} := u_{m_k} - u \to 0$ (strongly) in $L^{\alpha_0}(I;X)$.
Step 2: In fact, it is enough to verify that $v_{m_k} \to 0$ in $L^{\alpha_0}(I;X_1)$. Under this assumption, by virtue of Lemma 5.4.1, we have

$$\|v_{m_k}\|_{L^{\alpha_0}(I;X)} \le \eta\|v_{m_k}\|_{L^{\alpha_0}(I;X_0)} + C_\eta\|v_{m_k}\|_{L^{\alpha_0}(I;X_1)}.$$

As $\|v_{m_k}\|_{L^{\alpha_0}(I;X_0)}$ is bounded, we have

$$\|v_{m_k}\|_{L^{\alpha_0}(I;X)} \le C\eta + C_\eta\|v_{m_k}\|_{L^{\alpha_0}(I;X_1)}.$$

Let us fix $\varepsilon > 0$. Then there exists $\eta > 0$ such that $C\eta < \frac{\varepsilon}{2}$ and to this η there exists $k_0 \in \mathbb{N}$ such that for $k \ge k_0$, $C_\eta\|v_{m_k}\|_{L^{\alpha_0}(I;X_1)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Hence $v_{m_k} \to 0$ in $L^{\alpha_0}(I;X)$.
Step 3: Repeating the procedure from Proposition 5.3.11 we get that

$$W \hookrightarrow C(\overline{I};X_1),$$

i.e.

$$\max_{t\in\overline{I}} \|u(t)\|_{X_1} \le C\|u\|_W.$$

Step 4: As $\|v_{m_k}\|_{X_1} \le C$ for all $t \in I$, it is enough to show that $v_{m_k}(t) \to 0$ (strongly) in X_1 for arbitrary $t \in \overline{I}$. Let us assume, without loss of generality, that $0 \in \overline{I}$ and let us show that $v_{m_k}(0) \to 0$ in X_1. Then

$$v_{m_k}(0) = v_{m_k}(t) - \int_0^t v'_{m_k}(\tau)\,\mathrm{d}\lambda_1(\tau).$$

We integrate this inequality, from 0 to s. Then

$$\begin{aligned} v_{m_k}(0) &= \frac{1}{s}\Big\{\int_0^s v_{m_k}(t)\,\mathrm{d}\lambda_1(t) - \int_0^s \Big(\int_0^t v'_{m_k}(\tau)\,\mathrm{d}\lambda_1(\tau)\Big)\,\mathrm{d}\lambda_1(t)\Big\}\\ &= \frac{1}{s}\int_0^s v_{m_k}(t)\,\mathrm{d}\lambda_1(t) - \frac{1}{s}\int_0^s (s-\tau)v'_{m_k}(\tau)\,\mathrm{d}\lambda_1(\tau) =: a_{m_k} + b_{m_k}, \end{aligned}$$

where we used Fubini Theorem 5.1.13 which holds for the Bochner integral as well. We choose $\varepsilon > 0$. Then

$$\|b_{m_k}\|_{X_1} \le \int_0^s \|v'_{m_k}\|_{X_1}\,\mathrm{d}\lambda_1 < \frac{\varepsilon}{2}$$

provided s is sufficiently small (recall, $\alpha_1 > 1$). As we know that $v_{m_k} \rightharpoonup 0$ in $L^{\alpha_0}(I;X_0)$, then $\|a_{m_k}\|_{X_0}$ is bounded and hence $\|a_{m_k}\|_{X_1} \to 0$ strongly for a fixed $s > 0$. Therefore, for s fixed from the estimate of b_{m_k}, we choose k_0 sufficiently large so that for any $k \ge k_0$ $\|a_{m_k}\|_{X_1} < \frac{\varepsilon}{2}$. The theorem is proved. ∎

Kapitola 6

Linear evolutionary equations

We will now study problems which describe evolution of certain quantities in time. In this chapter we restrict ourselves to linear problems which are easier to study and we present most important techniques used in the study of especially linear parabolic problems (as e.g. the heat equation) and linear hyperbolic problems (as e.g. the wave equation).

6.1 Second order parabolic equations

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ be open, bounded and let $T \in (0, \infty)$. We set $Q_T := (0, T) \times \Omega$ and consider

$$\begin{aligned} \partial_t u + Lu &= f && \text{in } Q_T \\ u &= 0 && \text{on } (0,T) \times \partial\Omega \\ u(0, \cdot) &= g && \text{in } \Omega, \end{aligned} \tag{6.1}$$

where f: $Q_T \to \mathbb{R}$ and g: $\Omega \to \mathbb{R}$ are given, and u: $Q_T \to \mathbb{R}$ is unknown. Moreover, we assume that

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + \sum_{i=1}^{d} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu,$$

where $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^d$, $\{b_i\}_{i=1}^d$ and c: $Q_T \to \mathbb{R}$ are given functions.

Definition 6.1.1 We say that the operator $\partial_t + L$ is parabolic if there exists $\theta > 0$ such that

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\boldsymbol{\xi}|^2$$

for all $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$ and a.e. $(t,x) \in Q_T$.

Example 6.1.2. Taking $a_{ij} = \delta_{ij}$, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ and $c = 0$ we get that $Lu = -\Delta u$ and the corresponding equation $(6.1)_1$ reduces to the heat equation

$$\partial_t u - \Delta u = f.$$

Keeping $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ and $c = 0$, but considering $Lu = -\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)$ we get a generalized heat equation (corresponding to an inhomogeneous material with respect to the heat conductivity)

$$\partial_t u - \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) = f.$$

In order to come to a weak formulation for our problem, we define

$$B[u,v](t) := \int_\Omega \Big[\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{d} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + cuv\Big]\,\mathrm{d}x$$

which is well defined for a.e. in $(0,T)$ if u, $v \in W^{1,2}(\Omega)$ and $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^d$, $\{b_i\}_{i=1}^d$, $c \in L^\infty(\Omega)$ for a.e. $t \in (0,T)$. We first reformulate the problem into the setting we studied in the previous chapter.

We consider the mapping

$$u\colon [0,T] \to W_0^{1,2}(\Omega)$$

defined by

$$[u(t)](x) := u(t,x), \qquad x \in \Omega, t \in (0,T),$$

and

$$f\colon [0,T] \to L^2(\Omega) \text{ or } W^{-1,2}(\Omega).$$

Since we consider $u \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$ and a_{ij}, b_i and $c \in L^\infty(Q_T)$, using

$$\partial_t u = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) - \sum_{i=1}^{d} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - cu + f,$$

we may expect that $\partial_t u \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$. Therefore we have

Definition 6.1.3 Let $f \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$, $g \in L^2(\Omega)$, and let the functions $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^d$, $\{b_i\}_{i=1}^d$, $c \in L^\infty(Q_T)$, where $(0,T)$ is finite. Then $u \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$ with $\partial_t u \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$ is a weak solution to our problem (6.1), provided

$$\begin{aligned} \langle \partial_t u, v\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} + B[u,v](t) &= \langle f, v\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} \\ u(0) &= g \end{aligned}$$

holds for a.e. $t \in (0,T)$ and all $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Remark 6.1.4. If $u \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$ and $\partial_t u \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$, then $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$, as $W_0^{1,2}(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ and $W^{-1,2}(\Omega)$ form a Gelfand triple. Therefore the initial condition at $t=0$ is satisfied in the sense that

$$\lim_{t\to 0^+} \|u(t) - g\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

where we work with the continuous representative from Theorem 5.3.17.

We first aim at showing the following fundamental result

Theorem 6.1.5 Under the assumptions stated in Definition 6.1.3, for any $T < \infty$, there exists a unique weak solution to Problem (6.1) in the sense of Definition 6.1.3.

Proof. Step 1: Galerkin approximation. We assume that $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ is a given orthonormal basis in $L^2(\Omega)$ and orthogonal in $W^{1,2}(\Omega)$. We may assume that $w_k \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ (or, if we need it, also $w_k \in C_c^\infty(\Omega)$) for any $k \in \mathbb{N}$. In the former, the system can be constructed by eigenfunctions of the Laplace operator in Ω subject to the homogeneous Dirichlet boundary condition.

We now look for the approximate solution in the form

$$u_n(t,x) := \sum_{k=1}^{d} d_i^n(t) w_k(x) \tag{6.2}$$

and we have that

$$u_n(0,x) = \sum_{k=1}^{n} d_k^n(0) w_k(x), \tag{6.3}$$

where

$$d_k^n(0) := \int_\Omega g w_k \,\mathrm{d}x = (g, w_k)_{L^2(\Omega)}. \tag{6.4}$$

Further, we assume that u_n solves our problem for test functions from finite dimensional subspace of $W_0^{1,2}(\Omega)$ only, i.e., from the linear hull of $\{w_k\}_{k=1}^n$. Then we can write our approximate problem as follows

$$(\partial_t u_n(t,\cdot), w_k)_{L^2(\Omega)} + B[u_n, w_k](t) = \langle f(t,\cdot), w_k\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}, \tag{6.5}$$

$k = 1,2,\dots,n$, and $u_n(0)$ fulfils (6.3)–(6.4). The main point is that we may rewrite (6.5) as a system of ordinary differential equations for the unknown functions $\{d_i^n\}_{i=1}^n$ as follows

$$\begin{aligned} \partial_t d_k^n(t) + B\Big[\sum_{l=1}^{n} d_i^n(t) w_i, w_k\Big](t) &= \langle f(t,\cdot), w_k\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} \\ d_k^n(0) &= (g, w_k)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Note that (6.6) is a system of linear ordinary differential equations of first order, where the right-hand side belongs to $L^2(0,T)$. Therefore we may apply the Carathéodory theory to deduce existence of a unique vector-valued absolutely continuous function $\vec{d}$ solving (6.6) a.e. in $(0,T)$. (If the reader prefers to use the classical theory for ODEs, it is possible to mollify the function f in time which will not do in the lecture notes.)

Step 2: Energy estimates. Since we intend to pass with $n \to \infty$, we need to control the sequence of approximate solutions independently of n, i.e. we need to prove so called *a priori estimates*. To this aim, we multiply the Galerkin approximation tested by w_k by $d_k^n(t)$ and sum up with respect to k, from 1 to n. It is in fact the same as using as test function the solution itself. We get

$$\int_\Omega \partial_t u_n u^n \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i} u_n + c|u_n|^2 \Big) \,\mathrm{d}x = \langle f, u_n \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}. \tag{6.7}$$

We have:

$$\int_\Omega \partial_t u_n u^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega |u_n|^2 \,\mathrm{d}x,$$

and

$$B[u_n, u_n](t) \geq \theta \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)} - C\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} - C\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)},$$

and therefore

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha \|u_n\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + C\|f\|^2_{W^{-1,2}(\Omega)}. \tag{6.8}$$

We now employ the Gronwall lemma. Recall that

$$\eta'(t) \leq C_1 \eta(t) + C_2 F(t)$$

in $(0,T)$ implies

$$\eta(t) \leq \mathrm{e}^{C_1 t} \Big(\eta(0) + C_2 \int_0^t F(s) \,\mathrm{d}s \Big)$$

in $(0,T)$. Denoting $\eta(t) := \|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}$, $F(t) := \|f(t)\|^2_{W^{-1,2}(\Omega)}$ we end up with

$$\|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C(T) \big(\|u_n(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(0,t;W^{-1,2}(\Omega))} \big)$$

for arbitrary $t \in (0,T)$. Due to the Bessel inequality

$$\|u_n(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|g\|^2_{L^2(\Omega)},$$

hence we get

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\big(\|g\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))} \big).$$

We now return back to (6.8) end read from it

$$\alpha \int_0^T \|u_n\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \,\mathrm{d}t \leq C \Big(\int_0^T \|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} \,\mathrm{d}t + \int_0^t \|f\|^2_{W^{-1,2}(\Omega)} \,\mathrm{d}t \Big) + \|u_n(0)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

therefore, together with the estimate above

$$\|u_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|u_n\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega)} \leq C \Big(\|f\|_{L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \Big).$$

We, however, need also an estimate of the time derivative. For arbitrary $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ we can write

$$v = v_n^1 + v_n^2,$$

where v_n^1 belongs to the linear hull of $\{w_k\}_{k=1}^n$, and v_n^2 is perpendicular to this set in $L^2(\Omega)$. We easily get

$$\int_\Omega \partial_t u_n v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \partial_t u_n (v_n^1 + v_n^2) \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \partial_t u_n v_n^1 \,\mathrm{d}x + 0$$

and we may use the Galerkin approximation for u_n. It yields

$$\langle \partial_t u_n, v_n^1 \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} := \int_\Omega u_n v_n^1 \,\mathrm{d}x = \langle f, v_n^1 \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} - B[u_n, v_n^1](t),$$

and therefore

$$\begin{aligned}
\|\partial_t u_n\|_{W^{-1,2}(\Omega)} &= \sup_{\substack{v\in W_0^{1,2}(\Omega)\\ \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}\leq 1}} \langle \partial_t u_n, v \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \sup_{\substack{v\in W_0^{1,2}(\Omega)\\ \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}\leq 1}} \int_\Omega \partial_t u_n v \,\mathrm{d}x \\
&= \sup_{\substack{v\in W_0^{1,2}(\Omega)\\ \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}\leq 1}} \int_\Omega \partial_t u_n v_n^1 \,\mathrm{d}x \\
&= \sup_{\substack{v\in W_0^{1,2}(\Omega)\\ \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}\leq 1}} \Big(\langle f, v_n^1 \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} - B[u_n, v_n^1] \Big) \\
&\leq \sup_{\substack{v\in W_0^{1,2}(\Omega)\\ \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}\leq 1}} \big(\|f\|_{W^{-1,2}(\Omega)} + \|u_n\|_{W^{1,2}(\Omega)} \big) \|v_n^1\|_{W^{1,2}(\Omega)} \\
&\leq C\big(\|f\|_{W^{-1,2}(\Omega)} + \|u_n\|_{W^{1,2}(\Omega)} \big),
\end{aligned}$$

where we used that $\|v_n^1\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}$. Therefore we have

$$\begin{aligned}\|\partial_t u_n\|_{L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega)} &\leq C\big(\|f\|_{L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))} + \|u_n\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))}\big) \\ &\leq C\big(\|f\|_{L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\big).\end{aligned}$$

Step 3: Limit passage. Next we want to let $n \to \infty$. As the spaces $L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$ and $L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$ are Hilbert spaces and the space $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ has separable pre-dual space, there exists $u \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ with $\partial_t u \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$ such that for a chosen subsequence $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ we have for $k \to \infty$

$$\begin{aligned} u_{n_k} &\rightharpoonup u \qquad \text{in } L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)),\\ u_{n_k} &\rightharpoonup^* u \qquad \text{in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\\ \partial_t u_{n_k} &\rightharpoonup \partial_t u \qquad \text{in } L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega)).\end{aligned}$$

Passing to the limit in the modified Galerkin approximation

$$\int_0^T \langle \partial_t u_{n_k}, w_l\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\psi \,\mathrm{d}t + \int_0^T B[u_{n_k}, w_l](t)\psi\,\mathrm{d}t = \int_0^T \langle f, w_l\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\psi\,\mathrm{d}t,$$

where $\psi \in C_c^\infty(0,T)$, we get

$$\int_0^T \langle \partial_t u, w_l\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\psi \,\mathrm{d}t + \int_0^T B[u, w_l](t)\psi\,\mathrm{d}t = \int_0^T \langle f, w_l\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\psi\,\mathrm{d}t$$

for all $l \in \mathbb{N}$ and all $\psi \in C_c^\infty(0,T)$. As the linear hull of $\{w_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ is dense in $W_0^{1,2}(\Omega)$, we easily show

$$\int_0^T \langle \partial_t u, v\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\psi \,\mathrm{d}t + \int_0^T B[u, v](t)\psi\,\mathrm{d}t = \int_0^T \langle f, v\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\psi\,\mathrm{d}t \tag{6.9}$$

for all $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ and all $\psi \in C_0^\infty(0,T)$. Hence

$$\langle \partial_t u, v\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} + B[u,v](t)\psi = \langle f, v\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}$$

for all $v \in W^{1,2}(\Omega)$ a.e. in $(0,T)$.

Let us now verify that $\lim_{t\to 0^+} \|u(t) - g\|_{L^2(\Omega)} = 0$. First, we have from (6.9) due to the definition of the time derivative

$$-\int_0^T (\partial_t u, v)_{L^2(\Omega)}\psi' \,\mathrm{d}t + \int_0^T B[u, v](t)\psi\,\mathrm{d}t = \int_0^T \langle f, v\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\psi\,\mathrm{d}t$$

for all $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ and all $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$. As $(u,v)_{L^2(\Omega)} \in C([0,T])$ for any $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, we may take a sequence of $\psi_n \in C_c^\infty(0,T)$ such that it converges to a function $\psi \in C_c^\infty([0,T)$ locally uniformly in $(0,T)$ (and ψ' converges in distributions to $-\psi(0)\delta$). Then we get

$$\begin{aligned} &-\int_0^T (\partial_t u, v)_{L^2(\Omega)}\psi' \,\mathrm{d}t + (u(0), v)_{L^2(\Omega)}\psi(0) \\ &+\int_0^T B[u, v](t)\psi\,\mathrm{d}t = \int_0^T \langle f, v\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\psi\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{6.10}$$

for all $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ and $\psi \in C_c^\infty([0,T))$. Similarly, starting now from the Galerkin approximation, we have (we multiply the kth equation by $\psi \in C_c^\infty([0,T))$, integrate over the time interval and use the integration by parts with respect to time)

$$\begin{aligned} &-\int_0^T (\partial_t u_{n_k}, w_l)_{L^2(\Omega)}\psi' \,\mathrm{d}t + (u_{n_k}(0), w_l)_{L^2(\Omega)}\psi(0) \\ &+\int_0^T B[u_{n_k}, w_l](t)\psi\,\mathrm{d}t = \int_0^T \langle f, w_l\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\psi\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

for any $l \in \{1, 2, \dots, n_k\}$. Using the fact that $(u_{n_k}(0), w_l)_{L^2(\Omega)} = (g, w_l)_{L^2(\Omega)}$ for any $l \leq n_k$, we may pass to the limit $k \to \infty$ to get

$$\begin{aligned} &-\int_0^T (\partial_t u, w_l)_{L^2(\Omega)}\psi' \,\mathrm{d}t + (g, w_l)_{L^2(\Omega)}\psi(0) \\ &+\int_0^T B[u, w_l](t)\psi\,\mathrm{d}t = \int_0^T \langle f, w_l\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\psi\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

for any $l \in \mathbb{N}$ and any $\psi \in C_c^\infty([0,T))$. Next, using the density of the linear hull of $\{w_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$ we easily get

$$\begin{aligned}&-\int_0^T (\partial_t u, v)_{L^2(\Omega)}\psi' \,\mathrm{d}t + (g,v)_{L^2(\Omega)}\psi(0)\\&+\int_0^T B[u,v](t)\psi \,\mathrm{d}t = \int_0^T \langle f, v\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\psi \,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

for any $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ and any $\psi \in C_c^\infty([0,T))$. Hence

$$(u(0),v)_{L^2(\Omega)} = (g,v)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega) \supset C_c^\infty(\Omega)$$

which yields

$$u(0) = g,$$

and since $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$, we also have

$$\lim_{t\to 0^+} \|u(t) - g\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Step 4: Uniqueness. Since the problem is linear, it is enough to verify that unique solution to our problem with $f \equiv 0$ and $g \equiv 0$ is $u \equiv 0$. As the solution u is an appropriate test function, we have

$$\langle u', u\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} + B[u,u](t) = 0.$$

Using now Theorem 5.3.17 and the properties of the bilinear form, we have

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \le C\|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

The Gronwall lemma together with the fact that the initial condition is zero yields

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = 0 \qquad \text{for any } t \in (0,T],$$

whence $u = 0$ a.e. in Q_T. ■

Let us now look at the problem of the regularity of the solution. We first present formal argument why we may expect a better regularity than we get from the definition of the weak solution. For the sake of simplicity, we consider only the heat equation in $\mathbb{R}^d$, i.e.

$$\begin{aligned}\partial_t u - \Delta u &= f \qquad \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^d,\\ u(0,\cdot) &= g \qquad \text{in } \mathbb{R}^d,\end{aligned}$$

and let $f \in L^2((0,T)\times\mathbb{R}^d) = L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))$, $g \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d) = W_0^{1,2}(\mathbb{R}^d)$. Furthermore, we assume that $u \to 0$ when $|x| \to \infty$ so that all integrations by parts we use below are allowed. Then we have

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f^2 \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t u - \Delta u)^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \Big((\partial_t u)^2 + (\Delta u)^2 - 2\Delta u \partial_t u\Big)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \Big((\partial_t u)^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d} (\Delta u)^2 \,\mathrm{d}x + 2\int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \nabla u\cdot\nabla u \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Now, the second integral can be rewritten as

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} (\Delta u)^2 \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial u_k^2}\sum_{l=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k,l=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla^2 u|^2 \,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

and the third integral

$$2\int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \nabla u\cdot\nabla u \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Therefore

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} \Big(|\nabla^2 u|^2 + (\partial_t u)^2\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(0)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} f^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g|^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} f^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Next we differentiate the equation with respect to time. We get

$$\partial^2_{tt} u - \Delta \partial_t u = \partial_t f,$$

hence testing the equation by $\partial_t u$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\partial_t u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \partial_t u|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t f \partial_t u \,\mathrm{d}x.$$

Thus, using also the Gronwall lemma and the fact that $\partial_t u(0) = \Delta u(0) + f(0)$,

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\partial_t u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla \partial_t u\|^2_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^d)} \\ \leq \|\partial_t f\|^2_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^d)} + \|\nabla^2 g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|f(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Since

$$\|f(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C\big(\|\partial_t f\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^d)} + \|f\|_{L^2((0,T)\times\Omega)}\big),$$

we get

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla \partial_t u\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^d)} \\ \leq C\big(\|f\|_{W^{1,2}(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} + \|\nabla^2 g\|_{L^2((0,T)\times\Omega)}\big).$$

Combining all the estimates together, we finish with

$$\sup_{t\in[0,T]} (\|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}) + \|\nabla \partial_t u\|_{L^2((0,T)\times R^d)} + \|\nabla^2 u\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^d)} \\ \leq C\big(\|f\|_{W^{1,2}(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} + \|\nabla g\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^d)}\big).$$

We will now show the estimates rigorously, for our general parabolic operator. We will assume the following:

$$\begin{aligned} & a_{ij}(t,x) = a_{ji}(t,x) \qquad \forall i,j = 1,2,\ldots,d,\ (t,x) \in Q_T \\ & \{a_{ij}\}_{i,j=1}^d, \{b_i\}_{i=1}^d, c \in C^1(\overline{Q_T}), \\ & f \in L^2((0,T)\times\Omega), \quad g \in W^{1,2}_0(\Omega), \end{aligned} \tag{6.11}$$

and, for higher regularity, additionally,

$$\partial_t f \in L^2((0,T)\times\Omega), \qquad \nabla^2 g \in L^2(\Omega). \tag{6.12}$$

We have

Theorem 6.1.6 Let $u \in L^2(0,T;W^{1,2}_0(\Omega))$ with $\partial_t u \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$ be a weak solution to our parabolic problem in the sense of Definition 6.1.3. Assume that $\Omega \in C^2$ and that assumptions (6.11) are fulfilled. Then $u \in L^2(0,T;W^{2,2}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;W^{1,2}_0(\Omega))$ with $\partial_t u \in L^2((0,T)\times\Omega)$ and

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_t u\|_{L^2((0,T)\times\Omega)} + \|\nabla^2 u\|_{L^2((0,T)\times\Omega)} \\ \leq C\big(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}\big),$$

where C depends on T, Ω and coefficients of L. If, additionally, (6.12) is fulfilled, then $u \in L^\infty(0,T;W^{2,2}(\Omega))$ with $\partial_t u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;W^{1,2}_0(\Omega))$, $\partial^2_{tt} u \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$, and

$$\sup_{t\in[0,T]} (\|\nabla^2 u\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_t u\|_{L^2(\Omega)}) + \|\partial_t u\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))} + \|\partial^2_{tt} u\|_{L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))} \\ \leq C\big(\|f\|_{W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla g\|_{W^{1,2}(\Omega)}\big).$$

Proof. Recall that due to the assumptions of Theorem 6.1.6, there exists unique weak solution to the parabolic problem in the sense of Definition 6.1.3. Therefore we may work either with the Galerkin approximation or with the weak formulation.
Step 1: We start with the Galerkin approximation

$$\int_\Omega \partial_t u_n w_k \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \Big(\sum_{k=1}^d a_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial w_k}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i} w_k + c u_n w_k\Big)\,\mathrm{d}x = \langle f, w_k\rangle_{W^{1,2}_0(\Omega)},$$

$k = 1,2,\ldots,n$. We multiply the kth equation by $\partial_t d^n_k(t)$ and sum up for k from 1 to n (i.e, we test by the time derivative of the approximate solution). We get

$$\int_\Omega (\partial_t u_n)^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial(\partial_t u_n)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\partial_t u_n + c u_n \partial_t u_n\Big)\,\mathrm{d}x \\ = \langle f, \partial_t u_n\rangle_{W^{1,2}_0(\Omega)}.$$

As $a_{ij} = a_{ji}$ for all $i, j = 1, 2, \dots, d$, we have

$$\|\partial_t u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \langle f, \partial_t u_n\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}$$
$$- \int_\Omega \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\partial_t u_n\,\mathrm{d}x - \int_\Omega c u_n \partial_t u_n\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \partial_t a_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x.$$

Due to our assumptions we can estimate the right-hand side as

$$|RHS| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t u_n\|_{L^2(\Omega)} + C(L)\big(\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t u_n\|_{L^2(\Omega)}$$
$$+ \|u_n\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t u_n\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)}\big)$$

and due to the bounds from Theorem 6.1.5 and parabolicity of the operator $\partial_t + L$ (i.e., $\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leq C\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}$) we get

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \|\partial_t u_n\|^2_{L^2((0,T)\times\Omega)}$$
$$\leq C\big(\|f\|^2_{L^2((0,T)\times\Omega)} + \|g\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_n(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\big).$$

Recall that $\|\nabla u_n(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}$. Then

$$\|\nabla u_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\partial_t u_n\|_{L^2((0,T)\times\Omega)} \leq C\big(\|f\|_{L^2((0,T)\times\Omega)} + \|g\|_{W^{1,2}(\Omega)}\big),$$

where the constant C depends on the coefficients of L, on T and Ω. We may therefore let $n \to \infty$ to get

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L^2((0,T)\times\Omega)} \leq C\big(\|f\|_{L^2((0,T)\times\Omega)} + \|g\|_{W^{1,2}(\Omega)}\big).$$

Step 2: We may write now

$$B[u,v](t) = \int_\Omega f(t)v\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \partial_t u(t)v\,\mathrm{d}x,$$

i.e.,

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(t)v\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \partial_t u(t)v\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^d b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}v - cuv\Big)(t)\,\mathrm{d}x$$

for all $v \in W^{1,2}(\Omega)$ and a.e. $t \in (0,T)$. Therefore, using the elliptic regularity, we get

$$\|u(t)\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq C\big(\|f(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u(t)\|_{W^{1,2}(\Omega)}\big),$$

hence, integrating over $(0,T)$,

$$\|u\|_{L^2(0,T;W^{2,2}(\Omega))} \leq C\big(\|f\|_{L^2((0,T)\times\Omega)} + \|g\|_{W^{1,2}(\Omega)}\big).$$

Above, the constant C depends again on T, on the smoothness of Ω and on the coefficients of L.
Step 3: We now continue with the second part of the theorem. We return back to the Galerking approximation and differentiate the corresponding system of ordinary differential equations with respect to time. This is, due to the regularity theory for ODEs, possible, and we get

$$\int_\Omega \partial^2_{tt}u_n w_k\,\mathrm{d}x + B[\partial_t u_n, w_k](t) = \int_\Omega \partial_t f w_k\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \partial_t a_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial w_k}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x$$
$$- \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^d \partial_t b_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i}w_k + \partial_t c u_n w_k\Big)\,\mathrm{d}x. \tag{6.13}$$

We multiply the kth equation by $\partial_t d_k^n(t)$ and sum for k from 1 to n (i.e., we test by $\partial_t u_n$). We get

$$\int_\Omega \partial^2_{tt}u_n\partial_t u_n\,\mathrm{d}x + B[\partial_t u_n, \partial_t u_n](t) = \int_\Omega \partial_t f\partial_t u_n\,\mathrm{d}x$$
$$- \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \partial_t a_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial(\partial_t u_n)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^d \partial_t b_i\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\partial_t u_n + \partial_t c u_n\partial_t u_n\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Therefore we have

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\partial_t u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\partial_t u_n\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\partial_t f\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t u_n\|_{L^2(\Omega)}$$
$$+ C\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\partial_t u_n\|_{L^2(\Omega)} + C\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t u_n\|_{L^2(\Omega)}$$
$$+ C\|u_n\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_t u_n\|_{L^2(\Omega)}$$

which after employing the Gronwall and Young inequalities provides the estimate

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\partial_t u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \|\nabla \partial_t u_n\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t \\ \le C\big(\|\partial_t f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|\partial_t u_n(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\big).$$

Looking once more at the Galerkin approxmation we see that

$$\|\partial_t u_n(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|f(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + C\|u_n(0)\|^2_{W^{2,2}(\Omega)} \\ \le C\big(\|f\|^2_{W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))} + \|g\|_{W^{2,2}(\Omega)}\big),$$

where we used that $\|u_n(0)\|_{W^{2,2}(\Omega)} \le C\|g\|_{W^{2,2}(\Omega)}$. We can therefore let $n\to\infty$ and get

$$\|\partial_t u_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla\partial_t u_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ \le C\big(\|\partial_t f\|_{W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))} + \|g\|_{W^{2,2}(\Omega)}\big).$$

Step 4: We look again at the problem

$$B[u,v](t) = \int_\Omega f v\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \partial_t u v\,\mathrm{d}x$$

for any $v\in W^{1,2}_0(\Omega)$ and a.e. $t\in(0,T)$, and get, similarly as above

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \le C\big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_t u\|_{L^2(\Omega)}\big)$$

due to the elliptic regularity. Therefore

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;W^{2,2}(\Omega))} \le C\big(\|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\big) \\ \le C\big(\|f\|_{W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))} + \|g\|_{W^{2,2}(\Omega)}\big).$$

Step 5: The last step is to show that $\partial^2_{tt}u\in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$. Since (6.13) holds, we may proceed exactly as in the proof of the existence of a solution in Theorem 6.1.5 that $\partial_t u_n$ is bounded in $L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$. ■

Similarly as in the case of the elliptic regularity, we may improve the smoothness provided all the data are smooth enough. In order to simplify the presentation, we assume here that the coefficients of the operator L are independent of time.

Theorem 6.1.7 Let Ω be of class C^{2m+2}. Let $g\in W^{2m+1,2}(\Omega)$ and $\partial^k_{t^k} f\in L^2(0,T;W^{2m-2k,2}(\Omega))$, $k=0,1,2,\dots,m$. Let the coefficients of L be sufficiently smooth in the spatial variables and independent of time, and let $g_0 := g\in W^{1,2}_0(\Omega)$, $g_1 = f(0)-Lg_0\in W^{1,2}_0(\Omega)$, $\dots$, $g_m := \partial^{m-1}_{t^{m-1}} f - Lg_{m-1}\in W^{1,2}_0(\Omega)$. Then $\partial^k_{t^k}u\in L^2(0,T;W^{2m+2-2k}(\Omega))$, $k=0,1,\dots,m+1$, and

$$\sum_{k=0}^{m+1} \|\partial^k_{t^k}u\|_{L^2(0,T;W^{2m+2-2k}(\Omega))} \le C(\|\partial^k_{t^k} f\|_{L^2(0,T;W^{2m-2k}(\Omega))} + \|g\|_{W^{2m+1}(\Omega)}),$$

where the constant C depends on T, Ω, m and on the coefficients of L.

Remark 6.1.8. We will not prove the result, however, let us at least indicate, where does the compatibility condition come from. Formally, $\partial_t u =: w$ solves

$$\begin{aligned} \partial_t w + Lw &= \partial_t f && \text{in } Q_T \\ w &= 0 && \text{on } (0,T)\times\partial\Omega \\ w(0) &= f(0) - Lg, \end{aligned}$$

and recall that we needed above $g\in W^{1,2}_0(\Omega)$. Hence we must require that $f(0)-Lg\in W^{1,2}_0(\Omega)$ which is the second compatibility condition. Similarly for higher order estimates.

Therefore

Theorem 6.1.9 Let $g\in C^\infty(\overline{\Omega})$, $f\in C^\infty(\overline{Q_T})$, $\Omega\in C^\infty$, the coefficients of L are time independent and of class $C^\infty(\overline{\Omega})$ and let infinitely many compatibility conditions from Theorem 6.1.7 above hold. Then the solution to our problem is smooth, i.e.

$$u\in C^\infty(\overline{Q_T}).$$

6.1.1 Maximum principles to parabolic problems

We first discuss the maximum/minimum principle which holds for classical solutions and whose proof is, unfortunately, not possible to reproduce for weak solutions only. We will assume that

$$\partial_t u - Lu \le 0 \qquad (\text{ or } \ge 0).$$

We restrict ourselves to the case when $c \equiv 0$, i.e.

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

and $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^d$, $b_i \in C(\overline{Q_T})$, $\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \theta|\boldsymbol{\xi}|^2$ for all $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$, and $a_{ij} = a_{ji}$, $i,j = 1,2,\dots,d$. Denote further $\Gamma_T := \overline{Q_T} \setminus Q_T \setminus \{T\} \times \Omega$. We have

Theorem 6.1.10 Let u be twice continuously differentiable with respect to the space variables and once with respect to time. Further, let $u \in C(\overline{Q_T})$.
(i) If $\partial_t u + Lu \le 0$, then $\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\Gamma_T} u$.
(ii) If $\partial_t u + Lu \ge 0$, then $\min_{\overline{Q_T}} u = \min_{\Gamma_T} u$.

Proof. Assume first $\partial_t u + Lu < 0$ in Q_T, but there exists $(t_0, x_0) \in Q_T \cup (T \times \Omega)$ such that $u(t_0, x_0) = \max_{\overline{Q_T}} u$.
(a) If $0 < t_0 < T$, then (t_0, x_0) is an interior point of Q_T, hence $\partial_t u = 0$ at (t_0, x_0). However, then also $Lu \ge 0$ at the maximum (the first part is concave and necessarily, $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ at the point of maximum). Then $\partial_t u + Lu \ge 0$ which leads to a contradiction.
(b) If $t_0 = T$, then $\partial_t u \ge 0$ at the point of maximum and we may proceed as in part (a).
(c) If $\partial_t u + Lu \le 0$, consider $v(t,x) := u(t,x) - \varepsilon t$. Then

$$\partial_t v + Lv = \partial_t u + Lu - \varepsilon < 0.$$

Then v attains its maximum over $\overline{Q_T}$ in Γ_T which holds for arbitrary $\varepsilon > 0$. Letting $\varepsilon \to 0^+$ we obtain the result of the theorem.
(d) If u fulfils $\partial_t u + Lu \ge 0$, then denoting $w = -u$ we get $\partial_t w + Lw \le 0$ and we may use (a)–(c). ■

Next, we would like to prove the maximum principle for our parabolic problem and for weak solutions only. We restrict ourselves to the case when $c \ge 0$ a.e. in Q_T, $-\operatorname{div}\mathbf{b} \ge 0$ in the weak sense and $f \le 0$ in the following sense

Definition 6.1.11 A distribution $f \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega)) \ge 0$ (or ≤ 0), provided

$$\int_0^T \langle f, \varphi\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} \ge 0 \qquad (\text{or } \le 0)$$

for all $\varphi \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$ which are a.e. in Q_T non-negative.

We first present the heurisitic idea of the proof. Assume that the function $(u^+)'$ is an appropriate test function. Note that this function equals to the composition of the Heaviside function with u. Then

$$\langle \partial_t u, (u^+)'\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^+ \,\mathrm{d}x,$$

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}((u^+)')\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(u^+)'\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{b}u^+\,\mathrm{d}x \ge 0,$$

$$\int_\Omega cu(u^+)'\,\mathrm{d}x = \int\_\Omega cu^+\,\mathrm{d}x \ge 0$$

$$\langle f, (u^+)'\rangle \ge 0,$$

therefore we get

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^+\,\mathrm{d}x \le 0,$$

hence $u^+(t) \le 0$ provided $u^+(0) \le 0$. However, we need several technical tools to justify the computations above.

Note that for the function $z \mapsto z^+$ there exists a sequence of functions $z \mapsto \psi_n(z)$ such that $0 \le \psi_n \le z^+$ in $\mathbb{R}$, $\psi_n \nearrow z^+$ in $\mathbb{R}$ and ψ_n', $\psi_n'' \ge 0$ and they are bounded uniformly with respect to n.

We may therefore use the following lemma

Lemma 6.1.12 Let $\psi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be such that ψ', ψ'' are bounded and $\psi(0)=0$.
(i) If $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$, then $\psi(u)\in W_0^{1,2}(\Omega)$ and

$$\nabla\psi(u)=\psi'(u)\nabla u$$

in the weak sense and $u\mapsto\psi(u)$ is continuous from $W_0^{1,2}(\Omega)\to W_0^{1,2}(\Omega)$.
(ii) If $u\in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$, $\partial_t u\in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$, then

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^T\psi(u(t))\,\mathrm{d}x=\langle\partial_t u,\psi'(u(t))\rangle$$

a.e. in $(0,T)$

Proof. Item (i) follows from Theorem 2.2.4. We therefore prove item (ii). Let first $u\in C^1([0,T];W_0^{1,2}(\Omega))$ and $\psi\in C^2(\mathbb{R})$ with bounded first and second derivative. Then for t_1, $t_2\in[0,T]$

$$u(t_2)-u(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\partial_t u(s)\,\mathrm{d}s\qquad\text{in } W_0^{1,2}(\Omega),$$

i.e. $u(t_2,x)-u(t_1,x)=\int_{t_1}^{t_2}\partial_t u(s,x)\,\mathrm{d}s$ for a.e. $x\in\Omega$. Therefore, for a.e. $x\in\Omega$

$$\partial_t\psi(u(t,x))=\psi'(u(t,x))\partial_t u(t,x),$$

and

$$\psi(u(t_2,x))-\psi(u(t_1,x))=\int_{t_1}^{t_2}\psi'(u(s,x))\partial_t u(s,x)\,\mathrm{d}s\qquad\text{for a.e. } x\in\Omega.$$

Then, integrating the identity above over Ω and using the Fubini theorem and properties of the Gelfand triple

$$\begin{aligned}\int_\Omega\psi(u(t_2,x))\,\mathrm{d}x-\int_\Omega\psi(u(t_1,x))\,\mathrm{d}x&=\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega\psi'(u(s,x))\partial_t u(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\\&=\int_{t_1}^{t_2}\langle\partial_t u(s),\psi'(u(s))\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Now, if $u\in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$ and $\partial_t u\in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$, there exists a sequence $u_n\in C^1([0,T];W_0^{1,2}(\Omega))$ such that $u_n\to u$ in $L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$ and $\partial_t u_n\to\partial_t u$ in $L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$, see Lemma 5.3.19. Moreover, due to Theorem 5.3.17, we also have $u_n(t)\to u(t)$ in $L^2(\Omega)$ for all $t\in[0,T]$ (where we take u as the continuous representative). Then

$$\int_\Omega\psi(u_n(t_2,x))\,\mathrm{d}x-\int_\Omega\psi(u_n(t_1,x))\,\mathrm{d}x=\int_{t_1}^{t_2}\langle\partial_t u_n(s),\psi'(u_n(s))\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\,\mathrm{d}s.$$

Letting $n\to\infty$ and recalling that ψ grows at most linearly we end up with the desired formula

$$\int_\Omega\psi(u(t_2,x))\,\mathrm{d}x-\int_\Omega\psi(u(t_1,x))\,\mathrm{d}x=\int_{t_1}^{t_2}\langle\partial_t u(s),\psi'(u(s))\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\,\mathrm{d}s.$$

■

Theorem 6.1.13 Let $u\in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$ with $\partial_t u\in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$ be a weak solution to our parabolic problem, where ∂_t-L is a parabolic operator, $\operatorname{div}\mathbf{b}\le 0$ (in the weak sense on Q_T), $c\ge 0$ a.e. in Q_T, $f\le 0$ in the sense of Definition 6.1.11 and $g\le 0$ a.e. in Ω. Then

$$u(t)\le 0\qquad\text{a.e. in }\Omega\text{ for a.e. } t\in(0,T).$$

Proof. We consider the sequence ψ_n approximating the function $z\mapsto z^+$ as presented above. We use $\psi_n'(u)$ as a test function in the weak formulation of our parabolic problem. Whence

$$\begin{aligned}&\langle\partial_t u,\psi_n\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}+\int_\Omega\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial\psi_n(u)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x\\&+\int_\Omega\sum_1^d b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\psi_n'(u)\,\mathrm{d}x+\int_\Omega cu\psi_n'(u)\,\mathrm{d}x=\langle f,\psi_n'(u)\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Now, due to Lemma 6.1.12, our assumptions and properties of the approximation ψ_n we have

$$\langle \partial_t u, \psi_n \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega \psi_n(u(t))\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_n(u)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi_n''(u)\,\mathrm{d}x \geq 0,$$
$$\int_\Omega \sum_1^d b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi_n'(u)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \sum_1^d b_i \frac{\partial \psi_n(u)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x \geq 0,$$
$$\int_\Omega c u \psi_n'(u)\,\mathrm{d}x \geq 0,$$
$$\langle f, \psi_n'(u) \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq 0.$$

Then

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega \psi_n(u(t))\,\mathrm{d}x \leq 0,$$

hence

$$\int_\Omega \psi_n(u(t))\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega \psi_n(g)\,\mathrm{d}x \leq 0$$

for all $t \in (0, T]$ (provided we consider the continuous representative of u). Letting $n \to \infty$ and using the Lebesgue Monotone Convergence Theorem we end up with

$$\int_\Omega u^+(t)\,\mathrm{d}x \leq 0$$

for all $t \in (0, T]$, hence $u(t) \leq 0$ for all $t \in (0, T]$. ■

6.2 Second order hyperbolic equation

We will consider the following equation of the hyperbolic type

$$\begin{aligned} \partial_{tt} u + Lu &= f && \text{in } (0,T) \times \Omega =: Q_T, \\ u(0,\cdot) &= g && \text{in } \Omega, \\ \partial_t u(0,\cdot) &= h && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{on } (0,T) \times \partial\Omega, \end{aligned}$$

where

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu.$$

Definition 6.2.1 We say that the operator $\partial_{tt} + L$ is (uniformly) hyperbolic, if there exists a constant $\theta > 0$ such that

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \theta |\boldsymbol{\xi}|^2 \qquad \text{for all } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d \qquad \text{a.e. in } (0,T) \times \Omega.$$

Example 6.2.2. Assuming $a_{ij} = \delta_{ij}$, $b_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, d$ and $c = 0$, we get the classical wave equation

$$\partial_{tt} u - \Delta u = f.$$

As in the parabolic case, we introduce

$$B[u,v](t) = \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + cuv \Big)\,\mathrm{d}x$$

for all u, $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

We expect the weak formulation in the form

$$\langle \partial_{tt} u, v \rangle + B[u,v](t) = (f, v)_{L^2(\Omega)},$$

where the reason why we prefer to have more regular right-hand side than in the parabolic setting will be explained later. Therefore we expect, by analogy with the parabolic case, that u should belong to $L^2(0,T; W_0^{1,2}(\Omega))$, while $\partial_{tt} u$ should belong to $L^2(0,T; W^{-1,2}(\Omega))$.

We assume

$$\begin{aligned} &a_{ij},\, b_i,\, c \in C^1(\overline{Q_T}),\ a_{ij} = a_{ji} \quad i,j = 1,2,\dots,d, \\ &h \in L^2(\Omega),\ g \in W_0^{1,2}(\Omega),\ f \in L^2(0,T; L^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{6.14}$$

Definition 6.2.3 We say that $u \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$ with $\partial_t u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ and $\partial_{tt} u \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$ is a weak solution to the hyperbolic initial-boundary value problem problem provided

$$\langle \partial_{tt} u, v\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} + B[u,v](t) = (f,v)_{L^2(\Omega)}$$

for all $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ and a.e. $t \in (0,T)$, and

$$u(0) = g, \qquad \partial_t u(0) = h.$$

Remark 6.2.4. Recall that the assumptions above imply that $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$ and $\partial_t u \in C([0,T];W^{-1,2}(\Omega))$.

Theorem 6.2.5 Under assumptions (6.14) there exists a unique solution to our hyperbolic problem in the sense of Definition 6.2.3.

Proof. Step 1: Galerkin approximation. We proceed similarly as in the case of the parabolic problem. We take $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ the orthonormal basis in $L^2(\Omega)$ and orthogonal basis in $W_0^{1,2}(\Omega)$ formed by eigenfunctions of the Laplace operator with the homogeneous Dirichlet condition. We write

$$u_n(t,x) = \sum_{k=1}^n d_i^n(t) w_k(x),$$

where

$$(\partial_{tt} u_n, w_l)_{L^2(\Omega)} + B[u_n, w_l](t) = (f, w_l)_{L^2(\Omega)}, \qquad l = 1,2,\dots,n,$$

i.e.

$$\begin{aligned} d_l^{n\prime\prime}(t) + B\Big[\sum_{k=1}^n d_k^n(t) w_k, w_l\Big](t) &= (f, w_l)_{L^2(\Omega)} \\ d_l^n(0) &= (g, w_l)_{L^2(\Omega)} \\ d_l^{n\prime}(0) &= (h, w_l)_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{6.15}$$

$l = 1,2,\dots,n$. We obtained a system of the second order linear ODEs (n equations) which can be easily transformed into a system of $2n$ ODEs of the first order. We may now apply the Carathéodory theory which yields existence of a unique generalized solution on the time interval $[0,T]$ such that $d_l^{n\prime} \in AC[0,T]$, $l = 1,2,\dots,n$. The fact that the solution is global follows from the fact that the system is linear.
Step 2: Energy estimate. We now multiply (6.15) by $d_l^{n\prime}$, sum for $l = 1,2,\dots,n$ and get

$$(\partial_{tt} u_n, \partial_t u_n)_{L^2(\Omega)} + B[u_n, \partial_t u_n] = (f, \partial_t u_n)_{L^2(\Omega)}.$$

First, we have

$$(\partial_{tt} u_n, \partial_t u_n)_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\partial_t u_n\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Next

$$\begin{aligned} B[u_n, \partial_t u_n] &= \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial \partial_t u_n}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\partial_t u_n + c u_n \partial_t u_n\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \partial_t a_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\partial_t u_n + c u_n \partial_t u_n\Big)\,\mathrm{d}x \\ &\geq \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x \\ &- C\Big(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \|\partial_t u_n\|^2_{L^2(\Omega)}\Big). \end{aligned}$$

Therefore we have

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|\partial_t u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x\Big) \\ &\qquad \leq C\Big(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \|\partial_t u_n\|^2_{L^2(\Omega)}\Big). \end{aligned}$$

Employing the Gronwall lemma and the parabolicity of the operator, we get

$$\|\partial_t u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_n(t)\|^2_{W^{1,2}_0(\Omega)} \le C\big(\|g\|^2_{W^{1,2}_0(\Omega)} + \|h\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\big),$$

hence

$$\begin{aligned}\max_{[0,T]} \big(\|\partial_t u_n(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_n(t)\|_{W^{1,2}_0(\Omega)}\big)\\ \le C\big(\|g\|_{W^{1,2}_0(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\big).\end{aligned}$$

In order to estimate the second time derivative we proceed as in the parabolic problem. We write $v = v^1_n + v^2_n$, where v^1_n belongs to the linear hull of $\{w_l\}_{l=1}^n$ and v^2_n is perpendicular to it (both in $L^2(\Omega)$ and $W^{1,2}_0(\Omega)$). Recall that $\|v^1_n\|_{W^{1,2}_0(\Omega)} \le \|v\|_{W^{1,2}_0(\Omega)}$. Then

$$\begin{aligned}\langle \partial_{tt} u_n, v\rangle_{W^{1,2}_0(\Omega)} &= (\partial_{tt} u_n, v)_{L^2(\Omega)} = (\partial_{tt} u_n, v^1_n)_{L^2(\Omega)}\\ &= -B[u_n, v^1_n](t) + (f, v^1_n)_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Thus

$$\|\partial_{tt} u_n\|_{W^{-1,2}(\Omega)} = \sup_{\|v\|_{W^{1,2}_0(\Omega)}\le 1} \langle \partial_{tt} u_n, v\rangle_{W^{1,2}_0(\Omega)} \le C(\|u_n\|_{W^{1,2}_0(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}),$$

hence

$$\|\partial_{tt} u_n\|_{L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega)} \le C\big(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|g\|_{W^{1,2}_0(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Omega)}\big).$$

Step 3: Limit passage. We now let $n \to \infty$. As in the parabolic problem, for suitably chosen subsequence

$$\begin{aligned} u_{n_k} &\rightharpoonup^* u && \text{in } L^\infty(0,T;W^{1,2}_0(\Omega)),\\ \partial_t u_{n_k} &\rightharpoonup^* \partial_t u && \text{in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\\ \partial_{tt} u_{n_k} &\rightharpoonup \partial_{tt} u && \text{in } L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega)),\end{aligned}$$

and we can pass to the limit in the modified weak formulation to get

$$\int_0^T \langle \partial_{tt} u, w_l\rangle_{W^{1,2}_0(\Omega)} \psi \,\mathrm{d}t + \int_0^T B[u, w_l]\psi \,\mathrm{d}t = \int_0^T (f, w_l)_{L^2(\Omega)} \psi \,\mathrm{d}t$$

for all $l \in \mathbb{N}$ and all $\psi \in C^\infty_c(0,T)$. Hence, exactly as for the parabolic problem

$$\int_0^T \langle \partial_{tt} u, v\rangle_{W^{1,2}_0(\Omega)} \psi \,\mathrm{d}t + \int_0^T B[u, v]\psi \,\mathrm{d}t = \int_0^T (f, v)_{L^2(\Omega)} \psi \,\mathrm{d}t$$

for all $v \in W^{1,2}_0(\Omega)$ and all $\psi \in C^\infty_c(0,T)$, i.e.

$$\langle \partial_{tt} u, v\rangle_{W^{1,2}_0(\Omega)} + B[u,v] = (f,v)_{L^2(\Omega)}$$

for all $v \in W^{1,2}_0(\Omega)$ a.e. in $(0,T)$.

Next we look at the initial condition. Here, the problem is slightly more complex than for the parabolic problem. First, using the definition of the time derivative of the first time derivative of u we have

$$\int_0^T \langle \partial_{tt} u, v\rangle_{W^{1,2}_0(\Omega)} \psi \,\mathrm{d}t = -\int_0^T (\partial_t u, v)_{L^2(\Omega)} \psi' \,\mathrm{d}t$$

for all $v \in W^{1,2}_0(\Omega)$ and $\psi \in C^\infty_c(0,T)$. Therefore, taking a sequence $\psi_n \in C^\infty_c(0,T)$ such that ψ_n converges uniformly to $\psi \in C^\infty_c([0,T))$ we end up with

$$-\int_0^T (\partial_t u, v)\psi' \,\mathrm{d}t + \int_0^T B[u,v]\psi \,\mathrm{d}t = \int_0^T (f,v)_{L^2(\Omega)}\psi \,\mathrm{d}t + (\partial_t u(0), v)_{L^2(\Omega)}\psi(0)$$

for all $\psi \in C^\infty_c([0,T))$. Now, as $u \in AC([0,T]; L^2(\Omega))$, we finally have

$$\begin{aligned}\int_0^T (u,v)\psi'' \,\mathrm{d}t + \int_0^T B[u,v]\psi \,\mathrm{d}t = \int_0^T (f,v)_{L^2(\Omega)}\psi \,\mathrm{d}t\\ + (\partial_t u(0), v)_{L^2(\Omega)}\psi(0) - (u(0), v)_{L^2(\Omega)}\psi'(0).\end{aligned}$$

We now return to the Galerkin approximation and multiply it by $\psi \in C^\infty_c([0,T))$ and integrate over the time interval. We get

$$\int_0^T (\partial_{tt} u_n, w_l)_{L^2(\Omega)}\psi \,\mathrm{d}t + \int_0^T B[u_n, w_l]\psi \,\mathrm{d}t = \int_0^T (f, w_l)_{L^2(\Omega)}\psi \,\mathrm{d}t.$$

We integrate twice in the first term by parts and get

$$\int_0^T (u_n, w_l)\psi'' \,\mathrm{d}t + \int_0^T B[u_n, w_l]\psi \,\mathrm{d}t = \int_0^T (f, w_l)_{L^2(\Omega)}\psi \,\mathrm{d}t \\ + (P_n h, w_l)_{L^2(\Omega)}\psi(0) - (P_n g, w_l)_{L^2(\Omega)}\psi'(0).$$

We let $n \to \infty$ and use the density of finite linear combination of $\{w_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$ to get

$$\int_0^T (u, v)\psi'' \,\mathrm{d}t + \int_0^T B[u, v]\psi \,\mathrm{d}t = \int_0^T (f, v)_{L^2(\Omega)}\psi \,\mathrm{d}t \\ + (h, v)_{L^2(\Omega)}\psi(0) - (g, v)_{L^2(\Omega)}\psi'(0)$$

for all $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ and $\psi \in C_c^\infty([0,T))$. Therefore

$$(\partial_t u(0), v)_{L^2(\Omega)} = (h, v)_{L^2(\Omega)}$$
$$(u(0), v)_{L^2(\Omega)} = (g, v)_{L^2(\Omega)}$$

for all $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Due to the density of $W_0^{1,2}(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ we get the desired equality.
Step 4: Uniqueness. We now show the uniqueness of weak solutions to the hyperbolic equation. As for the parabolic case, it is enough to show that if $f = g = h = 0$, then the only solution is $u = 0$. However, we cannot proceed as in the part devoted to the a priori estimates, as the function $\partial_t u$ cannot be due to the lack of regularity used as test function. Therefore we use the "minus first"derivative. To this aim, let us define

$$v(t) := \begin{cases} \int_t^s u(\tau)\,\mathrm{d}\tau, & 0 \le t \le s, \\ 0, & s \le t \le T, \end{cases}$$

where u solves our hyperbolic problem with $f = g = h = 0$. Then $v(t) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ for a.a. $t \in (0,T)$ (even $\partial_t v \in L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega))$), and

$$\langle \partial_{tt} u, v\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} + B[u, v] = 0$$

a.e. in $(0,T)$, thus

$$\int_0^s \Big[\langle \partial_{tt} u, v\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} + B[u, v]\Big] \,\mathrm{d}t = 0.$$

As $\partial_t v = -u$, $\partial_t u(0) = v(s) = 0$, we get using the definition of the time derivative (and consequently, by approximation, using as test function in the time variable a constant function $\psi \equiv 1$)

$$\int_0^s \Big[- (\partial_t u, \partial_t v)_{L^2(\Omega)} + B[u, v]\Big](t) \,\mathrm{d}t = 0,$$

hence

$$\int_0^s \Big[(\partial_t u, u)_{L^2(\Omega)} + B[\partial_t v, v]\Big](t) \,\mathrm{d}t = 0.$$

Therefore we have

$$\int_0^s \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)\,\mathrm{d}t = \\ -\frac{1}{2}\int_0^s\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \partial_t a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ + \int_0^s\int_\Omega \Big(cv\partial_t v + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial \partial_t v}{\partial x_i} v\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

We rewrite the last term as

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial\partial_t v}{\partial x_i} v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \sum_{i=1}^d \frac{\partial b_i}{\partial x_i} uv \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \sum_{i=1}^d b_i u \frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x.$$

Then

$$\|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v(0)\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \le C\int_0^s \big(\|v\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\big)\,\mathrm{d}t + C\|v(0)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

We denote

$$w(t) := \int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad 0 \le t \le T;$$

then

$$\begin{aligned}\|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w(s)\|^2_{W^{1,2}_0(\Omega)} &\le C\int_0^s \Big(\|w(s)-w(t)\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} + \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)\,\mathrm{d}t \\ &\quad + C\|w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\le C\int_0^s \Big(2(\|w(s)\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} + \|w(t)\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}) + \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)\,\mathrm{d}t \\ &\quad + C\int_0^s \|u(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Hence

$$\|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + (1-2Cs)\|w(s)\|^2_{W^{1,2}_0(\Omega)} \le C\int_0^s \Big(\|w(t)\|^2_{W^{1,2}_0(\Omega)} + \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)\,\mathrm{d}t.$$

We choose T_1 so small that

$$2CT_1 = \frac{1}{2}.$$

Then on $[0,T_1]$ we have

$$\|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w(s)\|^2_{W^{1,2}_0(\Omega)} \le C\int_0^s \Big(\|w(t)\|^2_{W^{1,2}_0(\Omega)} + \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)\,\mathrm{d}t$$

which yields the uniqueness on the possibly short time interval $[0,T_1]$. Since we may use $u(T_1)$ as a new initial value. We proceed as above and prove the uniqueness on the time interval $[T_1, 2T_1]$. After finite number of steps we reach the time instant T. The proof is complete. ■

Next we study the regularity of the solution. As above, we start with a simple model case: here it is the wave equation in $\mathbb{R}^d$. We consider

$$\begin{aligned}\partial_{tt}u - \Delta u &= f \qquad \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^d\\ u(0,\cdot) &= g \qquad \text{in } \mathbb{R}^d\\ \partial_t u(0,\cdot) &= h \qquad \text{in } \mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

We compute

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^d}\big(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2\big)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^d}\big(\partial_t u\partial_{tt}u + \nabla u\cdot\partial_t\nabla u\big)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\partial_t u\big(\partial_{tt}u - \Delta u\big)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f\partial_t u\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Therefore

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^d}\big(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2\big)\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^d} f^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d}|\partial_t u|^2\,\mathrm{d}x,$$

which after employing the Gronwall inequality yields

$$\sup_{t\in(0,T)}\big(\|\partial_t u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\big) \le C\big(\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} + \|h\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|g\|^2_{W^{1,2}_0(\mathbb{R}^d)}\big).$$

Next, denote $\widetilde{u} := \partial_t u$. Then

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\widetilde{u} - \Delta\widetilde{u} &= \widetilde{f} \qquad \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^d,\\ \widetilde{u}(0,\cdot) &= \partial_t u(0,\cdot) = h \qquad \text{in } \mathbb{R}^d,\\ \partial_t\widetilde{u}(0,\cdot) &= \partial_{tt}u(0,\cdot) = \Delta u(0,\cdot) + f(0,\cdot) = \Delta g + f(0,\cdot) \qquad \text{in } \mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

As

$$\max_{[0,T]}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le C\big(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} + \|\partial_t f\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}\big),$$

we get

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in(0,T)}\big(\|\partial_{tt}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\partial_t\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\big)\\ &\quad\le C\big(\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} + \|\partial_t f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} + \|\nabla h\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\Delta g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\big).\end{aligned}$$

Finally, we write

$$\Delta u = \partial_{tt}u - f$$

and we have due to the elliptic regularity

$$\begin{aligned}&\|\nabla^2 u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\\ &\quad\le C\big(\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} + \|\partial_t f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} + \|h\|^2_{W^{1,2}_0(\mathbb{R}^d)} + \|g\|^2_{W^{2,2}(\mathbb{R}^d)}\big).\end{aligned}$$

We now show these bounds rigorously. We assume the validity of (6.14) and additionally

$$\begin{aligned} &\partial_t f \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \qquad g \in W^{2,2}(\Omega), \qquad h \in W_0^{1,2}(\Omega), \\ &\Omega \in C^2, \qquad \{a_{ij}\}_{i,j=1}^d \qquad \text{are independent of time.} \end{aligned} \tag{6.16}$$

Theorem 6.2.6 Let conditions (6.14) be fulfilled. Let $u \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$ with $\partial_t u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ and $\partial_{tt} u \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$ be a weak solution to

$$\begin{aligned} \partial_{tt} u + Lu &= f && \text{in } (0,T)\times\Omega, \\ u(0,\cdot) &= g && \text{in } \Omega, \\ \partial_t u(0,\cdot) &= h && \text{in } \Omega, \\ u(\cdot,\cdot) &= 0 && \text{on } (0,T)\times\partial\Omega. \end{aligned}$$

Then $u \in L^\infty(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$ with $\partial_t u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ and

$$\begin{aligned} &\|u\|_{L^\infty(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\qquad \le C\big(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|g\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Omega)}\big). \end{aligned}$$

Moreover, if (6.16) holds, then $u \in L^\infty(0,T;W^{2,2}(\Omega))$, $\partial_t u \in L^\infty(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$, $\partial_{tt} u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, $\partial_{ttt} u \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$ and

$$\begin{aligned} &\|u\|_{L^\infty(0,T;W^{2,2}(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L^\infty(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))} \\ &+\|\partial_{tt} u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\partial_{ttt} u\|_{L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))} \\ &\qquad \le C\big(\|f\|_{W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))} + \|g\|_{W^{2,2}(\Omega)} + \|h\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\big). \end{aligned}$$

Proof. Step 1: The first estimate was shown in the existence proof. Due to the uniqueness of weak solutions we know that it holds for arbitrary weak solution. Recall that the estimate follows from the Galerkin approximation, $u_n = \sum_{i=1}^n d_i^n(t) w_i(x)$,

$$(\partial_{tt} u_n, w_l)_{L^2(\Omega)} + B[u_n, w_l] = (f, w_l)_{L^2(\Omega)}, \qquad l = 1, 2, \dots, n,$$

where $\{w_l\}_{l=1}^\infty$ is a complete orthonormal system in $L^2(\Omega)$ and complete orthogonal system in $W_0^{1,2}(\Omega)$ formed by eigenfunctions of the Laplace operator with homogeneous Dirichlet conditions. We may multiply the l-th equation by ${d_l^n}'(t)$, sum up for $l = 1$ to n and integrate over $(0,T)$ (i.e., we test the equation by $\partial_t u_n$). We get the estimate for u_n with the right-hand side independent of n.

Next, let us assume (6.16). Using the regularity of the ordinary differential equations we differentiate the Galerkin approximation with respect to time and get

$$\begin{aligned} &(\partial_{ttt} u_n, w_l)_{L^2(\Omega)} + B[\partial_t u_n, w_l] \\ &= (\partial_t f, w_l)_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega \sum_{i=1}^d \partial_t b_i \frac{\partial u_n}{\partial x_j} w_l \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \partial_t c u_n w_l \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

We intend to use as test function $\partial_{tt} u_n$; we multiply the l-th equation by ${d_l^n}''(t)$ and sum for l from 1 to n. It yields

$$\begin{aligned} &(\partial_{ttt} u_n, \partial_{tt} u_n)_{L^2(\Omega)} + B[\partial_t u_n, \partial_{tt} u_n] \\ &= (\partial_t f, \partial_{tt} u_n)_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega \sum_{i=1}^d \partial_t b_i \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \partial_{tt} u_n \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \partial_t c u_n \partial_{tt} u_n \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|\partial_{tt} u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial \partial_t u_n}{\partial x_j} \frac{\partial \partial_t u_n}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x\Big) \le C\Big(\|\partial_t \nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_{tt} u_n\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \|\partial_{tt} u_n\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_t u_n\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_{tt} u_n\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_{tt} u_n\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_t f\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_{tt} u_n\|_{L^2(\Omega)}\Big). \end{aligned}$$

The Gronwall inequality yields

$$\begin{aligned} &\|\partial_{tt} u_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\partial_t \nabla u_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\qquad \le C\Big(\|\partial_{tt} u_n(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_t \nabla u_n(0)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\qquad + \|f\|_{W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))} + \|g\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Omega)}\Big). \end{aligned}$$

As
$$\|\nabla\partial_t u_n(0)\|_{L^2(\Omega)} \le \|\nabla h\|_{L^2(\Omega)},$$
and ($v_n^1 = P_n v$)
$$\begin{aligned}\|\partial_{tt}u_n(0)\|_{L^2(\Omega)} &\le \sup_{\|v\|_{L^2(\Omega)}\le 1}\Big((f(0),v_n^1)_{L^2(\Omega)} - B[u_n,v_1^n](0)\Big)\\ &\le C(\|u_n(0)\|_{W^{2,2}(\Omega)} + \|f(0)\|_{L^2(\Omega)} \le C\big(\|g\|_{W^{2,2}(\Omega)} + \|f\|_{W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))}\big),\end{aligned}$$
we get
$$\begin{aligned}&\|\partial_{tt}u_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\partial_t\nabla u_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\\ &\qquad\le C\big(\|g\|_{W^{2,2}(\Omega)} + \|f\|_{W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))} + \|h\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\big)\end{aligned}$$
and passing to the limit we obtain the desired estimate.
Step 2: Next, we write
$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \Big(-\partial_{tt}u + f - \sum_{i=1}^d b_i\frac{\partial u}{\partial x_i} - cu\Big)v\,\mathrm{d}x$$
and using the elliptic regularity we have
$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)}(t) \le C\big(\|\partial_{tt}u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\big)(t).$$
Hence
$$\begin{aligned}&\|u\|_{L^\infty(0,T;W^{2,2}(\Omega))}\\ &\quad\le C\big(\|\partial_{tt}u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\big)\\ &\quad\le C\big(\|f\|_{W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))} + \|g\|_{W^{2,2}(\Omega)} + \|h\|_{W^{1,2}(\Omega)}\big).\end{aligned}$$
Step 3: We now return back to the Galerkin approximation and differentiate it with respect to time. This is, indeed, possible due to the structure of the Galerkin approximation and regularity properties of systems of ordinary differential equations. We get
$$\begin{aligned}&(\partial_{ttt}u_n, w_l)_{L^2(\Omega)} + B[\partial_t u_n, w_l]\\ &\quad= (\partial_t f, w_l)_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega\sum_{i=1}^d \partial_t b_i\frac{\partial u_n}{\partial x_j}w_l\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \partial_t c u_n w_l.\end{aligned}$$
Similarly as in the existence part we may compute that
$$\begin{aligned}&\|\partial_{ttt}u_n\|_{L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))}\\ &\quad\le C\big(\|\partial_t f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|\partial_t u_n\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))} + \|u_n\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))}\big)\\ &\quad\le C\big(\|f\|_{W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))} + \|g\|_{W^{2,2}(\Omega)} + \|h\|_{W^{1,2}(\Omega)}\big).\end{aligned}$$
■

Exactly as in the parabolic problem we may proceed further

Theorem 6.2.7 Let $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^d$, $\{b_i\}_{i=1}^d$, c be independent of time and sufficiently smooth in Ω, $a_{ij} = a_{ji}$ for $i,j = 1,2,\dots,d$. Let $g \in W^{m+1,2}(\Omega)$, $h \in W^{m,2}(\Omega)$ and $\frac{\partial^k f}{\partial t^k} \in L^2(0,T;W^{m-k,2}(\Omega))$, $k = 0,1,\dots,m$. Let the following compatibility conditions hold
$$\begin{aligned}&g_0 := g \in W_0^{1,2}(\Omega), h_1 := h \in W_0^{1,2}(\Omega),\dots,\\ &g_{2l} := \frac{\partial^{2l-2}f}{\partial t^{2l-2}}(0,\cdot) - Lg_{2l-2} \in W_0^{1,2}(\Omega) \qquad \text{if } m = 2l,\\ &h_{2l+1} := \frac{\partial^{2l-1}f}{\partial t^{2l-1}}(0,\cdot) - Lh_{2l-1} \in W_0^{1,2}(\Omega) \qquad \text{if } m = 2l+1.\end{aligned}$$
Then
$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} \in L^\infty(0,T;W^{m+1-k,2}(\Omega)), \qquad k = 1,2,\dots,m+1,$$
and
$$\begin{aligned}&\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}\sum_{k=0}^{m+1}\Big\|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big\|_{W^{m+1-k,2}(\Omega)}\\ &\qquad\le C\Big(\sum_{k=0}^m\Big\|\frac{\partial^k f}{\partial t^k}\Big\|_{L^2(0,T;W^{m-k,2}(\Omega))} + \|g\|_{W^{m+1,2}(\Omega)} + \|h\|_{W^{m,2}(\Omega)}\Big).\end{aligned}$$

Remark 6.2.8. The role of the compatibility conditions is similar as in the case of parabolic problems and we saw partially its use above.

Therefore also

Theorem 6.2.9 Let $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^d$, $\{b_i\}_{i=1}^d$, c be $C^\infty(\overline{\Omega})$ (and independent of time), $a_{ij} = a_{ji}$ for $i,j = 1,2,\dots,d$, $f \in C^\infty(\overline{Q_T})$, g and $h \in C^\infty(\overline{\Omega})$, and let the compatibility conditions from Theorem 6.2.7 hold for any $m \in \mathbb{N}$. Then the unique solution to the hyperbolic problem is such that $u \in C^\infty(\overline{Q_T})$.

6.2.1 Finite speed of propagation of data for hyperbolic equation

Unlike the parabolic problem, there is no increase of regularity for the parabolic problem. Note that if $u(0) \in L^2(\Omega)$ for the parabolic problem (and, for simplicity, $f = 0$), then for arbitrarily short time interval $(0,T^*)$ there exists $t_1 \in (0,T^*)$ such that $u(t_1) \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Using this as initial value, we find in (t_1,T^*) a time instant t_2 such that $u(t_2) \in W^{2,2}(\Omega)$ etc.

Anything like this is impossible for the hyperbolic equation.

There is another property which is connected with the hyperbolic equation: the finite speed of propagation of data. Recall that for the parabolic problem, the speed is infinite. We consider

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u + Lu &= 0 && \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^d \\ u(0,\cdot) &= g && \text{in } \mathbb{R}^d \\ \partial_t u(0,\cdot) &= h && \text{in } \mathbb{R}^d \end{aligned} \tag{6.17}$$

with

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

where a_{ij} depends only on x in a smooth way, $a_{ij} = a_{ji}$ for all $i,j = 1,2,\dots,d$ and $\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \theta|\boldsymbol{\xi}|^2$ for some $\theta > 0$ and all $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$.

Let us fix $(t_0,x_0) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ and let us try to find K — a cone-like domain with vertex (t_0,x_0) such that $u \equiv 0$ provided $u = u_t = 0$ on $K_0 = K \cap \{t = 0\}$. We try to guess that such a region could be a level set $\{p = 0\}$, where p solves

$$\partial_t p - \Big(\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_i}\frac{\partial p}{\partial x_j}\Big)^{\frac12} = 0$$

in $(0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ (note that if $a_{ij} = \delta_{ij}$, i.e. we consider the wave equations, then the equation above reduces to $\partial_t p - \Big(\sum_{i=1}^d \Big(\frac{\partial p}{\partial x_i}\Big)^2\Big)^{\frac12} = 0$ with the solutions $p = \pm x + t$.

We assume the solution in the form

$$p(t,x) = q(x) + t - t_0,$$

$x \in \mathbb{R}^d$ and $0 \leq t \leq t_0$, hence

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial q}{\partial x_i}\frac{\partial q}{\partial x_j} = 1, \tag{6.18}$$

$q > 0$ in $\mathbb{R}^d \setminus \{x_0\}$, $q(x_0) = 0$. We introduce

$$K = \{(t,x); p(t,x) < 0\} = \{(t,x); q(x) < t_0 - t\},$$

and for $t > 0$

$$K_t = \{x; q(x) < t_0 - t\},$$

cross section at time $t > 0$. Recall that (6.18) implies that $|\nabla q| \neq 0$ in $\mathbb{R}^d \setminus \{x_0\}$ and ∂K_t is a smooth $d-1$-dimensional surface for $0 \leq t \leq t_0$.

Theorem 6.2.10 Let u be a smooth solution to (6.17). If $u = \partial_t u = 0$ on K_0, then $u \equiv 0$ within K.

Remark 6.2.11. Note that the claim of the theorem can be restated in the form that if $u(0,\cdot) = g$ and $\partial_t u(0,\cdot) = h$ in $\mathbb{R}^d$, then $u(t_0,x_0)$ depends only on values of g and h in K_0.

Proof. We define

$$e(t) := \frac12\int_{K_t}\Big(|\partial_t u|^2 + \sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)\,\mathrm{d}x, \qquad 0 \leq t \leq t_0.$$

Recall that due to the coarea formula

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{K_t} f dx = -\int_{\partial K_t} \frac{f}{|\nabla q|}\,\mathrm{d}S.$$

Then

$$\begin{aligned}\partial_t e(t) &= \int_{K_t}\Big(\partial_t u \partial_{tt} u + \sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \partial_t u}{\partial x_j}\Big)dx\\ &\quad - \frac{1}{2}\int_{\partial K_t}\Big(|\partial_t u|^2 + \sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)\frac{1}{|\nabla q|}\,\mathrm{d}S =: A - B.\end{aligned}$$

We compute, using (6.17) and Gauss theorem,

$$\begin{aligned}A &= \int_{K_t}\partial_t u\Big(\partial_{tt}u - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)\Big)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\partial K_t}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j\partial_t u\,\mathrm{d}S - \int_{K_t}\partial_t u\sum_{i,j=1}^d \partial_{x_j}(a_{ij})\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

where $\boldsymbol{\nu}$ is the outer normal to ∂K_t. We have, due to (6.18)

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\nu_i\nu_j = \sum_{i,j=1}^d \frac{a_{ij}}{|\nabla q|^2}\frac{\partial q}{\partial x_i}\frac{\partial q}{\partial x_j} = \frac{1}{|\nabla q|^2},$$

hence using the generalized Cauchy inequality

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j &\le \Big(\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\nu_i\nu_j\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\le \Big(\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{|\nabla q|}.\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}|A| &\le C\partial_t e + \int_{\partial K_t}\Big(\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)^{\frac{1}{2}}\frac{|\partial_t u|}{|\nabla q|}\,\mathrm{d}S\\ &\le Ce(t) + \frac{1}{2}\int_{\partial K_t}\Big(|\partial_t u|^2 + \sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)\frac{1}{|\nabla q|}\,\mathrm{d}S \le Ce(t) + B.\end{aligned}$$

Therefore

$$\partial_t e(t) \le Ce(t),$$

and as $e(0) = 0$, we have $e(t) = 0$ for all $0 \le t \le t_0$. Therefore $\partial_t u = \nabla u = 0$ in K, hence $u \equiv 0$ in K. ∎

6.3 Semigroup theory

We will now present another point of view to linear evolutionary PDEs: instead of studying a PDE in $\mathbb{R}^{d+1}$ we consider an ODE in a Banach space. This approach is closer to functional analysis.

6.3.1 Homogeneous equation

Recall that the ODE

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = au, \qquad u(0) = u_0$$

has a unique solution

$$u(t) = u_0\mathrm{e}^{at}.$$

By analogy, considering

$$\partial_t u - \Delta u = 0, \qquad u(0) = u_0$$

(together with some boundary conditions) we expect the solution in the form

$$u(t) = u_0\mathrm{e}^{\Delta t}$$

for suitably defined exponential of the Laplace operator. More generally, let $A\colon X \to X$, where X is a Banach space. (Note that in the energy method we considered the Laplace operator as an operator from $W_0^{1,2}$ to $W^{-1,2}$, i.e. it is not the same.) We consider the problem

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Au, \qquad u(0) = u_0$$

and hope to get the solution in the form

$$u(t) = u_0 \mathrm{e}^{At}.$$

However, as A is generally an unbounded operator, it is not always true that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

converges, at least, not for arbitrary $t \in \mathbb{R}$.

Before solving this problem, we slightly change our point of view. We consider the solution to our ODE in a Banach space u; $[0,\infty) \to X$. We assume that X is a Banach space, $A\colon X \to X$ a linear operator with $D(A) \subsetneq X$, a linear subspace of X. The operator A is usually unbounded. We will consider such A that
(a) the ODE has unique solution for arbitrary $u(0) = u_0 \in X$
(b) the theory covers as many as possible interesting PDEs.
Assume for a moment that (a) and (b) hold true and we write

$$u(t) = S(t)u_0, \qquad t > 0.$$

We expect the following properties:
(i) $S(t)\colon X \to X$ is linear
(ii) $S(0)u = u$ for all $u \in X$ in the sense of the limit in X, i.e. $\lim_{t\to 0^+} S(t)u = u$.
(iii) $S(t+s)u = S(t)S(s)u = S(s)S(t)u$ $\forall t, s \geq 0$ $u \in X$.

Definition 6.3.1 A family $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ of bounded linear operators mapping X to X is called a semigroup (a c_0-semigroup) if (i)—(iii) holds. Moreover, if it holds $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$, we call the semigroup a contraction semigroup.

Remark 6.3.2. A contraction semigroup fulfills $\|S(t)u\|_X \leq \|u\|_X$.

Lemma 6.3.3 Let $S(t)$ be a c_0-semigroup in X. Then
(a) There exists $M \geq 1$, $\omega \geq 0$ such that

$$\|\mathcal{S}(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\mathrm{e}^{\omega t} \qquad \forall t \geq 0.$$

(b) The mapping $t \mapsto S(t)y$ is continuous from $[0,\infty) \to X$, for all $u \in X$.

Proof. (a) We proceed by contradiction. We claim that there exists $M \geq 1$ and $\delta > 0$ such that $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$ for all $t \in [0,\delta]$. If not, then there exists $t_n \to 0^+$ such that $\|S(t_n)\|_{\mathcal{L}(X)} \to \infty$, but $S(t_n)u \to u$ for all $u \in X$. Therefore $\|S(t_n)u\|_X$ is bounded. This contradicts to the principle of uniform boundedness, as $\|S(t_n)\|_{\mathcal{L}(X)}$ are bounded if and only if $\|S(t_n)u\|_X$ are bounded for all $u \in X$.

Now, let $\omega := \frac{1}{\delta}\ln M$, i.e. $M = \mathrm{e}^{\omega\delta}$. Then for $t \geq 0$ arbitrary, $t = n\delta + \varepsilon$, $\varepsilon \in [0,\delta)$, we have

$$\begin{aligned}\|S(t_n)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|S(\delta + \delta + \cdots + \delta + \varepsilon)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|S(\delta)S(\delta)\dots S(\delta)S(\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \|S(\delta)\|^n_{\mathcal{L}(X)}\|S(\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M^n \cdot M \leq M\mathrm{e}^{\omega t}.\end{aligned}$$

(b) The continuity at 0^+ is property (ii) from the definition of the semigroup. Continuity from the right at $t > 0$ is a consequence of the following:

$$S(t+h)u = S(t)S(h)u \to S(t)u$$

for $h \to 0^+$ due to the continuity of $S(t)$ in X and the fact that $S(h)u \to u$ in X for $h \to 0^+$. Similarly, we consider the continuity from the left. Let $0 < h < t$. Then

$$S(t-h)u - S(t)u = S(t-h)\big(u - S(h)u\big).$$

As $u - S(h)u \to 0$ in X for $h \to 0^+$ and $\|S(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$ independently of h, we have

$$\|S(t-h)u - S(t)u\|_X \leq \|S(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)}\|u - S(h)u\|_X \leq M\mathrm{e}^{\omega t}\|u - S(h)u\|_X \to 0$$

for $h \to 0^+$. ■

Definition 6.3.4 An unbounded operator $A\colon X \to X$ with the domain $D(A)$ is called a generator of the semigroup, if

$$Au = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)u - u}{h},$$

where

$$D(A) = \Big\{u \in X;\ \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(S(h)u - u) \ \text{ exists in } X\Big\}.$$

Remark 6.3.5. Note that the above defined operator is linear and $D(A) \subset X$ is a linear subspace.

Theorem 6.3.6 Let A be a generator of a c_0-semigroup with its domain $D(A)$. Then
(i) $u \in D(A) \implies S(t)u \in D(A)\ \forall t \ge 0$
(ii) $u \in D(A) \implies AS(t)u = S(t)Au = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t)u$ for all $t \ge 0$ (at $t = 0$ from the right)
(iii) $u \in D(A)$, $t \ge 0 \implies \int_0^t S(s)u\,\mathrm{d}s \in D(A)$ and $A\big(\int_0^t S(s)u\,\mathrm{d}s\big) = S(t)u - u$.

Proof. (i) Let $u \in D(A)$ and $t \ge 0$ be given. We ask whether $\frac{1}{h}\big(S(h)S(t) - S(t)u\big) \to y$ in X, where $y \in X$. Then $S(t)u \in D(A)$ and $A(S(t)u) = y$. However,

$$\frac{1}{h}\Big(S(h)S(t) - S(t)u\Big) = S(t)\Big(\frac{1}{h}\big(S(h)u - u\big)\Big) \to S(t)Au$$

in X, as $S(t)$ is linear and bounded.
(ii) Let $u \in D(A)$. Above in (i) we also proved that $A(S(t)u) = S(t)(Au)$ and $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t)u = S(t)(Au)$ from the right for $t \ge 0$. We need to compute the derivative from the left. We have

$$\frac{S(t-h)u - S(t)u}{-h} = S(t-h)\Big(\frac{u - S(h)u}{-h}\Big),$$

therefore

$$\begin{aligned}\frac{S(t-h)u - S(t)u}{-h} - S(t)(Au) &= S(t-h)\Big(\frac{u - S(h)u}{-h}\Big) - S(t-h)S(h)(Au)\\ &= S(t-h)\Big[\frac{u - S(h)u}{-h} - S(h)(Au)\Big] \to 0,\end{aligned}$$

as $S(t-h)$ is bounded uniformly with respect to h and both terms in the bracket tend to Au.
(iii) Denote

$$y = \int_0^t S(s)u\,\mathrm{d}x, \qquad u \in X, \quad t > 0$$

(as $S(s)$ is bounded, the Bochner integral exists). Then

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\big(S(h)y - y\big) &= \frac{1}{h}\Big(S(h)\int_0^t S(s)u\,\mathrm{d}s - \int_0^t S(s)u\,\mathrm{d}s\Big)\\ &= \frac{1}{h}\Big(\int_h^{t+h} S(s)u\,\mathrm{d}s - \int_0^t S(s)u\,\mathrm{d}s\Big)\\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)u\,\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^h S(s)u\,\mathrm{d}s\Big) \to S(t)u - S(0)u = S(t)u - u.\end{aligned}$$

Therefore $y \in D(A)$ and $Ay = S(t)u - u$. ∎

Remark 6.3.7. (i) Note that for $u \in D(A)$

$$S(t)u - u = S(t)u - S(0)u = \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}S(s)u\,\mathrm{d}s = \int_0^t S(s)(Au)\,\mathrm{d}s.$$

(ii) We proved that $D(A)$ is invariant with respect to $S(t)$, and $S(t)$ and A commute in $D(A)$. Moreover, $t \mapsto S(t)u_0$ is a classical solution to $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u = Au$, $u(0) = u_0$, if $u_0 \in D(A)$.

Recall that an unbounded operator A with its domain $D(A)$ is closed, if for $u_n \in D(A)$, $u_n \to u$ in X, $Au_n \to v$ in X we have $u \in D(A)$ and $Au = v$. It follows that
A with its domain $D(A)$ is closed $\iff$ $D(A)$ is a Banach space (complete) with respect to the norm $\|u\|_X + \|Au\|_X$ (the graph norm).

Theorem 6.3.8 Let A with $D(A)$ be a generator of a c_0-semigroup $S(t)$ in X. Then $D(A)$ is dense in X and A with its domain $D(A)$ is closed.

Proof. (i) Density. Let $x \in X$ be given. Then $x = \lim_{h\to 0+} \int_0^h S(s)x\,\mathrm{d}s$, due to the continuity of $S(s)$ and standard properties of the Bochner integral. Let us show that $x_h := \int_0^h S(s)u\,\mathrm{d}s \in D(A)$. We have

$$\begin{aligned}\frac{S(r)x_h - x_h}{r} &= \frac{1}{r}\int_r^{h+r} S(s)x\,\mathrm{d}s - \frac{1}{r}\int_0^h S(s)x\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{r}\int_h^{h+r} S(s)x\,\mathrm{d}s - \frac{1}{r}\int_0^r S(s)x\,\mathrm{d}s \to S(h)x - x\end{aligned}$$

as $r \to 0^+$. Therefore $x_h \in D(A)$ and $Ax_h = S(h)x - x$.

(ii) Closedness. Let $u_k \in D(A)$ and suppose $u_k \to u$, $Au_k \to v$ in X. We have to verify that $u \in D(A)$ and $v = Au$. According to Theorem 6.3.6

$$S(t)u_k - u_k = \int_0^t S(s)Au_k\,\mathrm{d}s.$$

Letting $k \to \infty$ (recall that $\|S(s)(Au_k) - S(s)v\|_X \le \|S(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\|Au_k - v\|_X \to 0$ uniformly with respect to s from a bounded interval)

$$S(t)u - u = \int_0^t S(s)v\,\mathrm{d}s.$$

Therefore

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)u - u}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\int_0^t S(s)v\,\mathrm{d}s = v.$$

Then $u \in D(A)$ and $v = Au$. ■

We also need the following uniqueness result.

Lemma 6.3.9 Let $S(t)$, $\widetilde{S}(t)$ be two c_0-semigroups with the same generator. Then $S(t) = \widetilde{S}(t)$ for all $t \ge 0$.

Proof. (Idea): Let $u \in D(A)$. Define $y(t) = S(T-t)\widetilde{S}(t)u$. We have

$$y'(t) = -AS(T-t)\widetilde{S}(t)u + AS(T-t)\widetilde{S}(t)u = 0,$$

hence $y'(t) = 0$ in $(0,T)$ and $y(t) \in C([0,T];X)$, we have $S(T)u = y(0) = y(T) = \widetilde{S}(T)$. Finally, we use the density of $D(A)$ in X. ■

Definition 6.3.10 Let A with its domain $D(A)$ be an unbounded operator. We define
(i) The resolvent set $\varrho(A) := \{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda I - A\colon X \to X \text{ is one to one}\}$ (can also be considered as a subset of $\mathbb{C}$)
(ii) The resolvent $R_\lambda (= R_\lambda(A)) = (\lambda I - A)^{-1}\colon X \to D(A), \lambda \in \varrho(A)$
(iii) The spectrum $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A \text{ is not invertible}\}$ (generally, $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \varrho(A)$).

Remark 6.3.11. The operator $A\colon D(A) \to X$ is continuous, therefore the same holds for $\lambda I - A$. Hence R_λ is by Banach theorem on open mappings continuous ($X \to D(A)$).

Lemma 6.3.12 (i) Let $\lambda \in \varrho(A)$. Then $AR_\lambda x = \lambda R\lambda x - x$ for all $x \in X$ and $R_\lambda Ax = \lambda R_\lambda x - x$ for all $x \in X$.
(ii) Let λ, $\mu \in \varrho(A)$. Then $R_\lambda x - R_\mu x = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu x$ for all $x \in X$; whence $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$.
(iii) Let A with its domain $D(A)$ be a generator of a c_0-semigroup. Let further $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le M\mathrm{e}^{\omega t}$. Then $\lambda \in \varrho(A)$ for all $\lambda > \omega$ and

$$R_\lambda x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}S(t)x\,\mathrm{d}t$$

for all $x \in X$; thus $\|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M}{\lambda-\omega}$.

Proof. (i) We have

$$AR_\lambda x = (A - \lambda I + \lambda I)R_\lambda x = -x + \lambda R_\lambda x.$$

Similarly

$$R_\lambda Ax = R_\lambda(A - \lambda I + \lambda I)x = -x + R_\lambda\lambda x = \lambda R\lambda x - x.$$

(ii) Recall that

$$(A - \lambda I)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda - \mu)^n(A - \lambda I)^{-n-1}.$$

Then

$$\begin{aligned}
R_\lambda - R_\mu &= -\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\mu)^n (A-\mu I)^{-n-1} + (A-\mu I)^{-1} \\
&= \Big(-\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\mu)^n (A-\mu I)^{-n} + I\Big)(A-\mu I)^{-1} \\
&=(\mu-\lambda)\Big(-\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda-\mu)^{n-1} (A-\mu I)^{-n}\Big)(\mu I - A)^{-1} \\
&= (\mu-\lambda)(\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1} = (\mu-\lambda)R_\lambda R_\mu.
\end{aligned}$$

As $R_\mu - R_\lambda = (\lambda-\mu)R_\mu R_\lambda$, we easily see that

$$R_\mu R_\lambda = R_\lambda R_\mu = \frac{R_\lambda - R_\mu}{\mu - \lambda}.$$

(iii) Note that we may assume, without loss of generality, that $\omega = 0$. Indeed, if A with its domain $D(A)$ generates the c_0-semigroup $S(t)$, then $\widetilde{A} = a - \omega I$ with $D(\widetilde{A}) = D(A)$ generates the semigroup $\widetilde{S}(t) = \mathrm{e}^{-\omega t}S(t)$. Moreover, $R_\lambda(\widetilde{A}) = R_{\lambda+\mu}(A)$.

Assume therefore that $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le M$ and $\lambda > 0$. We show that $\lambda \in \varrho(A)$. Denote

$$\widetilde{R}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} S(t)x \,\mathrm{d}t$$

(Laplace transform of the semigroup $\{S(t)\}_{t\ge 0}$). As

$$\|\mathrm{e}^{-\lambda t}S(t)x\|_X \le \mathrm{e}^{-\lambda t}M\|x\|_X \in L^1(0,\infty),$$

we have

$$\|\widetilde{R}x\|_X \le \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}M\|x\|_X \,\mathrm{d}t = \frac{M}{\lambda}\|x\|_X.$$

Thus $\widetilde{R} \in \mathcal{L}(X)$ and $\|\widetilde{R}\|_{\mathcal{L}(x)} \le \frac{M}{\lambda}$. Let us show that $\widetilde{R}x \in D(A)$. We compute

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}(S(h)-I)\widetilde{R}x &= \frac{1}{h}\int_0^\infty \big(\mathrm{e}^{-\lambda t}S(h)S(t)x - \mathrm{e}^{-\lambda t}S(t)x\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{h}\int_h^\infty \mathrm{e}^{-\lambda(t-h)}S(t)x\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}S(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}S(t)x\,\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{e}^{\lambda h}}{h}\int_0^h \mathrm{e}^{-\lambda t}S(t)x\,\mathrm{d}t \\
&\to \lambda\widetilde{R}x - x \qquad \text{as } h \to 0^+.
\end{aligned}$$

It means that $\widetilde{R}x \in D(A)$, $A\widetilde{R}x = \lambda\widetilde{R}x - x$ for all $x \in X$, i.e. $(\lambda I - A)\widetilde{R}x = x$. Then $\lambda I - A\colon D(A) \to X$ is onto.

We now show that it is injective. Let $x \in D(A)$ be fixed. Then (see homework)

$$\begin{aligned}
A\widetilde{R}x &= A\Big(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}S(t)x\,\mathrm{d}t\Big) = \int_0^\infty A\big(\mathrm{e}^{-\lambda t}S(t)x\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}S(t)Ax\,\mathrm{d}t = \widetilde{R}Ax \qquad \text{due to Theorem 6.3.6.}
\end{aligned}$$

Thus $A\widetilde{R} = \widetilde{R}A$ in $D(A)$ and therefore $\widetilde{R}(\lambda I - A)x = \lambda\widetilde{R}x - \widetilde{R}Ax = \lambda\widetilde{R}x - \lambda\widetilde{R}x + x = x$. Hence $(\lambda I - A)x = 0 \Rightarrow x = 0$, $\lambda I - A$ is injective, $\lambda \in \varrho(A)$ and $\widetilde{R} = (\lambda I - A)^{-1} = R_\lambda(A)$. ■

We are now prepared to prove the main result of this subsection.

Theorem 6.3.13 — Hille–Yosida. Let A with its domain $D(A) \subset X$ be an unbounded operator. Then A with its domain $D(A)$ is a generator of a contraction semigroup $\{S(t)\}_{t\ge 0}$if and only if A with its domain $D(A)$ is closed, $D(A)$ is dense in X, $(0,\infty) \subset \varrho(A)$ and $\|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{1}{\lambda}$ for $\lambda > 0$.

Proof. "$\Longrightarrow$"Density and closedness follow from Theorem 6.3.8. The fact that $(0,\infty) \subset \varrho(A)$ together with the estimate of the resolvent follow from Lemma 6.3.12.

"$\Longleftarrow$"We use the Yosida approximation. We set $A_n := nAR_n(A)$ and aim at showing that $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{tA_n} = S(t)$. We also recall that if $F_n\colon X \to X$ linear, $\|F_n\|_{\mathcal{L}(X)} \le C$ and $F_n y \to y$ for all $y \in S$, S dense in X, then $F_n x \to x$ for all $x \in X$.

Step 1: We claim that $A_n = n^2 R_n(A) - nI$, hence $A_n \in \mathcal{L}(X)$, $nR_n(A)x \to x$ for all $x \in X$, $A_n x \to Ax$ for all

$x \in D(A)$.
(i) $AR_n(A) = A(nI-A)^{-1} = (A-\lambda I)(nI-A)^{-1}+nI(nI-A)^{-1} = -I+nR_n(A)$. Therefore $nAR_n(A) = n^2R_n(A)-nI \in \mathcal{L}(X)$, as $R_n(A) \in \mathcal{L}(X)$.
(ii) Take $F_n := nR_n(A)$. Then $\|F_n\|_{\mathcal{L}(X)} \le 1$ as $\|R_n(A)\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{1}{n}$ for all $n \in \mathbb{N}$, $S := D(A)$ is dense in X. Then we have for all $y \in D(A)$ that

$$nR_n(A)y = y + AR_n(A)y = \text{ (due to Lemma 6.3.12) } y + R_n(A)(Ay) \to y$$

for $n \to \infty$.
(iii) Therefore $nR_n(A)x \to x$ for all $x \in X$ and $A_nx = nAR_n(A)x = nR_n(A)Ax \to Ax$ as $n \to \infty$ for all $x \in D(A)$.
Step 2: We set $S_n(t) := \mathrm{e}^{tA_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^kA_n^k}{k!} \in \mathcal{L}(X)$, as $A_n \in \mathcal{L}(X)$ due to Step 1. It also holds $A_n = n^2R_n(A) - nI$, hence

$$\mathrm{e}^{tA_n} = \mathrm{e}^{tn^2R_n(A)-tnI} = \mathrm{e}^{-nt}\mathrm{e}^{-n^2tR_n(A)}.$$

Now

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}^{-n^2tR_n(A)}\|_{\mathcal{L}(X)} &= \Big\|\sum_{k=0}^{n} \frac{(nt)^k(nR_n(A))^k}{k!}\Big\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nt)^k}{k!}\|nR_n(A)\|^k_{\mathcal{L}(X)} \le \mathrm{e}^{nt}.\end{aligned}$$

Thus

$$\|S_n(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le 1$$

for all $n \in \mathbb{N}$, hence $S_n(t)$ are contractions.
Step 3: We now study $\lim_{n\to\infty} S_n(t)x$ for $x \in X$. First, let $x \in D(A)$. Let t be fixed for a moment. We have

$$\begin{aligned}S_n(t)x - S_m(t)x &= [S_n(t-s)S_m(s)]_{s=0}^t = \big[\mathrm{e}^{(t-s)A_n}\mathrm{e}^{sA_m}x\big]_{s=0}^t \\ &= \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big[\mathrm{e}^{(t-s)A_n}\mathrm{e}^{sA_m}x\big]\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \big[-A_n\mathrm{e}^{(t-s)A_n}\mathrm{e}^{sA_m}x + \mathrm{e}^{(t-s)A_n}A_m\mathrm{e}^{sA_m}x\big]\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Recall that $A_nA_m = A_mA_n$ (as $R_n(A)$ and $R_m(A)$ commute, see Lemma 6.3.12). Then

$$\begin{aligned}S_n(t)x - S_m(t)x &= \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A_n}\mathrm{e}^{sA_m}(A_mx - A_nx)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t S_n(t-s)S_m(s)(A_mx - A_nx)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Hence

$$\|S_n(t)x - S_m(t)x\|_X \le t\|A_mx - A_nx\|_X.$$

As both A_nx and $A_mx \to Ax$, then $A_nx - A_mx \to 0$ as m, $n \to \infty$ and $\{S_n(t)x\}_{t\ge 0}$ satisfies the Bolzano–Cauchy condition uniformly with respect to $t \in [0,T]$, $T < \infty$, i.e. $S_n(t)x \rightrightarrows S(t)x$ as $n \to \infty$, for all $x \in D(A)$. Thus, due to the convergence principle above

$$S_n(t)x \rightrightarrows S(t)x \qquad \forall x \in X,$$

where $S(t)$ is a c_0-semigroup of contractions.
Step 4: Let us show that $S(t)$ is generated by A with the domain $D(A)$. Let $\widetilde{A}$ with the domain $D(\widetilde{A})$ be the generator of $S(t)$. Let $x \in D(A)$. Then

$$\begin{aligned}S_n(t)x - x &= \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}S_n(s)x\,\mathrm{d}s = \int_0^t A_nS_n(s)x\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t S_n(s)A_nx\,\mathrm{d}s \to \int_0^t S(s)Ax\,\mathrm{d}s \qquad \text{as } n \to \infty,\end{aligned}$$

due to the fact that $S_n(t) \rightrightarrows S(t)$ in $\mathcal{L}(X)$ and $A_nx \to Ax$ in X. Therefore

$$S(t)x - x = \int_0^t S(s)Ax\,\mathrm{d}s.$$

It implies

$$\frac{1}{h}(S(h)x - x) = \frac{1}{h}\int_0^h S(s)Ax\,\mathrm{d}s \to Ax,$$

as $h \to 0^+$. Hence $x \in D(\widetilde{A})$, $\widetilde{A}x = Ax$, i.e. $D(A) \subset D(\widetilde{A})$, $\widetilde{A}x = Ax$ for all $x \in D(A)$. Now, let $\lambda > 0$. As $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$, $\lambda \in \varrho(A)$ (due to our assumptions) and $\lambda \in \varrho(\widetilde{A})$ (due to Lemma 6.3.12), we have $\lambda I - \widetilde{A} - \lambda I - A$ in $D(A)$. Hence $\lambda I - \widetilde{A}|_{D(A)}$ is onto, injective. Then $D(A) = D(\widetilde{A})$, $A = \widetilde{A}$ and A with its domain $D(A)$ is the generator of $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. ■

Remark 6.3.14. A semigroup $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ is called ω-contractive, if $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \mathrm{e}^{\omega t}$.

Corollary 6.3.15. Let A with the domain $D(A) \subset X$ be an unbounded operator. Then A with the domain $D(A)$ is a generator of an ω-contractive semigroup $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ if and only if A with its domain $D(A) \subset X$ is closed, $D(A)$ is dense in X, $(\omega, \infty) \subset \varrho(A)$ and $\|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda - \omega}$ for $\lambda > \omega$.

Proof. As $\widetilde{S}(t) := \mathrm{e}^{-\omega t} S(t)$ is a contraction semigroup, we may proceed as in Theorem 6.3.13. Note that even the case $M > 1$ can be treated similarly, however, we do not need it here. ■

Remark 6.3.16. If $u_0 \in D(A)$, then $S(t)u_0$ is a classical solution to

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Au, \qquad u(0) = u_0,$$

where $S(t)$ is a c_0-semigroup generated by A with its domain $D(A)$. If $u_0 \in X$ merely, then we may take $S(t)u_0 := \lim_{n\to\infty} S(t)u_n$, where $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ and $u_n \to u_0$ in X.

Example 6.3.17. Consider the second order parabolic problem

$$\begin{aligned} \partial_t u + Lu &= 0 && \text{in } (0,T) \times \Omega \\ u &= 0 && \text{on } (0,T) \times \partial\Omega \\ u(0) &= g && \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

where

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + \sum_{i=1}^{d} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu$$

with smooth coefficients $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^d$, $\{b_i\}_{i=1}^d$ and c in the x-variable, independent of the time variable t. Moreover, let $\Omega \in C^2$, $g \in W_0^{1,2}(\Omega)$. We take $X = L^2(\Omega)$, $D(A) = W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ and $Au = -Lu$. Then A is an unbounded linear operator. Recall that $\alpha\|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq B[u,u] + \gamma\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$ holds for $\alpha > 0$, $\gamma \geq 0$ and $B[\cdot,\cdot]$ defined via Lu as above.

Theorem 6.3.18 The operator A generates a c_0-semigroup $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ on $L^2(\Omega)$ which is γ-contractive.

Proof. We must verify assumptions of Corollary 6.3.15 with $\omega := \gamma$.
(i) Clearly, $D(A)$ is dense in $L^2(\Omega)$.
(ii) The operator A is closed. To this aim, let $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ be such that

$$\begin{aligned} u_k &\to u \text{ in } L^2(\Omega) \\ Au_k &\to f \text{ in } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Let u_k solve

$$\begin{aligned} Au_k &= G_k && \text{in } \Omega \\ u_k &= 0 && \text{on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Then due to a generalized result on the elliptic regularity we have

$$\|u_k\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq C(\|G_k\|_{L^2(\Omega)} + \|u_k\|_{L^2(\Omega)}) = C(\|Au_k\|_{L^2(\Omega)} + \|u_k\|_{L^2(\Omega)}),$$

hence due to the linearity of the operator A we have

$$\|u_k - u_l\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq C\big(\|Au_k - Au_l\|_{L^2(\Omega)} + \|u_k - u_l\|_{L^2(\Omega)}\big).$$

Whence $u_k \to u$ in $W^{2,2}(\Omega)$, which implies $Au = f$ (as $Au_k \to Au$ in $L^2(\Omega)$).

We know that for each $\lambda \geq \gamma$ the boundary value problem

$$\begin{aligned} Lu + \lambda u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$

has unique solution $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ and due to the elliptic regularity, further, $u \in W^{2,2}(\Omega)$. Thus $u \in D(A)$. Therefore we may write

$$\lambda u - Au = f.$$

Thus $\lambda I - A\colon D(A) \to X$ is one to one, onto, for $\lambda \geq \gamma$. Hence $\varrho(A) \subset (\gamma, \infty)$. Therefore, using as test function u in the weak formulation,

$$(\lambda - \gamma)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

As $u = R_\lambda f$, we have

$$\|R_\lambda f\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda - \gamma}\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

for any $f \in L^2(\Omega)$. Whence

$$\|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda - \gamma}.$$

■

To summarize the difference between the energy method and the semigroup approach for the parabolic problems, by the semigroup theory we immediately get regular solution and the method is elegant, however, it requires more restrictive assumptions on the coefficients of the problem and the regularity can anyway be proved by other methods.

Example 6.3.19. We now consider the hyperbolic problem

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u + Lu &= 0 && \text{in } (0,T) \times \Omega \\ u &= 0 && \text{on } (0,T) \times \partial\Omega \\ u(0) &= g && \text{in } \Omega \\ \partial_t u(0) &= h && \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

We first rewrite the system as a system of first order equations

$$\begin{aligned} \partial_t u &= v && \text{in } (0,T) \times \Omega \\ \partial_t v + Lu &= 0 && \text{in } (0,T) \times \Omega \\ u &= 0 && \text{on } (0,T) \times \partial\Omega \\ u(0) &= g && \text{in } \Omega \\ v(0) &= h && \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

We assume that

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) + cu,$$

where $c \geq 0$ and $a_{ij} = a_{ji}$, $i,j = 1,2,\dots,d$ are sufficiently smooth in x (and independent of time).

We denote $X = W_0^{1,2}(\Omega)$ with the norm

$$\|(u,v)\|_X := \Big(B[u,u] + \|v\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

where

$$B[u,u] = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega cu^2\,\mathrm{d}x.$$

We define

$$D(A) := \big(W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)\big) \times W_0^{1,2}(\Omega)$$

and set

$$A(u,v) = (v, -Lu), \qquad u,v \in D(A).$$

We show that A with its domain $D(A)$ fulfills the assumptions of the Hille–Yosida Theorem 6.3.13.

Theorem 6.3.20 The operator A generates a c_0-contraction semigroup $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ on $W_0^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Proof. We have to verify the assumptions of the Hille–Yosida theorem.
Step 1: Density of $D(A)$. Clearly, $\big(W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)\big) \times W_0^{1,2}(\Omega)$ is dense in $W_0^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$.
Step 2: Closedness of A. Let $(u_k, v_k) \subset D(A)$ be such that $(u_k, v_k) \to (u,v)$ and $A(u_k,v_k) \to (F,G)$ in X. As $A(u_k,v_k) = (v_k, -Lu_k)$, we have $F = v$ and $Lu_k \to -G$ in $L^2(\Omega)$. Using the same argument as in the previous theorem (here the situation is even easier) we get

$$\|u_k - u_l\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq \|L(u_k - u_l)\|_{L^2(\Omega)},$$

and we see that u_k is a Cauchy sequence in $W^{2,2}(\Omega)$. Whence $u_k \to u$ in $W^{2,2}(\Omega)$ and $Lu = -G$. Since $v_k \in W_0^{1,2}(\Omega)$ and $v_k \to v$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$, we have that $(u,v) \in D(A)$, $A(u,v) = (v, -Lu) = (F,G)$.
Step 3: Properties of the resolvent. Let $\lambda > 0$, $(F,G) \in X = W_0^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ and consider

$$\lambda(u,v) - A(u,v) = (F,G). \tag{6.19}$$

This is equivalent to

$$\begin{aligned} \lambda u - v &= F \qquad u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega), \\ \lambda v + Lu &= G \qquad v \in W_0^{1,2}(\Omega). \end{aligned} \tag{6.20}$$

Then $\lambda^2 u + Lu = \lambda F + G$. As $\lambda^2 > 0$, there exists unique solution $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ (due to the regularity of the elliptic problem). Then $v = \lambda u - F \in W_0^{1,2}(\Omega)$, hence (6.19) has unique solution (u,v). Consequently, $\varrho(A) \subset (0,\infty)$.
Step 4: Resolvent estimate. We write the solution to (6.19) as

$$(u,v) = R_\lambda(F,G).$$

From $(6.19)_2$ we see that

$$\lambda \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + B[u,v] = \int_\Omega Gv \,\mathrm{d}x.$$

Since $v = \lambda u - F$, we have (here we need the symmetry of $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^d$)

$$\begin{aligned} \lambda\big(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + B[u,u]\big) &= B[u,F] + \int_\Omega Gv \,\mathrm{d}x \\ &\le \big(\|G\|^2_{L^2(\Omega)} + B[F,F]\big)^{\frac12} \big(\|v\|_{L^2(\Omega)} + B[u,u]\big)^{\frac12}. \end{aligned}$$

Whence

$$\|(u,v)\|_X \le \frac{1}{\lambda}\|(F,G)\|_X,$$

and

$$\|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{1}{\lambda}, \qquad \lambda > 0.$$

■

6.3.2 Nonhomogeneous equation

We consider now

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= Au + f(t) \\ u(0) &= u_0 \in X. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Above, $f(t)\colon I \to X$ is Bochner integrable, $I = [0,T]$ and A with its domain $D(A)$ is an unbounded operator.

Definition 6.3.21 A function $u(t)$ is a
(i) classical solution to (6.21), if $u \in C^1((0,T);X) \cap C([0,T];D(A))$ and equality $(6.21)_1$ is fulfilled for all $t \in (0,T)$
(ii) strong solution to (6.21), if $u \in W^{1,1}(0,T;X) \cap C([0,T];D(A))$ and $(6.21)_1$ is fulfilled for a.e. $t \in (0,T)$.

Definition 6.3.22 Let A with its domain $D(A)$ be a generator of a c_0-semigroup $\{S(t)\}_{t\ge0}$. Then the function

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s \qquad \forall t \in [0,T]$$

is called a mild solution to (6.21).

Remark 6.3.23. The motivation for this definition comes from the variation of constants formula.

Lemma 6.3.24 Let $\{S(t)\}_{t\ge0}$ be a c_0-semigroup, $v(t) := \int_0^t S(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s$.
(i) If $f \in L^1(0,T;X)$, then $v \in C([0,T];X)$.
(ii) If $f \in C^{0,1}([0,T];X)$, then $v \in C^{0,1}([0,T];X)$.
(iii) If $f \in C^1([0,T];X)$, then $v \in C^1([0,T];X)$ and $v'(t) = S(t)f(0) + \int_0^t S(t-s)f'(s)\,\mathrm{d}s$ for all $t \in [0,T]$.

Theorem 6.3.25 (1) Let $u_0 \in D(A)$, $f(t) \in C^1([0,T];X)$. Then the mild solution from Definition 6.3.22 is a classical solution to (6.21).
(2) Let $u_0 \in D(A)$, $f(t) \in C^{0,1}([0,T];X)$. Let X be reflexive. Then the mild solution from Definition 6.3.22 is a

strong solution to (6.21).

Kapitola 7

Nonlinear parabolic equations

We now consider two examples of nonlinear equations of parabolic type which can be studied using combination of methods presented above.

7.1 Linear parabolic equation with a nonlinear compact perturbation

We consider a system of parabolic equations

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f} \qquad & \text{in } (0,T) \times \Omega, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \qquad & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad & \text{on } (0,T) \times \Omega, \end{aligned} \tag{7.1}$$

where (for simplicity) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is bounded, open, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ is the unknown (vector-valued) function and $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ is the given right-hand side. The system above can be considered as a simplified model for the 3-D incompressible Navier–Stokes equations.

Definition 7.1.1 The function $\mathbf{u} \in L^2(0,T; W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3))$ such that its time derivative $\partial_t \mathbf{u} \in L^q(0,T; W^{-1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3))$ for some $q > 1$ is called a weak solution to (7.1), if

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \int_\Omega \Big(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \Big) \, \mathrm{d}x = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} \tag{7.2}$$

holds for all $\mathbf{v} \in W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ and a.e. $t \in (0,T)$, and

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

Remark 7.1.2. (i) Note that for $q < 2$ (which will be our case), we cannot expect that $\mathbf{u} \in C([0,T]; L^2(\Omega;\mathbb{R}^3))$ (recall that $W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)$, $L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$ and $W^{-1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ is the Gelfand triple) since then q and 2 are not Hölder conjugate exponents. Therefore we only have $\mathbf{u} \in C([0,T]; L^2_w(\Omega;\mathbb{R}^3))$ (see Lemma 5.3.22) and thus

$$\lim_{t \to 0^+} \int_\Omega \mathbf{u}(t,\cdot) \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{d}x$$

for all $\mathbf{v} \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$. We will, however, construct a solution with slightly better properties.
(ii) Using formally as test function in (7.2) $\mathbf{v} := \mathbf{u}$ (the solution) and assuming that we may perform all necessary operations below, we end up with

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\nabla \mathbf{u}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^9)} + \int_\Omega \Big(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \operatorname{div} \mathbf{u} \Big) \, \mathrm{d}x = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}.$$

Now, as $\mathbf{u}(t) \in W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Big(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \operatorname{div} \mathbf{u} \Big) \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int_\Omega \big(\mathbf{u} \cdot |\mathbf{u}|^2 + \operatorname{div} \mathbf{u} |\mathbf{u}|^2 \big) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega \big(-\operatorname{div} \mathbf{u} |\mathbf{u}|^2 + \operatorname{div} \mathbf{u} |\mathbf{u}|^2 \big) \, \mathrm{d}x = 0. \end{aligned}$$

Thus

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^9)} \, \mathrm{d}s = \int_0^t \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_0\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}. \tag{7.3}$$

We call this identity energy equality. In fact, we will be able to prove a weaker relation, so called energy inequality

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^9)}\,\mathrm{d}s \le \int_0^t \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_0\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}. \tag{7.4}$$

We have the following result

Theorem 7.1.3 Let $\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$, $\mathbf{f} \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3))$, $T \in (0,\infty)$. Then there exists a weak solution to (7.1) in the sense of Definition 7.1.1. Moreover, the weak solution fulfills the energy inequality (7.4) a.e. in $(0,T)$ and the initial condition is satisfied in the sense

$$\lim_{t\to 0^+} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Remark 7.1.4. Note however, that $\mathbf{u}$ is generally not a continuous function with values in $L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$, the continuity holds only from the right at $t=0$, otherwise the function is only continuous in the weak topology in $L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$. Moreover, no uniqueness is claimed.

Proof. Step 1: Galerkin approximation. We follow the strategy developed in the proof of existence of a solution for the parabolic problems. We consider a basis $\{\mathbf{w}^k\}_{k=1}^\infty$ such that $\Delta w_i^k = \lambda_k w_i^k$, $i=1,2,3$, $k \in \mathbb{N}$. Then we look for a solution in the form

$$\mathbf{u}^n(t,x) := \sum_{k=1}^n c_k^n(t)\mathbf{w}^k(x), \qquad n \in \mathbb{N}$$

such that

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \partial_t \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{w}^l\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \Big(\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n + \frac{1}{2}\operatorname{div}\mathbf{u}^n\mathbf{u}^n\Big)\cdot \mathbf{w}^l\,\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_\Omega \nabla \mathbf{u}^n : \nabla \mathbf{w}^l = \langle \mathbf{f}, \mathbf{w}^l\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}, \qquad l = 1,2,\dots,n \\
&\mathbf{u}^n(0) = P_n\mathbf{u} = \sum_{k=1}^n \Big(\int_\Omega \mathbf{u}_0\cdot \mathbf{w}^k\,\mathrm{d}x\Big)\mathbf{w}^k, \qquad n\in\mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Note that we may rewrite the problem above as a system of the first order ordinary differential equations

$$\begin{aligned}
&c_l^{n\prime}(t) + \int_\Omega \Big[\Big(\sum_{k=1}^n c_k^n(t)\mathbf{w}_k\Big)\cdot\nabla\Big(\sum_{m=1}^n c_m^n(t)\mathbf{w}_m\Big)\cdot \mathbf{w}^l \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^n c_k^n(t)\mathbf{w}_k\Big)\operatorname{div}\Big(\sum_{m=1}^n c_k^m(t)\mathbf{w}_m\Big)\cdot\mathbf{w}^l\Big]\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega \nabla\Big(\sum_{k=1}^n c_k^n(t)\mathbf{w}_k\Big) : \nabla \mathbf{w}^l\,\mathrm{d}x = \langle \mathbf{f},\mathbf{w}^l\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} \\
&c_l^n(0) = \int_\Omega \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{w}^l\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Step 2: Existence of a solution for the Galerkin approximation. We may use again the Carathéodory theory (classical one if we regularize the right-hand side) and get, now *locally in time*, existence of unique solution to the Galerking approximation such that $c_l^n \in AC_{loc}([0,T^*))$, $l = 1,2,\dots,n$ for some $0 < T^* \le T$. The question is whether $T^* = T$. If $T^* < T$, then due to the theory of ODEs it holds $\limsup_{t\to T^*-} |c_n^l(t)| = \infty$, at least for one $1 \le l \le n$. We exclude this possibility by proving suitable a priori estimates below.
Step 3: A priori estimates. We multiply each equation in (7.6) by $c_l^n(t)$ and sum from 1 to n (i.e., we use as test function the solution $\mathbf{u}^n$). We get

$$\begin{aligned}
&(\partial_t\mathbf{u}^n,\mathbf{u}^n)_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \int_\Omega \Big(\mathbf{u}^n\cdot\nabla\mathbf{u}^n + \frac{1}{2}\operatorname{div}\mathbf{u}^n\mathbf{u}^n\Big)\cdot\mathbf{u}^n\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega \nabla\mathbf{u}^n : \nabla\mathbf{u}^n\,\mathrm{d}x = \langle\mathbf{f},\mathbf{u}^n\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

Now, we repeat the computations from the formal proof of the energy inequality

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\mathbf{u}^n\cdot\nabla\mathbf{u}^n)\cdot\mathbf{u}^n\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 u_i^n \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} u_j^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 u_i^n \frac{\partial (u_j^n)^2}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_i^n}{\partial x_i}(u_j^n)^2\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_\Omega |\mathbf{u}^n|^2 \operatorname{div}\mathbf{u}^n\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Hence
$$\int_\Omega \Big(\mathbf{u}^n\cdot\nabla\mathbf{u}^n + \frac{1}{2}\operatorname{div}\mathbf{u}^n\mathbf{u}^n\Big)\cdot\mathbf{u}^n\,\mathrm{d}x = 0.$$
Therefore we have
$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{u}^n\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \int_\Omega |\nabla\mathbf{u}^n|^2\,\mathrm{d}x = \langle\mathbf{f},\mathbf{u}^n\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}.$$
This yields
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} &+ \int_0^t\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}^n|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\\ &= \int_0^t \langle\mathbf{f},\mathbf{u}^n\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}^n(0)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)},\end{aligned}\tag{7.7}$$
and consequently
$$\begin{aligned}&\max_{[0,\tau]}\frac{1}{2}\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \int_0^\tau\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}^n|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &\quad\le \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,\tau;W^{-1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3))}\|\mathbf{u}^n\|_{L^2(0,\tau;W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3))} + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}^n(0)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}\\ &\quad\le \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}^n|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + C\int_0^\tau \|\mathbf{f}\|^2_{W^{-1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}^n(0)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$
However
$$\|\mathbf{u}^n(0)\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} \le \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega:\mathbb{R}^3)}$$
$$\int_0^\tau \|\mathbf{f}\|^2_{W^{-1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}\,\mathrm{d}t \le \int_0^T \|\mathbf{f}\|^2_{W^{-1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}\,\mathrm{d}t,$$
and we have
$$\max_{[0,\tau]}\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \int_0^\tau\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}^n|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le C,$$
where C is independent of $\tau < T^*$ (and also of n), depends linearly on $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega:\mathbb{R}^3)}$ and on $\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3))}$.
Back to Step 2: Thus the solution remains bounded when $\tau\to T^{*-}$ and hence $T = T^*$.
Back to Step 3: We proved
$$\|\mathbf{u}^n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega;\mathbb{R}^3))} + \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3))} \le C,$$
where C depends on the data of the problem, but is independent of n.

Next we need to estimate the time derivative of the approximate solutions. We have, as in the linear problem, that arbitrary $\mathbf{v}\in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$ can be written as $\mathbf{v}_1^n + \mathbf{v}_2^n$, where $\mathbf{v}_1^n$ belongs to the linear hull of $\{\mathbf{w}^k\}_{k=1}^n$ and $\mathbf{v}_2^n$ is perpendicular to it. Moreover,
$$\|\mathbf{v}_1^n\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} \le \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}, \qquad \|\mathbf{v}_1^n\|_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} \le \|\mathbf{v}\|_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}.$$
Furthermore,
$$\langle\partial_t\mathbf{u}^n,\mathbf{v}\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} = (\partial_t\mathbf{u}^n,\mathbf{v})_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} = (\partial_t\mathbf{u}^n,\mathbf{v}_1^n)_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)},$$
and we may for $\mathbf{v}\in W_0^{1,2}(\Omega)$ use the Galerkin approximation to deduce
$$\begin{aligned}&\sup_{\substack{\mathbf{v}\in W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)\\ \|\mathbf{v}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)\le 1}}}\langle\partial_t\mathbf{u}^n,\mathbf{v}\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} = \sup_{\substack{\mathbf{v}\in W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)\\ \|\mathbf{v}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)\le 1}}}(\partial_t\mathbf{u}^n,\mathbf{v}_1^n)_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}\\ &= \sup_{\|\mathbf{v}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)\le 1}}\Big(-\int_\Omega\Big((\mathbf{u}^n\cdot\nabla\mathbf{u}^n + \frac{1}{2}\operatorname{div}\mathbf{u}^n\mathbf{u}^n)\cdot\mathbf{v}_1^n + \nabla\mathbf{u}^n:\nabla\mathbf{v}_1^n\Big)\,\mathrm{d}x\\ &+ \langle\mathbf{f},\mathbf{v}_1^n\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}\Big)\\ &\le C(\|\mathbf{u}^n\|_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}\|\nabla\mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^9)} + \|\nabla\mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^9)} + \|\mathbf{f}\|_{W^{-1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}).\end{aligned}$$
Hence
$$\begin{aligned}&\|\partial_t\mathbf{u}^n\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T;W^{-1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}\\ &\le \Big\|\|\mathbf{u}^n\|_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}\|\nabla\mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^9)} + \|\nabla\mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^9)} + \|\mathbf{f}\|_{W^{-1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}\Big\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T)}\\ &\le C\Big(\|\mathbf{u}^n\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3))}\|\mathbf{u}^n\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega;\mathbb{R}^3))}\\ &+ \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3))} + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3))}\Big).\end{aligned}$$

Therefore we proved

$$\|\partial_t \mathbf{u}^n\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T;W^{-1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3))} \leq C(\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}, \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3))})$$

(C depends on the data nonlinearly).
Step 4: Limit passage in the Galerkin approximation. We know that there exists a subsequence $\{\mathbf{u}^{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ such that it holds

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n_k} &\rightharpoonup \mathbf{u} && \text{in } L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)) \\ \mathbf{u}^{n_k} &\rightharpoonup^* \mathbf{u} && \text{in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)) \\ \partial_t\mathbf{u}^{n_k} &\rightharpoonup \partial_t\mathbf{u} && \text{in } L^{\frac{4}{3}}(0,T;W^{-1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)) \end{aligned} \tag{7.8}$$

as $k\to\infty$. Due to the presence of nonlinear terms this is not enough to pass to the limit in the nonlinear terms. We therefore apply the Aubin–Lions Theorem, where we take $X_0 = W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)$, $X_1 = W^{-1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ and $X = L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$, $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = \frac{4}{3}$. Then we have, in addition to (7.8) (taking, if necessary, another subsequence which we do not relabel)

$$\mathbf{u}^{n_k} \to \mathbf{u} \qquad \text{in } L^2(0,T;L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)). \tag{7.9}$$

It yields, when combined with the a priori estimates

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n_k} &\to \mathbf{u} && \text{in } L^q(0,T;L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)), \quad 1\leq q<\infty \\ \mathbf{u}^{n_k} &\to \mathbf{u} && \text{in } L^2(0,T;L^r(\Omega;\mathbb{R}^3)), \quad 1\leq r<6 \\ \mathbf{u}^{n_k} &\to \mathbf{u} && \text{in } L^s((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^3), \quad 1\leq s<\frac{10}{3}. \end{aligned} \tag{7.10}$$

We may now try to pass to the limit in the Galerkin approximation. As in the linear problem, we multiply the Galerkin approximation by $\psi\in C_c^\infty(0,T)$ and integrate the resulted identities over $(0,T)$. We have

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle\partial_t\mathbf{u}^{n_k},\mathbf{w}^l\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}\psi\,\mathrm{d}t + \int_0^T\int_\Omega \big(\mathbf{u}^{n_k}\cdot\nabla\mathbf{u}^{n_k} + \frac{1}{2}\mathrm{div}\,\mathbf{u}^{n_k}\mathbf{u}^{n_k}\big)\cdot\mathbf{w}^l\,\mathrm{d}x\psi\,\mathrm{d}t \\ &+\int_0^T\int_\Omega \nabla\mathbf{u}^{n_k}:\nabla\mathbf{w}^l\,\mathrm{d}x\psi\,\mathrm{d}t = \int_0^T\langle\mathbf{f},\mathbf{w}^l\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}\psi\,\mathrm{d}t \qquad \forall l=1,2,\ldots,n_k. \end{aligned}$$

We consider each term separately. First

$$\int_0^T \langle\partial_t\mathbf{u}^{n_k},\mathbf{w}^l\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\psi\,\mathrm{d}t \to \int_0^T\langle\partial_t\mathbf{u},\mathbf{w}^l\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\psi\,\mathrm{d}t.$$

Next

$$\begin{aligned} \int_0^T\int_\Omega(\mathbf{u}^{n_k}\cdot\nabla\mathbf{u}^{n_k})\cdot\mathbf{w}^l\,\mathrm{d}x\psi\,\mathrm{d}t &= \int_0^T\int_\Omega(\mathbf{u}^{n_k}-\mathbf{u})\cdot\nabla\mathbf{u}^{n_k})\cdot\mathbf{w}^l\,\mathrm{d}x\psi\,\mathrm{d}t \\ &+\int_0^T\int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\nabla(\mathbf{u}^{n_k}-\mathbf{u}))\cdot\mathbf{w}^l\,\mathrm{d}x\psi\,\mathrm{d}t + \int_0^T\int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{w}^l\,\mathrm{d}x\psi\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

The first terms on the right-hand side

$$\begin{aligned} &\Big|\int_0^T\int_\Omega(\mathbf{u}^{n_k}-\mathbf{u})\cdot\nabla\mathbf{u}^{n_k})\cdot\mathbf{w}^l\,\mathrm{d}x\psi\,\mathrm{d}t\Big| \\ &\leq \int_0^T \|\mathbf{u}^{n_k}-\mathbf{u}\|_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}\|\nabla\mathbf{u}^{n_k}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^9)}\|\mathbf{w}^l\|_{L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)}\,\mathrm{d}t \\ &\leq C\|\mathbf{u}^{n_k}-\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;L^3(\Omega;\mathbb{R}^3))}\|\nabla\mathbf{u}^{n_k}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega;\mathbb{R}^9))}\to 0 \end{aligned}$$

for $k\to\infty$, while the second term tends to zero as $\nabla\mathbf{u}^{n_k}\rightharpoonup\nabla\mathbf{u}$ in $L^2((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^9)$ and

$$\|\mathbf{u}\mathbf{w}^l\|_{L^2((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^9)} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;L^6(\Omega;\mathbb{R}^3))}\|\mathbf{w}^l\|_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)} < +\infty.$$

Exactly in the same way we may treat the third term and get

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{u}^{n_k}\mathbf{u}^{n_k}\cdot\mathbf{w}^l\,\mathrm{d}x\psi\,\mathrm{d}t \to \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega\mathrm{div}\,\mathbf{u}\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}^l\,\mathrm{d}x\psi\,\mathrm{d}t.$$

Finally

$$\int_0^T\int_\Omega\nabla\mathbf{u}^{n_k}\cdot\nabla\mathbf{w}^l\,\mathrm{d}x\psi\,\mathrm{d}t \to \int_0^T\int_\Omega\nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{w}^l\,\mathrm{d}x\psi\,\mathrm{d}t$$

due to the weak convergence of $\nabla \mathbf{u}^{n_k}$ in $L^2((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^9)$ and we end up with

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle \partial_t \mathbf{u}, \mathbf{w}^l\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}\psi \,\mathrm{d}t \\ + \int_0^T\int_\Omega \Big(\big(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathrm{div}\,\mathbf{u}\mathbf{u}\big)\cdot \mathbf{w}^l + \nabla\mathbf{u} : \nabla \mathbf{w}^l\Big)\,\mathrm{d}x\psi\,\mathrm{d}t \\ = \int_0^T \langle \mathbf{f}, \mathbf{w}^l\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}\psi\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

for all $l\in\mathbb{N}$ and all $\psi\in C_c^\infty(0,T)$. Now, as in the linear case, it is an easy matter to verify that

$$\langle \partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \int_\Omega \Big(\big(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathrm{div}\,\mathbf{u}\mathbf{u}\big)\cdot\mathbf{v} + \nabla\mathbf{u}:\nabla\mathbf{v}\Big)\,\mathrm{d}x = \langle \mathbf{f},\mathbf{v}\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}$$

for all $\mathbf{v}\in W_0^{1,2}(\Omega)$ and a.e. in $(0,T)$.
Step 5: Initial condition. As in the linear case we may show that $\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0$ in the sense that

$$\lim_{t\to 0^+}(\mathbf{u}(t),\mathbf{v})_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} = (\mathbf{u}_0,\mathbf{v})_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} \qquad \forall \mathbf{v}\in W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3).$$

Moreover, since $\mathbf{u}\in C([0,T];L^2_w(\Omega;\mathbb{R}^3))$ (recall that $\mathbf{u}\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega;\mathbb{R}^3))$ and $\mathbf{u}\in C([0,T];W^{-1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)))$ we easily see that the limit above holds even for all $\mathbf{v}\in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$.
Step 6: Energy inequality. We return back to (7.7), multiply it by a non-negative $\psi\in C_c^\infty(0,T)$ and integrate over $(0,T)$. We get

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{1}{2}\|\mathbf{u}^{n_k}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}\psi\,\mathrm{d}t + \int_0^T\Big(\int_0^t\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}^{n_k}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\Big)\psi\,\mathrm{d}t \\ = \int_0^T\Big(\int_0^t \langle \mathbf{f},\mathbf{u}^n\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}\,\mathrm{d}s\Big) + \int_0^T \psi\,\mathrm{d}t\frac{1}{2}\|\mathbf{u}^n(0)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

We now let $k\to\infty$. Since

$$\liminf_{k\to\infty}\int_0^t\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}^{n_k}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \geq \int_0^t\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s,$$

due to the Fatou lemma we have

$$\begin{aligned}\liminf_{k\to\infty}\int_0^T\Big(\int_0^t\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}^{n_k}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\Big)\psi\,\mathrm{d}t &\geq \int_0^T\Big(\liminf_{k\to\infty}\int_0^t\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}^{n_k}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}t \\ &\geq \int_0^T\Big(\int_0^t\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

The limit passage in the other terms is trivial and we end up with

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{1}{2}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}\psi\,\mathrm{d}t + \int_0^T\Big(\int_0^t\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\Big)\psi\,\mathrm{d}t \\ \leq \int_0^T\Big(\int_0^t \langle \mathbf{f},\mathbf{u}\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}\,\mathrm{d}s\Big) + \int_0^T \psi\,\mathrm{d}t\frac{1}{2}\|\mathbf{u}_0\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)},\end{aligned}$$

hence

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \int_0^t\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \leq \int_0^t\langle\mathbf{f},\mathbf{u}\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_0\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}.$$

a.e. in $(0,T)$.
Back to Step 5: Due to the weak continuity we have

$$\liminf_{t\to 0+}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} \geq \|\mathbf{u}_0\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}.$$

On the other hand, the energy inequality yields

$$\limsup_{t\to 0+}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}_0\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}.$$

Hence

$$\lim_{t\to 0^+}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} = \|\mathbf{u}_0\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}$$

which together with the weak continuity implies

$$\lim_{t\to 0^+}\|\mathbf{u}(t)-\mathbf{u}_0\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} = 0.$$

■

7.2 Rothe's method for parabolic monotone operator problem

Let us consider the following problem

$$\begin{aligned} \partial_t u + \operatorname{div} \mathbf{a}(x, u(x), \nabla u(x)) &= f \qquad \text{in } (0,T)\times\Omega \\ u(0) &= u_0 \qquad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{on } (0,T)\times\partial\Omega, \end{aligned} \tag{7.11}$$

where $\mathbf{a}\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ is a given function.

We assume

$$\begin{aligned} 1<p<\infty, &\quad |\mathbf{a}(x,v,\mathbf{V})| \le C(1+|\mathbf{V}|^{p-1}) \\ u_0 \in L^2(\Omega), &\quad f\in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)), \end{aligned} \tag{7.12}$$

where $W^{-1,p'}(\Omega) = (W_0^{1,p}(\Omega))^*$. Then

Definition 7.2.1 We say that $u\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ with $\partial_t u \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ is a weak solution to (7.11), provided

$$\langle \partial_t u, v\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \int_\Omega \mathbf{a}(\cdot,u,\nabla u)\cdot\nabla v \,\mathrm{d}x = \langle f, v\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

for all $v\in W_0^{1,p}(\Omega)$ and a.e. $t\in(0,T)$, and $u(0)=u_0$.

Remark 7.2.2. Note that $u\in C([0,T];L^2(\Omega))$ (as $W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$, $L^2(\Omega)$, $(W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega))^*$ form a Gelfand triple). Note also that the intersection with $L^2(\Omega)$ is important only for small p's, more precisely, for $p<\frac{2d}{d+2}$; for larger $p's$, $W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$.

In order to prove existence of a solution, we will need additional assumptions

$$\begin{aligned} &\{a_i(\cdot,\cdot,\cdot)\}_{i=1}^d \text{ are Carathéodory functions} \\ (\mathbf{a}(x,v,\mathbf{V})-\mathbf{a}(x,v,\mathbf{W}))\cdot(\mathbf{V}-\mathbf{W}) \ge 0 &\quad \text{a.e. in } \Omega,\ \forall v\in\mathbb{R}, \text{ and } \mathbf{V},\mathbf{W}\in\mathbb{R}^d \\ \mathbf{a}(x,v,\mathbf{V})\cdot\mathbf{V} \ge \alpha|\mathbf{V}|^p - C, &\quad \text{for some } \alpha>0, \text{ a.e. } x\in\Omega, \text{ all } v\in\mathbb{R}, \mathbf{V}\in\mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Theorem 7.2.3 Under assumptions (7.12) and (7.13), there exists a weak solution to (7.11) in the sense of Definition 7.2.1. Moreover, if $\mathbf{a}$ is independent of the second variable (i.e. $\mathbf{a}=\mathbf{a}(x,\nabla u)$), then the solution is unique.

Proof. Part I: Uniqueness. Let u, w be two (possibly) different solutions corresponding to the same data. Then we have

$$\begin{aligned} \langle \partial_t u, v\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \int_\Omega \mathbf{a}(\cdot,\nabla u)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x &= \langle f,v\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\ \langle \partial_t w, v\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \int_\Omega \mathbf{a}(\cdot,\nabla w)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x &= \langle f,v\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

for all $v\in W_0^{1,p}(\Omega)$. Denote $U=u-w$, subtract the equalities above and use $v:=u-w=U$. Then

$$\langle \partial_t U, U\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \int_\Omega \big(\mathbf{a}(\cdot,\nabla u)-\mathbf{a}(\cdot,\nabla w)\big)\cdot\nabla(u-w)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Due to property $(7.13)_2$ we have

$$\langle \partial_t U, U\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)} \le 0,$$

i.e.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|U\|^2_{L^2(\Omega)} \le 0.$$

As $U(0)=0$, we have $U(t)=0$ for all $t\ge0$, i.e. $u=w$ a.e. in $(0,T)\times\Omega$.
Part II: Existence. We present here another method how to construct solutions to evolutionary problems. The method uses as approximate solution a variant of the corresponding steady problem and therefore we may take advantage that we already constructed such solutions. On the other hand, the limit passage is slightly more difficult.

We divide the time interval $(0,T)$ into a finite number of subintervals of the length $\frac{T}{m}$, $m\in\mathbb{N}$ and on each subinterval we consider a steady problem based on the fact that we replace the time derivative by the corresponding differences. We may use Theorem 4.1.5 to construct approximate solutions on all subintervals. Then we let $m\to\infty$ and show that the corresponding limit of the approximate solutions is our weak solution to the evolutionary problem.
Step 1: Approximate solution u_m. Let us fix $m\in\mathbb{N}$, denote $\tau=\frac{T}{m}$, $t_k=k\tau$, $k=0,1,\dots,m-1$ and define

$$f_k = \frac{1}{\tau}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f\,\mathrm{d}t \quad \in W^{-1,p'}(\Omega) \quad \text{(Bochner integral mean).}$$

We define $u_m(t_0) := u_0$ and look for functions constant on each interval $(t_k, t_{k+1}]$. We define $\eta_k := u_m(t_k) \in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$ and look for η_{k+1} as weak solution to

$$\int_\Omega \frac{\eta_{k+1}-\eta_k}{\tau}\varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbf{a}(\cdot,\eta_{k+1},\nabla\eta_{k+1})\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x = \langle f_k,\varphi\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

for all $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$. Using the method from Theorem 4.1.5 we can prove existence of a solution $\eta_{k+1}(x)$. Note that, using $\varphi := \eta_{k+1}$, we get the following a priori estimate

$$\frac{1}{\tau}\int_\Omega |\eta_{k+1}|^2\,\mathrm{d}x + C\int_\Omega |\eta_{k+1}|^p\,\mathrm{d}x \le C + \langle f_k,\eta_{k+1}\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \frac{1}{\tau}\int_\Omega \eta_k\eta_{k+1}\,\mathrm{d}x. \tag{7.14}$$

Since the right-hand side can be easily bounded, we see that $\eta_{k+1}\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$. Repeating the construction for $k = 0,1,\dots,m-1$ we obtain u_m. Note that generally, u_m may be non-unique.
Step 2: A priori estimates. We take (7.14) with $\varphi := \eta_{k+1}$ and sum it up for $k = 0,1,\dots,M<m$. We get

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big[\sum_{k=0}^{M}(\eta_{k+1}-\eta_k)\eta_{k+1} + \tau\sum_{k=0}^{M}\mathbf{a}(\cdot,\eta_{k+1},\nabla\eta_{k+1})\cdot\nabla\eta_{k+1}\Big]\,\mathrm{d}x&\\ = \tau\sum_{k=0}^{M}\langle f_k,\eta_{k+1}\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)}.&\end{aligned}$$

We use that

$$(\eta_{k+1}-\eta_k)\eta_{k+1} = \frac{(\eta_{k+1})^2}{2} - \frac{(\eta_k)^2}{2} + \frac{(\eta_{k+1}-\eta_k)^2}{2},$$

which yields

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big(\frac{(\eta_{M+1})^2}{2} + \sum_{k=0}^{M}\frac{(\eta_{k+1}-\eta_k)^2}{2} + \tau\sum_{k=0}^{M}\mathbf{a}(\cdot,\eta_{k+1},\nabla\eta_{k+1})\cdot\nabla\eta_{k+1}\Big)\,\mathrm{d}x&\\ = \int_\Omega \frac{(\eta_0)^2}{2}\,\mathrm{d}x + \tau\sum_{k=0}^{M}\langle f_k,\eta_{k+1}\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)}.&\end{aligned}$$

Note that η_k are constant on $(t_k,t_{k+1}]$, u_m is defined as η_k on $(t_k,t_{k+1}]$ and $\tau = t_{k+1}-t_k$. We have

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \tau\sum_{k=0}^{M}\mathbf{a}(\cdot,\eta_{k+1},\nabla\eta_{k+1})\cdot\nabla\eta_{k+1}\,\mathrm{d}x\\ &\quad= \sum_{k=0}^{M}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_\Omega \mathbf{a}(\cdot,\eta_{k+1},\nabla\eta_{k+1})\cdot\nabla\eta_{k+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &\quad= \sum_{k=0}^{M}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_\Omega \mathbf{a}(\cdot,u_m,\nabla u_m)\cdot\nabla u_m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &\quad= \int_0^{(M+1)\tau}\int_\Omega \mathbf{a}(\cdot,u_m,\nabla u_m)\cdot\nabla u_m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\tau\sum_{k=0}^{M}\langle f_k,\eta_{k+1}\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)} &= \sum_{k=0}^{M}\Big\langle\int_{t_k}^{t_{k+1}} f\,\mathrm{d}t,\eta_{k+1}\Big\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)}\\ &= \sum_{k=0}^{M}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\langle f,\eta_{k+1}\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{(M+1)\tau}\langle f,\eta_{k+1}\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Therefore we have

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\Big(\frac{\big(u_m(t_{M+1})\big)^2}{2} + \sum_{k=0}^{M}\frac{\big(u_m(t_{k+1})-u_m(t_k)\big)^2}{2}\Big)\,\mathrm{d}x\\ &\quad+\alpha\int_0^{(M+1)\tau}\|\nabla u_m\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)}^p\,\mathrm{d}t\\ &\quad\le C + \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^{(M+1)\tau}\|f\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}\|u_m\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

The Young inequality yields

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big(\big(u_m(t_{M+1})\big)^2 + \sum_{k=0}^{M}\big(u_m(t_{k+1})-u_m(t_k)\big)^2\Big)\,\mathrm{d}x\\ + \alpha\int_0^{(M+1)\tau}\|\nabla u_m\|^p_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)}\,\mathrm{d}t\\ \le C\Big(1+\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^T\|f\|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega)}\,\mathrm{d}t\Big)\le C(DATA).\end{aligned}$$

Since M was arbitrary, we have

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1}\|u_m(t_{k+1})-u_m(t_k)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t &\le C\\ \|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}&\le C\\ \|u_m\|_{L^p(0,T;W^{1,p}_0(\Omega))}&\le C.\end{aligned}$$

Moreover, we also have

$$\|\mathbf{a}(\cdot,u_m,\nabla u_m)\|_{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^d))}\le C.$$

Thus we can extract subsequences such that

$$\begin{aligned}u_{m_k}&\rightharpoonup u &&\text{in } L^p(0,T;W^{1,p}_0(\Omega))\\ u_{m_k}&\rightharpoonup^* u &&\text{in } L^\infty(0,T;L^2_0(\Omega))\\ \mathbf{a}(\cdot,u_{m_k},\nabla u_{m_k})&\rightharpoonup \mathbf{A} &&\text{in } L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^d)).\end{aligned}$$

In what follows, we write without loss of generality u_m instead of u_{m_k}.
Step 3: Another sequence and its limit. We now modify u_m by redefining it on (t_k,t_{k+1}) to be linear. Hence

$$\widetilde{u}_m(t)=u_m(t_k)+\frac{t-t_k}{\tau}\big(u_m(t_{k+1})-u_m(t_k)\big)=\eta_k+\frac{t-t_k}{\tau}(\eta_{k+1}-\eta_k)$$

for $t\in(t_k,t_{k+1})$. We easily see that

$$\|\widetilde{u}_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\le C\qquad\text{and}\qquad\|\widetilde{u}_m\|_{L^p(0,T;W^{1,p}_0(\Omega))},$$

and

$$\partial_t\widetilde{u}_m=\frac{1}{\tau}\big(u_m(t_{k+1})-u_m(t_k)\big),\qquad t\in(t_k,t_{k+1}).$$

We now compute an estimate of the time derivative. For $t\in(t_k,t_{k+1})$ it holds

$$\begin{aligned}\int_\Omega\partial_t\widetilde{u}_m\varphi\,\mathrm{d}x&=-\int_\Omega\mathbf{a}(\cdot,\eta_{k+1},\nabla\eta_{k+1})\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x+\langle f_k,\varphi\rangle_{W^{1,p}_0(\Omega)}\\ &\le C\big(1+\|\nabla\eta_{k+1}\|^{p-1}_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)}\|\nabla\varphi\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)}+\|f_k\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}\|\varphi\|_{W^{1,p}_0(\Omega)}\big).\end{aligned}$$

Thus on the same time interval

$$\begin{aligned}\|\partial_t\widetilde{u}_m\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}&=\sup_{\|\varphi\|_{W^{1,p}_0(\Omega)}\le 1}\langle\partial_t\widetilde{u}_m,\varphi\rangle_{W^{1,p}_0(\Omega)}=:\sup_{\|\varphi\|_{W^{1,p}_0(\Omega)}\le 1}\int_\Omega\partial_t\widetilde{u}_m\varphi\,\mathrm{d}x\\ &\le C\big(1+\|\nabla\eta_{k+1}\|^{p-1}_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)}+\|f_k\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}\big)\end{aligned}$$

which yields

$$\begin{aligned}&\int_0^T\|\partial_t\widetilde{u}_m\|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega)}\,\mathrm{d}t\\ &\quad\le C\Big(1+\int_0^T\|\nabla u_m\|^p_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)}\,\mathrm{d}t+\sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\|f_k\|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega)}\,\mathrm{d}t\Big)\le C,\end{aligned}$$

since

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\|f_k\|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega)}\,\mathrm{d}t&=\sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Big\|\frac{1}{\tau}\int_{t_k}^{t_{k+1}}f_k\,\mathrm{d}s\Big\|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega)}\,\mathrm{d}t\\ &\le\sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Big(\frac{1}{\tau}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\|f_k\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}\,\mathrm{d}s\Big)^{p'}\,\mathrm{d}t\\ &\le\sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{1}{\tau}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\|f_k\|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=\int_0^T\|f\|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega)}\,\mathrm{d}t\le C,\end{aligned}$$

where we used the Hölder inequality. Thus

$$\begin{aligned}\widetilde{u}_m &\rightharpoonup \widetilde{u} && \text{in } L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))\\ \partial_t\widetilde{u}_m &\rightharpoonup \partial_t\widetilde{u} && \text{in } L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))\end{aligned}$$

and due to the Aubin–Lions Theorem applied on spaces $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ also

$$\widetilde{u}_m \to \widetilde{u} \qquad \text{in } L^p(0,T;L^p(\Omega)).$$

Let us show that $\widetilde{u} = u$. We have

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\widetilde{u}_m - u_m\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\widetilde{u}_m - u_m\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big\|\eta_{k+1} - \Big(\eta_k + \frac{t-t_k}{\tau}(\eta_{k+1}-\eta_k)\Big)\Big\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\eta_{k+1}-\eta_k\|^2_{L^2(\Omega)}\Big(1-\frac{t-t_k}{\tau}\Big)^2\,\mathrm{d}t\\ &\le \sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\eta_{k+1}-\eta_k\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t\\ &= \tau\sum_{k=0}^{m-1}\|\eta_{k+1}-\eta_k\|^2_{L^2(\Omega)} \le \frac{CT}{m} \to 0\end{aligned}$$

for $m \to \infty$. Therefore $\widetilde{u}_m - u_m \to 0$ in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Since $u_m \rightharpoonup u$ in $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ and $\widetilde{u}_m \rightharpoonup \widetilde{u}$ in $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, we easily see that $u = \widetilde{u}$.

Step 4: Initial condition. First, since $u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega))$ and $\partial_t u \in L^{p'}(0,T;(W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega))^*)$ (the former follows from the a priori estimates, the latter from the fact that $(W_0^{1,p}(\Omega))^* \hookrightarrow (W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega))^*$) we may use properties of the Gelfand triple to verify that $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$. Let us show that $u(0) = u_0$ in this sense. We fix δ and $h > 0$ and define

$$\Phi(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,\delta]\\ 1-\frac{1}{h}(t-\delta) & t \in (\delta,\delta+h]\\ 0 & t > \delta+h\end{cases}$$

and multiply the weak formulation for u_m by $\Phi(t)$ and integrate over $(0,T)$. It yields

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\langle f_k,\varphi\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)}\Phi\,\mathrm{d}t = \int_0^T\int_\Omega \partial_t\widetilde{u}_m\varphi\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &\quad+\int_0^T\int_\Omega \mathbf{a}(\cdot,u_m,\nabla u_m)\cdot\nabla\varphi\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\int_0^T\int_\Omega \widetilde{u}_m\varphi\partial_t\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &\quad-\int_\Omega u_m(0)\varphi\Phi(0)\,\mathrm{d}x + \int_0^T\int_\Omega \mathbf{a}(\cdot,u_m,\nabla u_m)\cdot\nabla\varphi\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

We now let $m \to \infty$

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_\delta^{\delta+h}\int_\Omega u\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_\Omega u_0\varphi\,\mathrm{d}x + \int_0^{\delta+h}\int_\Omega \mathbf{A}\cdot\nabla\varphi\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ = \int_0^{\delta+h}\langle f,\varphi\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)}\Phi\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{7.15}$$

(recall that $\widetilde{u}_m \rightharpoonup u$ in $L^2((0,T)\times\Omega)$, $u_m(0) = u_0$, $\mathbf{a}(\cdot,u_m,\nabla u_m) \rightharpoonup \mathbf{A}$ in $L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^d))$, $\nabla\varphi\Phi \in L^p(0,T;L^p(\Omega;\mathbb{R}^d))$), and finally

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Big\langle\frac{1}{\tau}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s)\,\mathrm{d}s,\varphi\Big\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)}\Phi(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Big(\int_{t_k}^{t_{k+1}}\langle f(s),\varphi\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)}\,\mathrm{d}s\Big)\frac{1}{\tau}\Phi(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\Big(\frac{1}{\tau}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\langle f(s),\varphi\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)}\,\mathrm{d}s\frac{1}{\tau}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Phi(t)\,\mathrm{d}t(t_{k+1}-t_k)\Big)\\ &\to \int_0^T\langle f(t),\varphi\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)}\Phi(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

The last limit passage above uses the fact that Φ is uniformly continuous on $[0,T]$. Letting $h\to 0^+$

$$\int_\Omega u(\delta)\varphi\,\mathrm{d}x - \int_\Omega u_0\varphi\,\mathrm{d}x + \int_0^\delta\int_\Omega \mathbf{A}\cdot\nabla\varphi\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^\delta \langle f,\varphi\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)}\Phi\,\mathrm{d}t.$$

Finally, letting $\delta\to 0^+$ (recall, $u\in C([0,T];L^2(\Omega))$)

$$\int_\Omega u(0)\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u_0\varphi\,\mathrm{d}x$$

for all $\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$; in particular for all $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$ which due to the fact that $u\in C([0,T];L^2(\Omega))$ implies the equality also for all $\varphi\in L^2(\Omega)$.
Step 5: Weak formulation. Let us multiply the weak formulation for u_m ($m\in\mathbb{N}$) by $\psi\in C_c^\infty(0,T)$. We get

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega \partial_t\widetilde{u}_m\varphi\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &+ \int_0^T\int_\Omega \mathbf{a}(\cdot,u_m,\nabla u_m)\cdot\nabla\varphi\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\langle f_k,\varphi\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)}\psi\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

As above (the first term, which is different, can be treated easily) we get

$$\int_0^T\int_\Omega \langle\partial_t u,\varphi\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)}\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T\int_\Omega \mathbf{A}\cdot\nabla\varphi\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^T\langle f,\varphi\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)}\psi\,\mathrm{d}t.$$

It remains to show that $\mathbf{A}=\mathbf{a}(\cdot,u,\nabla u)$.
Substep 5(i): Let us show that

$$u_m(t)\rightharpoonup u(t)\qquad \text{in } L^2(\Omega) \tag{7.16}$$

for a.e. $t\in(0,T)$. Recall that $\widetilde{u}_m\to u$ in $L^p((0,T)\times\Omega)$ and $\widetilde{u}_m-u_m\to 0$ in $L^2((0,T)\times\Omega)$. Thus

$$u_m\to u\qquad \text{in } L^q((0,T)\times\Omega)$$

with $q=\min\{2,p\}$. Therefore

$$u_m(t)\to u(t)\qquad \text{in } L^q(\Omega) \tag{7.17}$$

for a.e. $t\in(0,T)$ (possibly for a subsequence). However, for a.e. $t\in(0,T)$ the sequence $\{u_m(t)\}_{t\in(0,T)}$ is bounded in $L^2(\Omega)$ and thus it contains a weakly convergent subsequence in this space. If t is such that (7.17) holds, then $u_m(t)\rightharpoonup u(t)$ in $L^2(\Omega)$. Since all this can be repeated for arbitrary subsequence, (7.16) holds for all t's such that (7.17) is valid, for the whole sequence.
Substep 5(ii): Let us show that

$$\limsup_{m\to\infty}\int_0^t\int_\Omega \mathbf{a}(\cdot,u_m,\nabla u_m)\cdot\nabla u_m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \le \int_0^t\int_\Omega \mathbf{A}\cdot\nabla u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s$$

for a.e. $t\in(0,T)$. Let us take t such that (7.16) holds. For fixed $m\in\mathbb{N}$ take $k=k(m)$ such that $t_k^m<t\le t_{k+1}^m$. Since $t_{k+1}^m-t_k^m\to 0$ for $m\to\infty$, we have

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_\Omega \mathbf{a}(\cdot,u_m,\nabla u_m)\cdot\nabla u_m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\\ &\quad= \int_0^{t_{k+1}^m}\int_\Omega \big(\mathbf{a}(\cdot,u_m,\nabla u_m)-\mathbf{a}(\cdot,u_m,0)\big)\cdot(\nabla u_m-\mathbf{0})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\\ &\quad- \int_t^{t_{k+1}^m}\int_\Omega \big(\mathbf{a}(\cdot,u_m,\nabla u_m)-\mathbf{a}(\cdot,u_m,\mathbf{0})\big)\cdot(\nabla u_m-\mathbf{0})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\\ &\quad+ \int_0^t\int_\Omega \mathbf{a}(\cdot,u_m,\mathbf{0}))\cdot\nabla u_m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \le \int_0^{t_{k+1}^m}\int_\Omega \mathbf{a}(\cdot,u_m,\nabla u_m)\cdot\nabla u_m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\\ &\quad- \int_t^{t_{k+1}^m}\int_\Omega \mathbf{a}(\cdot,u_m,\mathbf{0}))\cdot\nabla u_m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\\ &\quad\le \int_0^{t_{k+1}^m}\int_\Omega \mathbf{a}(\cdot,u_m,\nabla u_m)\cdot\nabla u_m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + o(1)\qquad \text{as } m\to\infty,\end{aligned}$$

where we used that

$$\Big|\int_t^{t_{k+1}^m}\int_\Omega \mathbf{a}(\cdot,u_m,\mathbf{0}))\cdot\nabla u_m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\Big| \le C\int_t^{t_{k+1}^m}\int_\Omega |\nabla u_m|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s.$$

We now have (recall that $u_m(t)$ is constant in $(t_k^m, t_{k+1}^m])$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{t_{k+1}^m}\int_\Omega \mathbf{a}(\cdot, u_m, \nabla u_m)\cdot \nabla u_m \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{2}\int_\Omega u_0^2\,\mathrm{d}x + \tau\sum_{j=0}^{k}\langle f_k, u_m\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\
&- \frac{1}{2}\int_\Omega u_m^2(t_{k+1}^m)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{j=0}^{k}\big(u_m(t_{j+1}^m) - u_m(t_j^m)\big)^2\,\mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{2}\big(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_m(t_{k+1}^m)\|_{L^2(\Omega)}^2\big) + \int_0^{t_{k+1}^m}\langle f, u_m\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)}\,\mathrm{d}s \\
&\le \frac{1}{2}\big(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\big) + \int_0^{t}\langle f, u_m\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)}\,\mathrm{d}s + o(1)
\end{aligned}
$$

(as $m \to \infty$). Hence, using the weak lower semicontinuity of the norm in $L^2(\Omega)$ and our choice of t, we have

$$
\begin{aligned}
\limsup_{m\to\infty} &\int_0^t\int_\Omega \mathbf{a}(\cdot, u_m, \nabla u_m)\cdot\nabla u_m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&\le \frac{1}{2}\big(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\big) + \int_0^t\langle f, u\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2}\big(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\big) + \int_0^t\langle \partial_t u, u\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)}\,\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t\int_\Omega \mathbf{A}\cdot\nabla u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = \int_\Omega \mathbf{A}\cdot\nabla u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

where we used the properties of the Gelfand triple, in particular, that the function $u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$.
Substep 5(iii): We now finish the proof by employing the Minty's trick. We fix $\mathbf{B} \in L^p(0,T; L^p(\Omega;\mathbb{R}^d))$ and get

$$
\begin{aligned}
0 \le \limsup_{m\to\infty}&\int_0^t\int_\Omega \big(\mathbf{a}(\cdot, u_m, \nabla u_m) - \mathbf{a}(\cdot, u_m, \mathbf{B})\big)\cdot(\nabla u_m - \mathbf{B})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&\le \limsup_{m\to\infty}\int_0^t\int_\Omega \mathbf{a}(\cdot, u_m, \nabla u_m)\cdot\nabla u_m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&- \liminf_{m\to\infty}\int_0^t\int_\Omega \big(\mathbf{a}(\cdot, u_m, \nabla u_m)\cdot\mathbf{B} + \mathbf{a}(\cdot, u_m, \mathbf{B})\cdot(\nabla u_m - \mathbf{B})\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&\le \int_0^t\int_\Omega \mathbf{A}\cdot\nabla u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s - \int_0^t\int_\Omega\big(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{a}(\cdot, u, \mathbf{B})\cdot(\nabla u - \mathbf{B})\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t\int_\Omega \big(\mathbf{A} - \mathbf{a}(\cdot, u, \mathbf{B})\big)(\nabla u - \mathbf{B})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Note that $\mathbf{a}(\cdot, u_m, \mathbf{B}) \to \mathbf{a}(\cdot, u, \mathbf{B})$ in $L^{p'}((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^d)$ due to the Lebesgue Dominated Convergence Theorem, as $|\mathbf{a}(\cdot,\cdot,\mathbf{B})| \le C(1 + |\mathbf{B}|^{p-1})$.

We now set $\mathbf{B} := \nabla u - \lambda\mathbf{H}$, $\lambda > 0$ and $H \in L^p(0,T; L^p(\Omega;\mathbb{R}^d))$, arbitrary. Then we have

$$
0 \le \int_0^t\int_\Omega \big(\mathbf{A} - \mathbf{a}(\cdot, u, \nabla u - \lambda\mathbf{H})\big)\cdot\mathbf{H}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s.
$$

We let $\lambda \to 0^+$ and use the properties of Carathéodory functions (continuity of the Nemytskii operator) to conclude

$$
0 \le \int_0^t\int_\Omega \big(\mathbf{A} - \mathbf{a}(\cdot, u, \nabla u)\big)\cdot\mathbf{H}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \tag{7.18}
$$

for all $\mathbf{H} \in L^p(0,T; L^p(\Omega;\mathbb{R}^d))$. Therefore, equality in (7.18) holds and, moreover, $\mathbf{A} = \mathbf{a}(\cdot, u, \nabla u)$. The proof is finished. ■

Příloha A

Prostory funkcí

A.1 Úvod a značení

Základními prostory pro řešení lineárních (resp. nelineárních) rovnic a jejich soustav eliptického typu jsou Sobolevovy prostory $W^{k,p}(\Omega)$ a pro slabá řešení evolučních rovnic a jejich systémů jsou základním kamenem Bochnerovy prostory $W^{k,p}(0,T;X)$. Výchozím bodem teorie těchto prostorů jsou však prostory spojitých a spojitě diferencovatelných funkcí, jimž je věnována Sekce A.2, a Lebesgueovy prostory, jimž je věnována Sekce A.3. S těmito prostory se čtenář mohl podrobně seznámit v základních kurzech matematické analýzy a teorie míry a integrálu, ale pro čtenářovo pohodlí uvádíme základní přehled výsledků z teorie těchto prostorů v příslušných kapitolách. Důkazy těchto tvrzení lze dohledat např. v Kufner et al. [1977] a Lukeš and Malý [1995]. Speciálnější tvrzení, které pak budou potřeba v dalším textu, jsou prezentovány s důkazy. Sobolevovy prostory jsou pak podrobně studovány v Kapitole 2.

Než se začneme věnovat jednotlivým prostorům funkcí, připomeneme ještě standardní značení multiindexu a zkráceného zápisu parciálních derivací.

Značení A.1.1 (Multiindex)**.** Uspořádanou d–tici $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, nazýváme multiindex. Výšku multiindexu značíme $|\alpha|$ a definujeme ji jako $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$.

Značení A.1.2 (Zápis parciálních derivací užitím multiindexu)**.** Symbolem $D^\alpha \phi$ značíme parciální derivaci funkce ϕ

$$D^\alpha \phi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\phi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ \dots \ \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

A.2 Prostory spojitých, hölderovsky spojitých a spojitě diferencovatelných funkcí

V této sekci připomeneme některé vlastnosti prostorů spojitých funkcí, hölderovsky spojitých funkcí a spojitě diferencovatelných funkcí. Věty budeme uvádět zpravidla bez důkazu, čtenář je může nalézt i s důkazy například v monografii Kufner et al. [1977].

Definice A.2.1 — Spojité a spojitě diferencovatelné funkce. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina.

1. Množinu všech spojitých funkcí na Ω značíme $\mathcal{C}(\Omega)$ resp. $\mathcal{C}^0(\Omega)$.
2. Buď $k \in \mathbb{N}$, pak $\mathcal{C}^k(\Omega)$ označuje množinu všech funkcí u, které mají na množině Ω všechny parciální derivace až do řádu k a pro každý multiindex α splňující $|\alpha| \le k$ platí, že $D^\alpha u \in \mathcal{C}(\Omega)$.
3. $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ značí množinu všech nekonečněkrát spojitě diferencovatelných funkcí na Ω, tedy $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\Omega)$.
4. Označme $\operatorname{supp} u := \overline{\{x \in \Omega |\ u(x) \neq 0\}}$ nosič funkce u. Potom pro libovolné $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ definujeme prostor $\mathcal{C}_0^k(\Omega) := \big\{u \in \mathcal{C}^k(\Omega) |\ \operatorname{supp} u \subset \Omega\,, \operatorname{supp} u \text{ je kompaktní}\big\}$.
5. $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ resp. $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ značí množinu všech funkcí z $\mathcal{C}(\Omega)$, které jsou omezené a stejnoměrně spojité na Ω.
6. Buď $k \in \mathbb{N}$, pak definujeme prostor $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) := \big\{u \in \mathcal{C}^k(\Omega) |\ \forall\alpha,\ |\alpha| \le k :\ D^\alpha u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})\big\}$.
7. $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$.

Poznámka A.2.2. Je-li Ω omezená množina, je (5) v předchozí definici ekvivalentní s tím, že existuje spojité prodloužení funkce na $\overline{\Omega}$. V dalším proto uvažujeme, že k takovému prodloužení došlo.

Základní vlastnosti těchto prostorů funkcí jsou shrnuty v následující větě.

Věta A.2.3 — Vlastnosti prostoru $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$. Buď $k \in \mathbb{N}_0$. Označme pro $u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$

$$\|u\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} := \sum_{\{\alpha\colon |\alpha|\le k\}} \sup_{x\in\overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)|. \tag{A.1}$$

Potom platí následující tvrzení:

1. $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})}$ je norma na $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$.
2. $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ je vzhledem k výše uvedené normě Banachův prostor.
3. Je-li Ω navíc omezená, je $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ separabilní.
4. Prostor $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ není reflexivní.

Proof. Viz [Kufner et al., 1977, sekce 1.3–1.7]. ■

Vzhledem k tomu, že prostor $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ není reflexivní, uvedeme i přesnou charakterizaci duálního prostoru. Tato charakterizace bude později využita k popisu vlastností některých speciálních Sobolevových prostorů.

Věta A.2.4 — Reprezentace duálního prostoru k $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená omezená množina. Buď ϕ spojitý lineární funkcionál na $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Potom existuje právě jedna konečná regulární Radonova míra μ na $\overline{\Omega}$ taková, že platí

$$\forall u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}):\ \phi(u) := \langle \phi, u\rangle = \int_{\overline{\Omega}} u \,\mathrm{d}\mu. \tag{A.2}$$

Navíc platí, že $\|\phi\|_{(\mathcal{C}(\overline{\Omega}))^\star} = |\mu|(\overline{\Omega})$, kde $|\mu|(\overline{\Omega})$ je totální variace míry μ na $\overline{\Omega}$.

Proof. Viz Dunford and Schwartz [1988]. ■

Následující věta udává přesnou charakterizaci prekompaktních množin v $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Věta A.2.5 — Arzelà–Ascoliho věta. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená omezená množina. Nechť $A \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Množina A je totálně omezená právě tehdy, když

1. je stejně omezená, tj.
$$\exists C \in \mathbb{R}^+:\ \sup_{f\in A} \|f\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} := \sup_{f\in A}\max_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)| \le C,$$
2. je stejně stejnoměrně spojitá, tj.
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall f \in A\ \forall x_1, x_2 \in \overline{\Omega}:\ |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Proof. Viz [Kufner et al., 1977, Theorem 1.5.3]. ■

V následujícím zavedeme prostory hölderovsky spojitých funkcí, které mohou být chápány jakožto interpolační prostory k prostorům spojitých a spojitě diferencovatelných funkcí.

Definice A.2.6 — Hölderovsky spojité funkce. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina, $k \in \mathbb{N}_0$ a $u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$. Pro libovolné $\lambda \in (0,1]$ a multiindex α takový, že $|\alpha| \le k$, označme

$$H_{\alpha,\lambda}(u) = \sup_{x,y\in\overline{\Omega},\ x\ne y} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda}. \tag{A.3}$$

Potom definujeme $\mathcal{C}^{k,\lambda}(\overline{\Omega}) = \big\{u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})|\ \forall\alpha,\ |\alpha| = k:\ H_{\alpha,\lambda}(u) < \infty\big\}$.

Základní vlastnosti prostorů hölderovsky spojitých funkcí jsou shrnuty v následující větě.

Věta A.2.7 — Vlastnosti prostoru $\mathcal{C}^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina, $k \in N_0$ a $\lambda \in (0,1]$. Pro $u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ označme

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\lambda}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} + \sum_{\{\alpha\colon |\alpha|=k\}} H_{\alpha,\lambda}(u). \tag{A.4}$$

Potom platí

1. $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{k,\lambda}(\overline{\Omega})}$ je norma na $\mathcal{C}^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$.
2. $\mathcal{C}^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ je k výše uvedené normě Banachův prostor.

3. $\mathcal{C}^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ není separabilní.

Proof. Viz [Kufner et al., 1977, sekce 1.3–1.5]. ■

Některé prostory hölderovsky spojitých funkcí mají v teorii význačné postavení a proto zavádíme následující značení.

Značení A.2.8 (Lipschitzovsky spojité funkce)**.** Je-li $\alpha = (0, \dots, 0)$ budeme používat místo $H_{(0,\dots,0),\lambda}(u)$ značení $H_{0,\lambda}(u)$. Navíc, je-li $\lambda = 1$, mluvíme o $\mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega})$ jako o prostoru lipschitzovsky spojitých funkcích. Pokud je $\lambda = 0$, ztotožníme prostor $\mathcal{C}^{0,0}(\overline{\Omega}) := \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Stejně jako v případě spojitých funkcí můžeme studovat podmnožiny prostorů hölderovsky spojitých funkcí, které jsou prekompaktní v prostoru spojitých funkcí. Následující věta pak říká, že jakákoliv omezená podmnožina už tuto vlastnost má.

Věta A.2.9 — Kompaktní vnoření $\mathcal{C}^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ do $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Buď Ω otevřená omezená množina. Pak pro každé $\lambda \in (0, 1]$ platí

$$\mathcal{C}^{0,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega}).$$

Proof. Tvrzení je důsledkem Arzelà–Ascoliho Věty A.2.5. ■

Platí dokonce i silnější tvrzení.

Věta A.2.10 — Kompaktní vnoření $\mathcal{C}^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ do $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Buď Ω otevřená omezená množina. Pak pro každé $\alpha, \beta \in [0, 1]$ takové, že $0 \le \alpha < \beta \le 1$, platí

$$\mathcal{C}^{0,\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Proof. Věta je snadným důsledkem interpolační nerovnosti z následujícího cvičení. ■

Cvičení A.2.11. Ukažte, že pro každá $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le 1$ platí

$$H_{0,\lambda_1}(u) \le 2 \left(\|u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \right)^{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2}} (H_{0,\lambda_2}(u))^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} .$$

Věta A.2.12 — Rademacherova věta. Funkce z $\mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega})$ je diferencovatelná skoro všude[a] na Ω a $|D^\alpha u(x)| \le H_{0,1}(u)$ platí skoro všude na Ω pro $|\alpha| = 1$.

[a] Termín skoro všude znamená až na množiny Lebesgueovy míry nula, viz Sekci A.3.

Proof. Viz [Lukeš and Malý, 1995, Theorem 30.3]. ■

A.3 Lebesgueovy prostory

Předpokládáme, že čtenář je v dostatečné míře obeznámen se základy teorie Lebesgueova integrálu. Podrobnější informace je možno nalézt ve skriptech Lukeš and Malý [1995]. Tamtéž je dokázána většina vět, které uvádíme v této sekci. Dalším vhodným zdrojem je Kufner et al. [1977].

Nebude-li řečeno jinak, bude Ω v této sekci značit libovolnou měřitelnou (vzhledem k Lebesgueově míře) množinu v $\mathbb{R}^d$. Integrálem rozumíme Lebesgueův integrál a mírou Lebesgueovu míru.

A.3.1 Základní vlastnosti měřitelných funkcí a Lebesgueova integrálu

Nejdříve připomeneme charakterizaci měřitelných funkcí.

Věta A.3.1 — Luzinova věta. Buď $f : \Omega \to \mathbb{R}$, f skoro všude konečná a Ω měřitelná. Pak je ekvivalentní

1. funkce f je měřitelná,
2. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina $G \subset \Omega$ tak, že $|G| < \varepsilon$ a $f\,|_{\Omega \setminus G}$ je spojitá.

Proof. Viz [Lukeš and Malý, 1995, Theorem 18.1]. ■

Dále připomeneme základní věty o charakterizaci posloupností měřitelných (integrovatelných) funkcí.

Věta A.3.2 — Leviho věta o monotónní konvergenci. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná množina a $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost měřitelných funkcí taková, že pro každé n a skoro všechna $x \in \Omega$ platí $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$, a navíc

$$\int_\Omega f_1(x)\,\mathrm{d}x > -\infty.$$

Pak existuje měřitelná funkce f taková, že

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{pro skoro všechna } x \in \Omega,$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta A.3.3 — Lebesgueova věta o majorizované konvergenci. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná množina, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost měřitelných funkcí a funkce f taková, že pro skoro všechna $x \in \Omega$ platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Navíc, nechť existuje měřitelná funkce g taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a skoro všechna $x \in \Omega$

$$|f_n(x)| \le g(x) \qquad \text{a} \qquad \int_\Omega g(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta A.3.4 — Vitaliho věta. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená měřitelná množina, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost měřitelných funkcí a funkce f takové, že pro skoro všechna $x \in \Omega$ platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Navíc, nechť je daná posloupnost stejně stejnoměrně integrovatelná, tj.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall n \in \mathbb{N}\, \forall H \subset \Omega : \, |H| \le \delta \implies \int_H |f_n(x)| \le \varepsilon.$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta A.3.5 — Fatouovo lemma. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná množina, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost nezáporných měřitelných funkcí. Potom

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta A.3.6 — Jegorovova věta. Buď Ω měřitelná a $|\Omega| < \infty$. Buď f a $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ měřitelné funkce, které jsou konečné skoro všude na Ω. Pak je ekvivalentní:

1. Pro skoro všechna $x \in \Omega$
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$
2. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina $G \subset \Omega$ tak, že $|G| < \varepsilon$ a
$$f_n \rightrightarrows f \text{ stejnoměrně na } \Omega \setminus G.$$

Proof. Důkazy Vět A.3.2–A.3.6 lze nalézt v [Lukeš and Malý, 1995, sekce 8 a 12]. ■

A.3.2 Zavedení Lebesgueových prostorů, Hölderova nerovnost a její důsledky

Nyní zadefinujme základní pojem v teorii Lebesgueových prostorů.

Definice A.3.7 — Třída $\mathcal{L}^p$. Buď $p \in [1, \infty)$. Pak značíme

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \left\{ f \text{ měřitelná na } \Omega \;\middle|\; \int_\Omega |f|^p\,\mathrm{d}x < \infty \right\},$$
$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} \equiv \|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{A.5}$$

Pro $p = \infty$ značíme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\infty(\Omega) &:= \left\{ f \text{ měřitelná na } \Omega | \ \exists C \in \mathbb{R}^+ : |f(x)| \leq C \text{ skoro všude na } \Omega \right\}, \\ \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} &:= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| = \inf_{\{E\subset\Omega : |E|=0\}} \sup_{x\in\Omega\setminus E} |f(x)| \\ &= \inf_{\alpha\in\mathbb{R}} \{\alpha \mid |f(x)| \leq \alpha \text{ skoro všude na } \Omega\}.\end{aligned} \tag{A.6}$$

Změna funkce f na množině míry nula nemá vliv na to, zda $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, $p \in [1,\infty]$, ani na hodnotu funkcionálu $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$. Pro funkce $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ tedy není funkcionál $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$ norma. Uvažujeme proto místo individuální funkce f třídu ekvivalence $[f]$ definovanou jako

$$f_1 \in [f] \Leftrightarrow f_1 = f \text{ skoro všude na } \Omega.$$

Místo tříd $[f]$ budeme (poněkud nepřesně) hovořit o funkcích f, přičemž budeme mít na mysli celou třídu ekvivalentních funkcí.

Definice A.3.8 — Lebesgueův prostor. Buď $p \in [1,\infty]$. Označme

$$L^p(\Omega) := \{[f] \mid f \in \mathcal{L}^p(\Omega)\}.$$

Potom $L^p(\Omega)$ nazýváme Lebesgueův prostor. Pro otevřenou množinu Ω dále zavádíme

$$L^p_{loc}(\Omega) := \{f \text{ měřitelná na } \Omega | \ \forall K \subset \Omega, K \text{ kompaktní}: \ f \in L^p(K)\}.$$

Základní vlastnost funkcionálu definovaného v (A.5) a (A.6) je následující.

Věta A.3.9 — Minkowského nerovnost. Buď $p \in [1,\infty]$ a $f, g \in L^p(\Omega)$. Pak platí

1. $f + g \in L^p(\Omega)$
2. $\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}$.

Proof. Viz [Lukeš and Malý, 1995, Theorem 10.4]. ■

Na jejím základě pak můžeme dokázat následující základní vlastnost Lebesgueových prostorů.

Věta A.3.10 — Úplnost Lebesgueových prostorů. Buď $p \in [1,\infty]$. Pak platí, že funkcionál $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$ definovaný v (A.5) a (A.6) je na $L^p(\Omega)$ norma a prostor $L^p(\Omega)$ je vzhledem k této normě Banachův. Navíc, pro $p = 2$ je $L^2(\Omega)$ Hilbertův prostor se skalárním součinem definovaným jako

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proof. Viz [Lukeš and Malý, 1995, Theorem 10.6]. ■

Zcela zásadní roli nejen v teorii Lebesgueova integrálu ale i v teorii parciálních diferenciálních rovnic pak hraje následující nerovnost.

Věta A.3.11 — Hölderova nerovnost. Buď $p \in [1,\infty]$ a $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (s úmluvou $p = 1 \Rightarrow p' = \infty$ a naopak). Pak platí

1. $fg \in L^1(\Omega)$,
2. $\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$.

Proof. Viz [Lukeš and Malý, 1995, Theorem 10.3]. ■

Hölderova nerovnost má několik přímých důsledků.

Lemma A.3.12 — Hölderova nerovnost pro více funkcí. Buďte pro $i = 1,\ldots,k$, $p_i \in [1,\infty]$ takové, že platí $\sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} = 1$. Buďte dále $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$. Pak platí

1. $\prod_{i=1}^k f_i \in L^1(\Omega)$,
2. $\left\|\prod_{i=1}^k f_i\right\|_{L^1(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}$.

Lemma A.3.13 — Triviální vnoření $L^p(\Omega)$ prostorů. Buď[a] $|\Omega| < \infty$, pak pro $p_1, p_2 \in [1, \infty]$, $p_2 \geq p_1$ platí

1. $L^{p_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1}(\Omega)$,
2. $\|f\|_{L^{p_1}(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{p_2 - p_1}{p_1 p_2}} \|f\|_{L^{p_2}(\Omega)}$.

[a] Symbol $|\cdot|$ značí d-dimenzionální Lebesgueovu míru množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Lemma A.3.14 — Interpolační Hölderova nerovnost. Buď $p_1, p_2 \in [1, \infty]$, $p_2 > p_1$ a $f \in L^{p_1}(\Omega) \cap L^{p_2}(\Omega)$. Potom $\forall r \in [p_1, p_2]$, platí

1. $f \in L^r(\Omega)$,
2. $\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^{\alpha}_{L^{p_1}(\Omega)} \|g\|^{1-\alpha}_{L^{p_2}(\Omega)}$,

kde α splňuje $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2}$.

Cvičení A.3.15. Užitím Věty A.3.11 dokažte Lemmata A.3.12–A.3.14.

Jako poslední v této sekci uvedeme charakterizaci $L^\infty(\Omega)$.

Věta A.3.16 — Souvislost norem v $L^\infty(\Omega)$ a $L^p(\Omega)$. Buď $|\Omega| < \infty$. Je-li $f \in L^\infty(\Omega)$, pak platí

1. $\forall p \in [1, \infty) : \ f \in L^p(\Omega)$,
2. $\lim_{p \to \infty} \|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Existuje-li posloupnost $\{p_i\}_{i=1}^\infty$ taková, že $\lim_{i\to\infty} p_i = \infty$ a konstanta $C \in \mathbb{R}_+$ taková, že $\sup_{i \in \mathbb{N}} \|f\|_{L^{p_i}(\Omega)} \leq C$, pak platí

1. $f \in L^\infty(\Omega)$,
2. $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$.

Proof. Důkaz je poměrně jednoduché cvičení a lze jej nalézt v [Kufner et al., 1977, Theorem 2.11.4–2.11.5]. ■

A.3.3 Hustota spojitých funkcí v Lebesgueových prostorech

Z konstrukce Lebesgueova integrálu plyne, že v prostorech $L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$, jsou husté jednoduché funkce. V kapitole o konvolučním zhlazování si ukážeme hustotu hladkých funkcí. K tomu ale budeme potřebovat větu o Lebesgueových bodech, jejíž důkaz využívá hustotu spojitých funkcí v $L^1(\Omega)$. Tento výsledek si nyní dokážeme.

Věta A.3.17 — Hustota spojitých funkcí v $L^1(\Omega)$. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená. Pak spojité funkce jsou husté v $L^1(\Omega)$.

Proof. Zvolme $u \in L^1(\Omega)$ a $\varepsilon > 0$. Předně s využitím Lebesgueovy Věty A.3.3 snadno ukážeme, že existuje $R > 0$ tak velké, že $\|u - u\chi_{B_R(0)}\|_1 < \varepsilon$. Nyní nám stačí spojitě aproximovat funkci $u_1 = u\chi_{B_R(0)}$, kterou dodefinujeme nulou mimo definiční obor u. Díky vlastnostem Lebesgueova integrálu existuje jednoduchá funkce $u_2 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ taková, že $\|u_2 - u_1\|_1 < \varepsilon$. Zřejmě můžeme předpokládat, že $u_2 = 0$ na $\mathbb{R}^d \setminus B_R(0)$. Tato funkce má jen konečný počet nenulových funkčních hodnot, jejichž vzory jsou měřitelné podmnožiny $B_R(0)$. Díky vnitřní regularitě Lebesgueovy míry můžeme každou takovou množinu zevnitř libovolně přesně aproximovat kompaktem.

Umíme tedy získat jednoduchou funkci u_3 takovou, že $\|u_3 - u\|_1 < 3\varepsilon$ a

$$u_3 = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{K_i},$$

kde $n \in \mathbb{N}$, a_i jsou reálná čísla a $K_i \subset B_R(0)$ jsou disjunktní kompakty. Nutně pak

$$d := \min_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{dist}(K_i, K_j) > 0.$$

Nyní již stačí zvolit $\delta \in (0, \frac{d}{2})$ a položit

$$u_4(x) = \sum_{i=1}^n a_i \max\Big\{1 - \frac{1}{\delta} \operatorname{dist}(x, K_i), 0\Big\}.$$

Získali jsme tak spojitou funkci, která navíc pro δ dostatečně malé splňuje $\|u_3 - u_4\|_1 < \varepsilon$. Skutečně, hodnotu funkce u_3 jsme změnili jen na množinách, kde $0 < \operatorname{dist}(x, K_i) < \delta$ pro některé i, míra těchto množin jde do nuly pro $\delta \to 0_+$ (spojitost míry) a funkční hodnotu jsme změnili nejvýše o $\max_{i=1,\dots,n} |a_i|$. ■

A.3.4 Lebesgueovy body

Připomeňme nyní Luzinovu větu A.3.1, která říká, že je-li Ω omezená, můžeme volit G tak, že $\Omega \setminus G$ je kompaktní a u je spojitá funkce na $\Omega \setminus G$, což je množina téměř celé míry. Kdyby byla spojitá všude v Ω, nebylo by těžké ověřit, že platí

$$\forall x \in \Omega: \lim_{r \to 0+} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u(y)\,\mathrm{d}y = u(x).$$

Protože výše uvedená vlastnost je zcela zásadní pro vybudování teorie PDR, bude nás zajímat, pro jak velkou množinu bude uvedená rovnost platit, pokud bude u pouze lokálně integrovatelná funkce. Zadefinujme proto nejdříve následující pojem.

Definice A.3.18 — Lebesgueův bod. Buď $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ lokálně integrovatelná funkce. Řekneme, že bod $x \in \mathbb{R}^d$ je Lebesgueův bod funkce u právě tehdy, když

$$\lim_{r \to 0+} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |u(y) - u(x)|\,\mathrm{d}y = 0. \tag{A.7}$$

Odpověď na otázku, jak velká je množina Lebesgueových bodů, dává následující věta.

Věta A.3.19 — O Lebesgueových bodech. Buď $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ lokálně integrovatelná funkce. Pak skoro všechny $x \in \mathbb{R}^d$ jsou Lebesgueovy body funkce u.

Důkaz tohoto tvrzení obyčejně nebývá součástí základního kurzu z teorie Lebesgueova integrálu a přestože čtenář může najít důkaz tohoto tvrzení v [Lukeš and Malý, 1995, Theorem 23.9], uvádíme pro úplnost tento důkaz i zde.

Nejprve si odvodíme dva pomocné výsledky.

Věta A.3.20 — Vitaliho pokrývací lemma. Nechť $\{B_{r_i}(x_i)\}_{i=1,\dots,n} \subset \mathbb{R}^d$ je konečný systém koulí. Pak existuje jeho disjunktní podsystém $\{B_{r_j}(x_j)\}_{j\in J}$, $J \subset \{1,\dots,n\}$, takový, že

$$\bigcup_{i=1,\dots,n} B_{r_i}(x_i) \subset \bigcup_{j\in J} B_{3r_j}(x_j). \tag{A.8}$$

Proof. Můžeme předpokládat, že koule jsou seřazeny sestupně podle velikosti. Podsystém $\{B_{r_j}(x_j)\}_{j\in J}$, $J \subset \{1,\dots,n\}$, vybereme následujícím způsobem. Nejprve položíme $j_1 = 1$ a odstraníme všechny koule, které protínají největší kouli $B_{r_1}(x_1)$. Dále $j_2 > j_1$ je pořadové číslo druhé největší ze zbývajících koulí. Nyní odstraníme všechny koule, které protínají $B_{r_{j_2}}(x_{j_2})$, a do dalšího kroku pokračujeme se třetí největší koulí ze zbývajících. Takto pokračujeme, dokud nezískáme disjunktní systém. Vlastnost (A.8) plyne z toho, že byla-li nějaká koule $B_{r_i}(x_i)$ vyřazena, musí existovat $j \in \{1,\dots,i-1\}$ takové, že $B_{r_j}(x_j)$ je mezi vybranými koulemi a $B_{r_i}(x_i) \cap B_{r_j}(x_j) \neq \emptyset$. Zároveň však máme $r_j \geq r_i$, a proto $B_{r_i}(x_i) \subset B_{3r_j}(x_j)$. ∎

Dále si představíme operátor, který hraje významnou roli v harmonické analýze.

Definice A.3.21 — Hardyův–Littlewoodův maximální operátor. Hardyův–Littlewoodův maximální operátor je operátor, který lokálně integrovatelné funkci $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ přiřadí funkci Mu definovanou předpisem

$$Mu(x) = \sup_{\{B_r(z):\, x\in B_r(z)\}} \frac{1}{|B_r(z)|} \int_{B_r(z)} |u(y)|\,\mathrm{d}y.$$

Věta A.3.22 — Hardyova–Littlewoodova věta. Nechť $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pak pro všechna $t > 0$ platí[a]

$$|\{x \in \mathbb{R}^d \colon (Mu)(x) > t\}| \leq \frac{3^d}{t}\|u\|_1.$$

[a] Tento odhad se nazývá „slabý $(1,1)$-odhad“.

Proof. Množina $G_t := \{x \in \mathbb{R}^d \colon (Mu)(x) > t\}$ je zřejmě otevřená, což plyne ze spojité závislosti integrálu na množině přes kterou integrujeme (ověřte podrobně). Zvolme $K \subset G_t$ kompaktní. Pro každé $z \in K$ existují $x_z \in \mathbb{R}^d$ a $r_z > 0$ taková, že

$$\int_{B_{r_z}(x_z)} |u(y)|\,\mathrm{d}y > t|B_{r_z}(x_z)|.$$

Systém $\{B_{r_z}(x_z)\}_{z\in K}$ pokrývá množinu $K \subset \mathbb{R}^d$ a lze z něj tedy dle Lindelöfovy věty vybrat spočetné podpokrytí. Protože K je navíc kompaktní, můžeme z tohoto podpokrytí vybrat dle Borelovy věty konečné podpokrytí, ze kterého lze zase pomocí Vitaliho Věty A.3.4 vybrat disjunktní podsystém $\{B_{r_i}(x_i)\}_{i=1,\dots,n}$ tak, že $\{B_{3r_i}(x_i)\}_{i=1,\dots,n}$ pokrývá K.

Proto

$$t|K| \le t\sum_{i=1}^{n} |B_{3r_i}(x_i)| = 3^d t \sum_{i=1}^{n} |B_{r_i}(x_i)| \le 3^d \sum_{i=1}^{n} \int_{B_{r_i}(x_i)} |u(y)| \,\mathrm{d}y \le 3^d \|u\|_1.$$

Nyní stačí přejít k supremu přes $K \subset G_t$ na levé straně předchozí nerovnosti (Lebesgueova míra je zevnitř regulární) a věta je dokázána. ■

Konečně můžeme přistoupit k důkazu věty o Lebesgueových bodech.

Důkaz Věty A.3.19. Pro $\varepsilon > 0$ položme

$$N_\varepsilon = \Big\{x \in \mathbb{R}^d \colon \limsup_{r\to 0_+} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |u(y) - u(x)| \,\mathrm{d}y > 3\varepsilon\Big\}.$$

Naším cílem je ukázat, že $|N_\varepsilon| = 0$, kdykoliv $\varepsilon > 0$. Zafixujme tedy $\varepsilon \in (0,1)$ a dále $\delta \in (0,1)$. Protože spojité funkce jsou husté v $L^1(\mathbb{R}^d)$, můžeme najít takovou spojitou funkci $v \in L^1(\mathbb{R}^d)$, že $\|u - v\|_1 < \delta$. Definujme ještě

$$N_{\varepsilon,\delta} = \{x \in \mathbb{R}^d \colon M(u-v)(x) \ge \varepsilon\} \cup \{x \in \mathbb{R}^d \colon |u(x) - v(x)| \ge \varepsilon\}.$$

Zafixujme nyní $x \notin N_{\varepsilon,\delta}$. Díky spojitosti v můžeme najít $\varrho > 0$ takové, že

$$|v(y) - v(x)| < \varepsilon \qquad \text{pro } |y - x| < \varrho.$$

Pro všechna $r \in (0, \varrho)$ tedy máme (připomeňme $x \notin N_{\varepsilon,\delta}$)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |u(y) - u(x)| \,\mathrm{d}y \\
&\quad\le \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} (|v(y) - v(x)| + |u(y) - v(y)| + |v(x) - u(x)|) \,\mathrm{d}y \\
&\quad\le \varepsilon + M(u-v)(x) + \varepsilon \le 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

a proto $N_\varepsilon \subset N_{\varepsilon,\delta}$.

Zároveň díky Čebyševově nerovnosti a Hardyově–Littlewoodově Větě A.3.22 máme

$$|N_{\varepsilon,\delta}| \le |\{M(u-v) \ge \varepsilon\}| + |\{|u-v| \ge \varepsilon\}| \le \frac{3^d}{\varepsilon}\|u-v\|_1 + \frac{1}{\varepsilon}\|u-v\|_1 = \frac{C\delta}{\varepsilon}.$$

Celkově tedy dostáváme $|N_\varepsilon| \le |N_{\varepsilon,\delta}| \le \frac{C\delta}{\varepsilon}$, a protože $\delta > 0$ bylo libovolné, musí platit $|N_\varepsilon| = 0$. ■

Cvičení A.3.23. Jako ne zcela triviální rozšíření věty o Lebesgueových bodech dokažte následující. Buď $u \in L^p(\Omega)$ a $p \in [1, \infty)$. Pak pro skoro všechna $x \in \Omega$ platí

$$\lim_{r\to 0_+} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |u(y) - u(x)|^p \,\mathrm{d}y = 0.$$

A.3.5 Regularizátor a operátor zhlazení, spojitost v průměru v p-té mocnině, separabilita $L^p(\Omega)$ prostorů

Definice A.3.24 — Spojitost v průměru v p-té mocnině. Buď $f \in L^p(\Omega)$ a $p \in [1, \infty)$. Položme $f(x) = 0$ pro $x \notin \Omega$. řekneme, že funkce f je spojitá v průměru v p-té mocnině právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall h \in \mathbb{R}^d : |h| < \delta \implies \int_\Omega |f(x+h) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x < \varepsilon^p. \tag{A.9}$$

Věta A.3.25 — O spojitosti v průměru v p-té mocnině. Buď $p \in [1, \infty)$. Pak každá funkce z $L^p(\Omega)$ je spojitá v průměru v p-té mocnině.

Proof. Pro $x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ máme $f(x) = 0$. Zřejmě lze volit $R > 0$ tak, aby pro dané $\varepsilon > 0$ bylo

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus B_R(0)} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \le \left(\frac{\varepsilon}{6}\right)^p,$$

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus B_{R+1}(0)} |f(x+h)|^p \,\mathrm{d}x \le \left(\frac{\varepsilon}{6}\right)^p,$$

přičemž jsme bez újmy na obecnosti předpokládali, že pro δ z (A.9) platí $\delta \le 1$. Díky výše uvedeným vztahům dále můžeme pracovat jen na kouli $B_{R+1}(0)$.

Zvolme $\eta > 0$ takové, že $\forall E \subset B_{R+2}(0)$, $|E| < 2\eta$, platí

$$\int_E |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \left(\frac{\varepsilon}{6}\right)^p. \tag{A.10}$$

Funkce f je zřejmě měřitelná na $B_{R+2}(0)$ a podle Luzinovy Věty A.3.1 pak existuje kompaktní množina $F_\eta^R \subset B_{R+2}(0)$ taková, že $f \in \mathcal{C}(F_\eta^R)$ a $|B_{R+2}(0) \setminus F_\eta^R| < \eta$. Pak zřejmě existuje $\delta \in (0,1)$ tak, že

$$\forall x, y \in F_\eta^R : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3|B_{R+1}(0)|^{\frac{1}{p}}}. \tag{A.11}$$

Označme $F_\eta^{R,h} := \left\{x \in B_{R+2}(0) : \; x + h \in F_\eta^R\right\}$ a $F_\eta := F_\eta^R \cap F_\eta^{R,h} \cap \overline{B_{R+1}(0)}$. Množina F_η je kompaktní a platí

$$|B_{R+1}(0) \setminus F_\eta| = \left| \left(B_{R+1}(0) \setminus F_\eta^R\right) \cup \left(B_{R+1}(0) \setminus F_\eta^{R,h}\right) \right| < 2\eta,$$

neboť díky volbě η máme

$$\begin{aligned} |B_{R+1}(0) \setminus F_\eta^R| &\le |B_{R+2}(0) \setminus F_\eta^R| < \eta, \\ |B_{R+1}(0) \setminus F_\eta^{R,h}| &= |B_{R+1}(-h) \setminus F_\eta^R| \le |B_{R+2}(0) \setminus F_\eta^R| < \eta, \end{aligned}$$

kde jsme pro druhý odhad využili předpoklad $|h| \le 1$. Celkem tedy z předchozího a z (A.10) plyne

$$2^{p-1} \int_{B_{R+1}(0) \setminus F_\eta} \left(|f(x+h)|^p + |f(x)|^p\right) \mathrm{d}x < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$$

a dále pro všechna $h \in B_\delta(0)$ máme z (A.11)

$$\int_{F_\eta} |f(x+h) - f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p.$$

Konečně pro $|h| < \delta$ platí

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h) - f(x)|^p \, \mathrm{d}x \le{}& 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_{R+1}(0)} \left(|f(x+h)|^p + |f(x)|^p\right) \mathrm{d}x \\ &+ 2^{p-1} \int_{B_{R+1}(0) \setminus F_\eta} \left(|f(x+h)|^p + |f(x)|^p\right) \mathrm{d}x \\ &+ \int_{F_\eta} |f(x+h) - f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \varepsilon^p, \end{aligned}$$

což jsme chtěli ukázat. ■

Cvičení A.3.26. Modifikujte důkaz předchozí věty a ukažte následující: Buď $p \in [1, \infty)$ a $u \in L^p(\Omega)$ libovolné. Pro $\tau \in (0,1]$ definujeme $u_\tau(x) = u(\tau x)$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $\|u - u_\tau\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$.

V teorii parciálních diferenciálních rovnic hraje význačnou úlohu operátor zhlazení, který je dán konvolucí s vhodným zhlazovacím jádrem (regularizátorem).

Definice A.3.27 — Regularizátor. řekneme, že funkce $\eta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je regularizátor (zhlazovací jádro), právě když jsou splněny následující podmínky

1. $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$,
2. $\operatorname{supp} \eta \subset \overline{B_1(0)}$,
3. $\forall x \in \mathbb{R}^d : \; \eta(x) \ge 0$,
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}^d : \; |x| = |y| \Rightarrow \eta(x) = \eta(y)$,
5. $\int_{\mathbb{R}^d} \eta(x) \mathrm{d}x = 1$.

Příklad A.3.28. Příkladem zhlazovacího jádra je funkce

$$\eta(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2 - 1}} & \text{pro } |x| < 1, \\ 0 & \text{pro } |x| \ge 1, \end{cases}$$

kde konstanta C je volena tak, aby byla splněna podmínka $\int_{\mathbb{R}^d} \eta(x) \, \mathrm{d}x = 1$.

V dalším budeme značit η_ε (pro $\varepsilon > 0$) funkci definovanou jako

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Definice A.3.29 — Zhlazení funkce. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Funkci $u_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ definovanou na $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega | \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ jako

$$u_\varepsilon := \eta_\varepsilon \star u \;\left(\text{tj. } u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y = \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y\right)$$

nazýváme zhlazením (regularizací) funkce u.

Věta A.3.30 — O konvoluci. Buď $p, q \in [1, \infty]$ takové, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Pak pro každou $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ a $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ platí

1. $f \star g \in L^r(\mathbb{R}^d)$, kde $\frac{1}{r} := \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$,
2. $\|f \star g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$.

Proof. Viz [Lukeš and Malý, 1995, Theorem 26.20]. ■

Cvičení A.3.31. Dokažte odhad 2. ve větě pomocí Hölderovy nerovnosti.

Věta A.3.32 — O vlastnostech zhlazení. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Buď u_ε zhlazení funkce u. Pak platí:

1. $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$.
2. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} u_\varepsilon(x) = u(x)$ pro skoro všechna $x \in \Omega$.
3. Je–li $u \in \mathcal{C}(\Omega)$, pak $u_\varepsilon \rightrightarrows u$ na každé kompaktní množině $K \subset \Omega$.
4. Je–li $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ pro $p \in [1, \infty)$, pak $u_\varepsilon \to u$ v $L^p_{loc}(\Omega)$.
5. Je–li $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$, pak je $\|u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ pro $p \in [1, \infty]$ a $u_\varepsilon \to u$ v $L^p(\mathbb{R}^d)$ pro $p \in [1, \infty)$.

Proof. Důkaz tvrzení 1: Z definice je

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y,$$

kde $\eta_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Stačí tedy použít větu o spojitosti integrálu podle parametru a o derivaci integrálu podle parametru a ihned dostaneme požadované $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$.

Důkaz tvrzení 2: Využijeme Definice regularizátoru A.3.27 a spočteme pro libovolné $x \in \Omega_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
|u(x) - u_\varepsilon(x)| &= \left| u(x) \int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y \right| \\
&= \left| \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)\,(u(x) - u(y))\,\mathrm{d}y \right| \\
&= \frac{1}{\varepsilon^d} \left| \int_{B_\varepsilon(x)} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)(u(x) - u(y))\,\mathrm{d}y \right| \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon^d} \int_{B_\varepsilon(x)} |u(x) - u(y)|\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Podle Věty A.3.19 pak pro skoro všechna x platí $\frac{C}{\varepsilon^d} \int_{B_\varepsilon(x)} |u(x) - u(y)|\,\mathrm{d}y \to 0$ pro $\varepsilon \to 0$ a tvrzení je dokázáno.

Důkaz tvrzení 3: Postupujeme stejně jako v důkazu tvrzení 2, pouze při odhadu výrazu

$$\frac{C}{\varepsilon^d} \int_{B_\varepsilon(x)} |u(x) - u(y)|\,\mathrm{d}y$$

využijeme stejnoměrné spojitosti funkce u na kompaktní množině K.

Důkaz tvrzení 4: Tvrzení je důsledkem Věty A.3.25 a vlastností regularizátoru $(\operatorname{dist}(K, \partial\Omega) > \varepsilon)$. Skutečně (používáme Hölderovu nerovnost a Fubiniho větu)

$$
\begin{aligned}
\|u_\varepsilon - u\|_{L^p(K)}^p &= \int_K |u_\varepsilon(x) - u(x)|^p \,\mathrm{d}x \\
&= \int_K \left(\int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)|u(y) - u(x)| \,\mathrm{d}y \right)^p \mathrm{d}x \\
&= \int_K \left(\int_{B_1(0)} \eta(z)|u(x - \varepsilon z) - u(x)| \,\mathrm{d}z \right)^p \mathrm{d}x \\
&\le C \int_K \left(\int_{B_1(0)} |u(x-\varepsilon z) - u(x)|^p \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \\
&= C \int_{B_1(0)} \left(\int_K |u(x-\varepsilon z) - u(x)|^p \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

Vnitřní integrál přes K jde podle Věty A.3.25 k nule pro $\varepsilon \to 0$ a tvrzení je dokázáno.

Důkaz tvrzení 5: Podle Věty o konvoluci A.3.30 máme pro libovolné $p \in [1, \infty]$

$$\|u_\varepsilon\|_p \le \|u\|_p \|\eta_\varepsilon\|_1 = \|u\|_p.$$

Nechť nyní $p \in [1, \infty)$ a $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Zvolme číslo $\varrho > 0$ libovolně. Zřejmě existuje $R > 0$ tak, že

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus B_R(0)} |u|^p \,\mathrm{d}x < \left(\frac{\varrho}{4}\right)^p.$$

Analogicky jako výše můžeme pro $\varepsilon < 1$ dokázat, že

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus B_{R+1}(0)} |u_\varepsilon|^p \,\mathrm{d}x < \left(\frac{\varrho}{4}\right)^p.$$

Nyní podobně jako v důkazu tvrzení 4 můžeme dokázat, že existuje $\varepsilon_0 > 0$ tak, že pro libovolné $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ platí, že

$$\int_{B_{R+1}(0)} |u - u_\varepsilon|^p \,\mathrm{d}x < \left(\frac{\varrho}{2}\right)^p.$$

Potom kombinací výše uvedených nerovností dostaneme

$$
\begin{aligned}
\|u - u_\varepsilon\|_p &\le \|u - u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d \setminus B_{R+1}(0))} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^p(B_{R+1}(0))} \\
&\le \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d \setminus B_R(0))} + \|u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d \setminus B_{R+1}(0))} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^p(B_{R+1}(0))} < \varrho.
\end{aligned}
$$

■

Z předchozí Věty A.3.32 plyne např. následující. Je-li $u \in L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$, potom $u_\varepsilon \to u$ v $L^p(\Omega)$. Stačí totiž prodloužit u nulou vně Ω a použít pátou část zmíněné věty.

Poznamenejme, že pátá část Věty A.3.32 nemůže platit pro $p = \infty$, protože konvergence v $L^\infty(\Omega)$-normě je pro hladké funkce konvergencí stejnoměrnou. Platí ale slabší tvrzení, totiž

$$u_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ v } L^\infty(\Omega)$$

(tj. $\forall \varphi \in L^1(\Omega) : \int_\Omega u_\varepsilon \varphi \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega u\varphi \,\mathrm{d}x$, viz oddíl o reflexivitě a duálních prostorech A.3.6 a různých konvergencí A.3.7).

Pomocí Bernsteinovy věty o aproximaci spojité funkce polynomy v $\mathcal{C}^0(\Omega)$ normě (a tudíž polynomy s racionálními koeficienty v $L^p(\Omega)$ normě, $p \in [1, \infty)$) dostáváme jako triviální důsledek první část následující věty.

Věta A.3.33 — Separabilita $L^p(\Omega)$ prostorů. Prostor $L^p(\Omega)$ je pro $p \in [1, \infty)$ separabilní. Prostor $L^\infty(\Omega)$ separabilní není.

Proof. Viz také [Kufner et al., 1977, Theorem 2.6.1]. ■

Cvičení A.3.34. Pomocí charakteristických funkcí intervalů ukažte, že $L^\infty(\Omega)$ nemůže být separabilní.

A.3.6 Spojité lineární funkcionály nad $L^p(\Omega)$

Věta A.3.35 — Reprezentace spojitého lineárního funkcionálu nad $L^p(\Omega)$. Buď Ω neprázdná otevřená množina. Buď dále ϕ spojitý lineární funkcionál nad $L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$. Pak existuje právě jedna funkce $g \in L^{p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, taková, že platí

$$\forall f \in L^p(\Omega) : \ \phi(f) = \langle \phi, f \rangle = \int_\Omega f g \, \mathrm{d}x. \tag{A.12}$$

Navíc $\|\phi\|_{(L^p(\Omega))^\star} = \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$.

Proof. Viz [Kufner et al., 1977, Theorem 2.9.5]. ■

Předchozí větu využívá následující výsledek.

Věta A.3.36 — reflexivita $L^p(\Omega)$. Buď $p \in (1, \infty)$. Pak je $L^p(\Omega)$ reflexivní. Prostory $L^\infty(\Omega)$ a $L^1(\Omega)$ reflexivní nejsou.

Proof. Viz [Kufner et al., 1977, Theorems 2.10.1, 2.11.2 a 2.11.10]. ■

A.3.7 Různé typy konvergencí, relativně (slabě) kompaktní množiny v $L^p(\Omega)$

Podívejme se nyní na to, v jakém smyslu může posloupnost f_n konvergovat k limitní funkci f a jaké jsou vztahy mezi různými typy konvergencí.

Definice A.3.37 — Typy konvergencí. Buď $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost měřitelných funkcí a f měřitelná funkce na Ω.

1. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k f bodově na Ω právě tehdy, když pro každé $x \in \Omega$ je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, tj.
$$\forall x \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$
2. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k f stejnoměrně na Ω právě tehdy, když
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in \Omega, \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$
3. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k f lokálně stejnoměrně na Ω právě tehdy, když $\forall K \subset \Omega$, kde K je kompaktní, konverguje posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ stejnoměrně k f na K.
4. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k f stejnoměrně na Ω až na malé množiny právě tehdy, když
$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \subset \Omega, |M| < \varepsilon : \{f_n\}_{n=1}^\infty \text{ konverguje k } f \text{ stejnoměrně na } \Omega \setminus M.$$
5. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k f skoro všude na Ω právě tehdy, když
$$\exists M \subset \Omega, |M| = 0 : \{f_n\}_{n=1}^\infty \text{ konverguje k } f \text{ bodově na } \Omega \setminus M.$$
6. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k f v míře na Ω právě tehdy, když
$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} |\{x \in \Omega | \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| = 0.$$
7. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k f v $L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, právě tehdy, když
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$
8. Buď $p \in [1, \infty)$ a $p' = \frac{p}{p-1}$ (s obvyklou úmluvou $p' = \infty$ pro $p = 1$). řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k f slabě v $L^p(\Omega)$, značíme $f_n \rightharpoonup f$, právě tehdy, když
$$\forall g \in L^{p'}(\Omega) : \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n g \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f g \, \mathrm{d}x.$$
9. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k f slabě s hvězdičkou (slabě$\star$) v $L^\infty(\Omega)$, značíme $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$, právě tehdy, když
$$\forall g \in L^1(\Omega) : \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n g \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f g \, \mathrm{d}x.$$

Některé vztahy mezi výše uvedenými konvergencemi jsou schématicky zachyceny na Obrázku A.1. Tyto vztahy se dají lehce ukázat z definice a za pomoci vět o limitních přechodech uvedených na začátku této sekce.

stejnoměrná konvergence $\Longrightarrow$ lokálně stejnoměrná konvergence $\Longrightarrow$ bodová konvergence $\Longrightarrow$ konvergence skoro všude $\Longrightarrow$ konvergence v míře

stejnoměrná konvergence $\xRightarrow{|\Omega| < \infty}$ konvergence v L^p $\Longrightarrow$ konvergence v míře $\Longrightarrow$ vybraná podposloupnost konverguje skoro všude

Obrázek A.1: Některé vztahy mezi konvergencemi

Poznámka A.3.38. Pro $p \in (1, \infty)$ výše uvedené slabé konvergence splývají díky Větě A.3.35 se standardní Definicí slabé konvergence B.2.5. Pro $p = \infty$ Věta A.3.35 říká, že $(L^1(\Omega))^\star = L^\infty(\Omega)$, a proto slabá s hvězdičkou konvergence zavedená výše odpovídá Definici B.2.5. Přestože bychom mohli zavést i slabou konvergenci na $L^\infty(\Omega)$, neuvádíme jí, protože Věta A.3.35 neříká nic o tom jak vypadá[1] $(L^\infty(\Omega))^\star$. Naproti tomu na $L^1(\Omega)$ nezavádíme slabou s hvězdičkou konvergenci, neboť neexistuje Banachův prostor X, pro který by platilo $X^\star = L^1(\Omega)$.

Navíc, na $L^p(\Omega)$, $p \in (1, \infty)$, máme k dispozici slabou i slabou s hvězdičkou konvergenci, ale protože na reflexivních prostorech (což $L^p(\Omega)$ pro $p \in (1, \infty)$ podle Věty A.3.36 jsou) obě konvergence splývají, viz Větu B.2.6, není používání obou typů konvergencí nutné.

Na závěr se podívejme na charakterizace totálně omezených množin v $L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$. Půjde o analogii Arzelà–Ascoliho věty A.2.5, roli stejnoměrné spojitosti ale bude hrát spojitost v průměru v p-té mocnině.

Věta A.3.39 — Kolmogorovova věta. Buď $p \in [1, \infty)$. Označme $r_h f(x) := f(x + h)$ (mimo množinu Ω definujeme $f(x) := 0$). Množina $A \subset L^p(\Omega)$ je totálně omezená právě když

1. je stejně omezená, tj.
$$\sup_{f \in A} \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C < \infty,$$
2. stejně spojitá v průměru v p-té mocnině, tj.
$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall f \in A : |h| < \delta \implies \|r_h f - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon,$$
3. stejně stejnoměrně klesá v nekonečnu, tj.
$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists R > 0 \, \forall f \in A : \|f\|_{L^p(\Omega \setminus B_R(0))} \leq \varepsilon.$$

Proof. **Krok 1:** Důkaz implikace „ $\implies$ “
Krok 1a: stejná omezenost
Je zřejmá z definice totální omezenosti (proveďte podrobně).

Krok 1b: stejná spojitost v průměru v p-té mocnině
Nechť $\{f_i\}_{i=1}^N$ je $\frac{\varepsilon}{3}$–síť v A. Zřejmě platí, že síť $\{f_i\}_{i=1}^N$ je stejně spojitá v průměru v p-té mocnině (síť tvoří konečně mnoho funkcí z $L^p(\Omega)$ a pro každou z nich platí Věta A.3.25). Pak

$$\|r_h f - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|r_h f - r_h f_i\|_{L^p(\Omega)} + \|r_h f_i - f_i\|_{L^p(\Omega)} + \|f_i - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$$

pro vhodně zvolené $i \in \{1, \ldots, N\}$ z vlastností sítě (neboť máme $\|f_i - f\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3}$, $\|r_h f_i - r_h f\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3}$) a vhodně zvolené h (neboť ze stejné spojitosti v průměru v p-té mocnině sítě máme $\|r_h f_i - f_i\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3}$).

Krok 1c: stejnoměrné klesání v nekonečnu
Označme opět $\frac{\varepsilon}{2}$–síť v A pomocí $\{f_i\}_{i=1}^N$. Protože pro každé i je $f_i \subset L^p(\Omega)$ a funkcí f_i je konečně mnoho, platí

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists R > 0 \, \forall i \in \{1, \ldots, N\} : \ \|f_i\|_{L^p(\Omega \setminus B_R(0))} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak lze pro libovolné $\varepsilon > 0$ nalézt vhodné $i \in \{1, \ldots, N\}$ a $R > 0$ tak, že

$$\|f\|_{L^p(\Omega \setminus B_R(0))} \leq \|f - f_i\|_{L^p(\Omega \setminus B_R(0))} + \|f_i\|_{L^p(\Omega \setminus B_R(0))} \leq \varepsilon.$$

[1] Prostor $(L^\infty(\Omega))^\star$ je dobře definovaný, ale jeho charakterizace vysoce přesahuje rámec těchto skript.

Krok 2: Důkaz implikace „ $\Longleftarrow$ “
Myšlenka důkazu je následující. Nejdříve ukážeme, že stačí najít síť na nějaké omezené otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^d$ (připomeňme, že f je definována vně Ω nulou). Speciálně pak bude $\overline{M}$ kompaktní.

Funkce z A zhladíme a dostaneme množínu A_h spojitých funkcí na $\overline{M}$. Ukážeme, že tato množina splňuje požadavky na totální omezenost v $\mathcal{C}(\overline{M})$ podle Arzelà–Ascoliho věty A.2.5 a existuje tedy konečná síť na $A_h \subset \mathcal{C}(\overline{M})$.

V závěrečném kroku pak dokážeme, že funkce z A, jejichž zhlazení tvoří konečnou síť na $A_h \subset \mathcal{C}(\overline{M})$, už tvoří síť na $A \subset L^p(\Omega)$.

Krok 2a: stačí uvažovat omezené množiny
Skutečně, buď $\{f_i\}_{i=1}^N$ $\frac{\varepsilon}{2}$-síť na $L^p(\Omega \cap B_R(0))$ pro R vybrané tak, aby

$$\forall f \in A: \ \|f\|_{L^p(\Omega \setminus B_R(0))} \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

To je jistě možné, neboť předpokládáme stejné stejnoměrné klesání v nekonečnu. Nyní je snadné ukázat, že $\{f_i\}_{i=1}^N$ je ε-síť na $L^p(\Omega)$, neboť pro každé $f \in A$:

$$\|f - f_i\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f - f_i\|_{L^p(\Omega \cap B_R(0))} + \|f\|_{L^p(\Omega \setminus B_R(0))} + \|f_i\|_{L^p(\Omega \setminus B_R(0))} < \varepsilon$$

pro vhodně vybrané $i \in \{1, \dots, N\}$.

Bez újmy na obecnosti proto můžeme v dalším předpokládat, že Ω je omezená množina.

Krok 2b: zhlazení, použití Arzelà–Ascoliho věty
Označme $A_h = \{f_h |\ f \in A\}$, kde $f_h = f \star \eta_h$ je zhlazení funkce f na $\mathbb{R}^d$. Pak je $A_h \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Navíc je A_h totálně omezená v $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, neboť jsou splněny požadavky z Věty A.2.5, a sice stejná omezenost

$$|f_h(x)| \leq \left| \int_\Omega \eta_h(x-y) f(y) \,\mathrm{d}y \right| \leq C(h) \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C(h)$$

a stejnoměrná spojitost

$$\begin{aligned}
|f_h(x+z) - f_h(x)| &\leq \int_\Omega \left| \frac{1}{h^d} \left(\eta\left(\frac{x+z-y}{h} \right) - \eta\left(\frac{x-y}{h} \right) \right) f(y) \right| \mathrm{d}y \\
&\leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \frac{1}{h^d} \left(\int_\Omega \left| \left(\eta\left(\frac{x+z-y}{h} \right) - \eta\left(\frac{x-y}{h} \right) \right) \right|^{p'} \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq C(h)|z| \, \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C(h)|z|.
\end{aligned}$$

K číslu $\varepsilon > 0$ tudíž existuje konečná $\frac{\varepsilon}{2|\Omega|^{\frac{1}{p}}}$-síť množiny A_h v $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Označme $(f_i)_h$, $i = 1, \dots, N$, prvky této sítě. Pro libovolné $f_h \in A_h$ tedy existuje $j \in \{1, \dots, N\}$ tak, že

$$\|f_h - (f_j)_h\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} < \frac{\varepsilon}{2|\Omega|^{\frac{1}{p}}}. \tag{A.13}$$

Krok 2c: síť množiny A v $L^p(\Omega)$
Ukážeme, že $\{f_i\}_{i=1}^N$, kde f_i jsou nezhlazené funkce odpovídající $(f_i)_h$ ze sítě A_h v $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, tvoří ε–síť v A v $L^p(\Omega)$.

Zvolme $\delta > 0$ tak, že

$$\forall f \in A, \forall z \in \mathbb{R}^d, |z| < \delta: \ \left(\int_\Omega |f(x+z) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{4} \frac{1}{\widetilde{C}}, \tag{A.14}$$

kde $\widetilde{C}$ je konstanta, kterou upřesníme později. Existence $\delta > 0$ zajišťujícího splnění výše uvedené nerovnosti je zřejmá z požadavku na stejnou spojitost v průměru v p-té mocnině pro množinu A.

Potom

$$\|f_j - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_j - (f_j)_h\|_{L^p(\Omega)} + \|(f_j)_h - f_h\|_{L^p(\Omega)} + \|f_h - f\|_{L^p(\Omega)}.$$

První člen na pravé straně je menší než $\frac{\varepsilon}{2}$, neboť použitím Hölderovy nerovnosti, Fubiniho věty a vlastností η dostáváme

$$\begin{aligned}
\|f_j - (f_j)_h\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\int_\Omega \left| \int_{B_h(x)} (f_j(x) - f_j(y)) \, \eta_h(x-y) \,\mathrm{d}y \right|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_\Omega \left| \int_{B_1(0)} (f_j(x) - f_j(x+hz)) \, \eta(z) \,\mathrm{d}z \right|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C(\eta) \left(\int_{B_1(0)} \int_\Omega |f_j(x+hz) - f_j(x)|^p \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{4},
\end{aligned}$$

což plyne z (A.14), kde jsme zvolili $\widetilde{C} = C(\eta)|B_1(0)|^{\frac{1}{p}}$. Obdobně odhadneme i poslední člen na pravé straně. Konečně druhý člen na pravé straně je menší než $\frac{\varepsilon}{2}$, což plyne z (A.13). Celkem

$$\|f_j - f\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon,$$

a $\{f_i\}_{i=1}^N$ je proto η-síť v A v $L^p(\Omega)$.

■

A.3.8 Němytského operátor a slabá zdola polospojitost

V této závěrečné části připomeneme dva výsledky, které jsou základem pro vybudování teorie nelineárních PDR. Tyto výsledky uvedeme i s důkazy, protože nejsou standardní součástí základních kurzů z teorie míry a integrálu. Budeme se zajímat o chování složené fukce $f(x, u(x))$. Jsou-li f a u pouze měřitelné funkce svých proměnných, nemusí být složená funkce $f(x, u(x))$ měřitelná. V následující definici uvedeme postačující podmínku pro měřitelnost takového zobrazení.

Definice A.3.40 — Carathéodoryho zobrazení. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $N \in \mathbb{N}$. řekneme, že zobrazení $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je Carathéodoryho zobrazení právě tehdy, když platí

1. pro skoro všechna $x \in \Omega$ je zobrazení $f(x, \cdot) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ spojité,
2. pro všechna $y \in \mathbb{R}^N$ je zobrazení $f(\cdot, y) : \Omega \to \mathbb{R}$ měřitelné.

Nyní už můžeme zavést základní pojem potřebný pro teorii nelineárních PDR.

Věta A.3.41 — Němytského operátor. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ Carathéodoryho zobrazení. Pro $u = (u_1, \ldots, u_N) : \Omega \to \mathbb{R}^N$ definujme Němytského operátor

$$[\mathcal{N}(u)](x) := f(x, u(x)).$$

Potom platí, že pokud u je měřitelné zobrazení, pak i $\mathcal{N}(u)$ je měřitelné.

Navíc, nechť pro $i = 1, \ldots, N$ existují $p_i \in [1, \infty)$, $p \in [1, \infty)$, $g \in L^p(\Omega)$ a konstanta $C \geq 0$ tak, že pro skoro všechna $x \in \Omega$ a všechna $y := (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ platí

$$|f(x, y)| \leq g(x) + C \sum_{i=1}^N |y_i|^{\frac{p_i}{p}}. \tag{A.15}$$

Potom $\mathcal{N}$: $u \mapsto \mathcal{N}(u)$ je spojitý operátor z $L^{p_1}(\Omega) \times \cdots \times L^{p_N}(\Omega)$ do $L^p(\Omega)$.

Proof. **Krok 1:** měřitelnost
Protože u je měřitelná, existuje posloupnost jednoduchých funkcí $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ taková, že $u_n \to u$ skoro všude na Ω. Definujme funkce $f_n(x) := f(x, u_n(x))$. Pak $f_n \to \mathcal{N}(u)$ skoro všude na Ω díky vlastnosti 2 pro Carathéodoryho zobrazení f. Navíc f_n jsou měřitelné, jak snadno nahlédneme aplikací vlastnosti 1 z Definice A.3.40 na jednotlivých úrovňových množinách funkcí u_n. Konečně tedy máme, že $\mathcal{N}(u)$ je měřitelné.

Krok 2: omezenost
Pokud $u \in L^{p_1}(\Omega) \times \cdots \times L^{p_N}(\Omega)$, pak konečnost $\|\mathcal{N}(u)\|_{L^p(\Omega)}$ plyne z Minkowského nerovnosti a růstové podmínky (A.15), neboť

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}(u)\|_{L^p(\Omega)} &\leq \left\| |g| + C \sum_{i=1}^N |u_i|^{\frac{p_i}{p}} \right\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|g\|_{L^p(\Omega)} + C \sum_{i=1}^N \|u_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{\frac{p_i}{p}} < \infty. \end{aligned} \tag{A.16}$$

Zároveň vidíme, že $\mathcal{N}$ zobrazuje omezené množiny v $L^{p_1}(\Omega) \times \cdots \times L^{p_N}(\Omega)$ na omezené množiny v $L^p(\Omega)$.

Krok 3: spojitost
Zbývá dokázat spojitost zobrazení $\mathcal{N}$. Nechť $u^n \to u$ v $L^{p_1}(\Omega) \times \cdots \times L^{p_N}(\Omega)$. Přechodem k podposloupnosti můžeme zajistit, že $u^n \to u$ skoro všude v Ω a

$$\|u_i^n - u_i\|_{L^{p_i}(\Omega)} \leq 2^{-n} \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \text{ a } i \in \{1, \ldots, N\}.$$

Pak funkce

$$v_i := |u_i| + \sum_{n=1}^\infty |u_i^n - u_i| \qquad i \in \{1, \ldots, N\}$$

jsou $L^{p_i}(\Omega)$-majoranty jednotlivých složek vektorových funkcí z posloupnosti $\{u^n\}$. Z předpokladu (A.15) a odhadu (A.16) vidíme, že funkce

$$|g| + L\sum_{i=1}^{N}|v_i|^{\frac{p_i}{p}} \in L^p(\Omega)$$

je majorantou posloupnosti $\{f(\cdot, u^n)\}$. Dále pak díky (A.16)

$$\begin{aligned}|f(x,u^n(x)) - f(x,u(x))|^p &\le 2^p|f(x,u^n(x))|^p + 2^p|f(x,u(x))|^p \\ &\le 2^p\left(g + L\sum_{i=1}^{N}|v_i|^{\frac{p_i}{p}}\right)^p + 2^p|f(x,u(x))|^p \in L^1(\Omega),\end{aligned}$$

neboli jsme našli integrovatelnou majorantu. Vzhledem k tomu, že $f(x,u^n(x)) \to f(x,u(x))$ pro skoro všechna $x \in \Omega$ (z konvergence $u^n \to u$ skoro všude a spojitosti f v druhé proměnné), můžeme použít Lebesgueovu větu o majorizované konvergenci (Věta A.3.3) a dostáváme

$$\int_\Omega |f(x,u^n(x)) - f(x,u(x))|^p \,\mathrm{d}x \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Snadno se dokáže sporem, že výsledek platí pro celou posloupnost. ■

Nakonec formulujeme poslední klíčovou vlastnost Carathéodoryho zobrazení, která jsou navíc konvexní v poslední proměnné.

Věta A.3.42 — Slabá zdola polospojitost. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f : \Omega \times (\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M) \to \mathbb{R}$ Carathéodoryho zobrazení. Navíc předpokládejme, že

1. f je zdola omezená integrovatelnou minorantou, tj. existuje $g \in L^1(\Omega)$ tak, že pro všechna $(u,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ a skoro všechna $x \in \Omega$ platí
$$f(x,u,v) \ge -g,$$
2. f je konvexní v posledních proměnných, tj. pro všechna $u \in \mathbb{R}^N$, všechna $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^M$, každé $\alpha \in [0,1]$ a skoro všechna $x \in \Omega$ platí
$$f(x,u,\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2) \le \alpha f(x,u,v_1) + (1-\alpha)f(x,u,v_2).$$

Potom pro každou posloupnost $\{u^n\}_{n=1}^\infty = \{u_1^n, \dots, u_N^n\}_{n=1}^\infty$ splňující pro každé $i = 1, \dots, N$

$$u_i^n \to u_i \quad \text{silně v } L^1(\Omega) \tag{A.17}$$

a každou posloupnost $\{v^n\}_{n=1}^\infty = \{v_1^n, \dots, v_M^n\}_{n=1}^\infty$ splňující pro každé $i = 1, \dots, M$

$$v_i^n \rightharpoonup v_i \quad \text{slabě v } L^1(\Omega) \tag{A.18}$$

platí

$$\int_\Omega f(x,u(x),v(x))\,\mathrm{d}x \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f(x,u^n(x),v^n(x))\,\mathrm{d}x. \tag{A.19}$$

Proof. Nechť platí (A.17)–(A.18). Označme

$$L := \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f(x,u^n(x),v^n(x))\,\mathrm{d}x.$$

Přechodem k podposloupnosti můžeme docílit toho, že

$$\begin{aligned}&\int_\Omega f(x,u^n(x),v^n(x))\,\mathrm{d}x \to L,\\ &u_i^n \to u_i \text{ v } L^1(\Omega) \qquad \forall i = 1,\dots,N,\\ &u_i^n \to u_i \text{ skoro všude v } \Omega \quad \forall i = 1,\dots,N.\end{aligned}$$

V dalším budeme tedy uvažovat pouze tuto podposloupnost. Navíc, protože $g \in L^1(\Omega)$, případným přechodem k funkci $f(x,u,v) + g(x)$ můžeme docílit toho, že f je nezáporná Carathéodoryho funkce, která je konvexní v poslední proměnné. V dalším tedy budeme navíc předpokládat, že f je nezáporná.

Krok 1: Myšlenka důkazu
Předpokládejme na moment, že funkce f nezávisí na druhé proměnné, tedy že $f(x,u,v) = f(x,v)$. Stěžejní myšlenkou důkazu je použití Mazurovy věty (Věta B.2.13). Díky ní a (A.18) můžeme najít posloupnosti $\{w^n\}_{n=1}^\infty \subset L^1(\Omega)$ a $\{k^n\}_{n=1}^\infty$ a čísla $a_k^n \in [0,1]$ tak, že

$$k^n \ge n, \quad w^n := \sum_{k=n}^{k^n} a_k^n v^k, \quad \sum_{k=n}^{k^n} a_k^n = 1$$

a
$$\forall i = 1, \dots, M : \; w_i^n \to v_i \text{ silně v } L^1(\Omega).$$

Nakonec díky konvexitě f v poslední proměnné získáme

$$\int_\Omega f(x, w^n(x))\,\mathrm{d}x \le \sum_{k=n}^{k^n} a_k^n \int_\Omega f(x, v^k(x))\,\mathrm{d}x \le \sup_{k\ge n} \int_\Omega f(x, v^k(x))\,\mathrm{d}x$$

a limitním přechodem $n \to \infty$, kde na levé straně použijeme bodovou konvergenci (pro vhodnou podposloupnost), nezápornost f a Fatouovo lemma (Věta A.3.5),

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x, v(x))\,\mathrm{d}x &\le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f(x, w^n(x))\,\mathrm{d}x \le \liminf_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} \int_\Omega f(x, v^k(x))\,\mathrm{d}x \\ &\le \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega f(x, v^n(x))\,\mathrm{d}x = L,\end{aligned}$$

což je přesně nerovnost (A.19). Zbývá tedy vyřešit případ, kdy f závisí i na u^n.

Krok 2: „ε–porucha“ díky závislosti na u^n

Buď $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ libovolná omezená měřitelná množina a $\varepsilon > 0$ libovolné. Definujme

$$\widetilde{\Omega}_{\varepsilon,n} = \{x \in \widetilde{\Omega} \colon |f(x, u^n(x), v^n(x)) - f(x, u(x), v^n(x))| \ge \varepsilon\}.$$

Ukážeme, že
$$|\widetilde{\Omega}_{\varepsilon,n}| \overset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{A.20}$$

Pro spor předpokládejme, že (A.20) neplatí. Přechodem k podposloupnosti a případným zmenšením čísla $\varepsilon > 0$ dostáváme
$$|\widetilde{\Omega}_{\varepsilon,n}| \ge 4\varepsilon \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}. \tag{A.21}$$

Díky (A.18) existuje $C_1 > 0$ takové, že $\|v^n\|_{L^1(\Omega)} \le C_1$. Položíme-li $C_\varepsilon := \frac{C_1}{\varepsilon}$ a definujeme-li

$$\widetilde{\Omega}_n^v := \{x \in \widetilde{\Omega} \colon |v^n(x)| \ge C_\varepsilon\},$$

pak máme pro všechna $n \in \mathbb{N}$ odhad
$$|\widetilde{\Omega}_n^v| \le \frac{1}{C_\varepsilon} \int_{\widetilde{\Omega}} |v^n(x)|\,\mathrm{d}x \le \frac{C_1}{C_\varepsilon} = \varepsilon. \tag{A.22}$$

Použitím Jegorovovy věty (Věta A.3.6), můžeme najít množinu $\widetilde{\Omega}^u$ takovou, že $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega \setminus \widetilde{\Omega}^u})$ a

$$\begin{aligned} &|\widetilde{\Omega}^u| \le \varepsilon, \\ &\;u^n \to u \text{ stejnoměrně na } \widetilde{\Omega} \setminus \widetilde{\Omega}^u. \end{aligned} \tag{A.23}$$

Můžeme tedy najít $C_2 > 0$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $\|u^n\|_{L^\infty(\widetilde{\Omega}\setminus\widetilde{\Omega}^u)} \le C_2$. Konečně díky Luzinově větě (Věta A.3.1) a faktu, že f je Carathéodoryho funkce, můžeme nalézt $\widetilde{\Omega}^f$ tak, že

$$|\widetilde{\Omega}^f| \le \varepsilon, \quad f \text{ je stejnoměrně spojitá na } (\widetilde{\Omega} \setminus \widetilde{\Omega}^f) \times B_{C_2}(0) \times B_{C_1}(0). \tag{A.24}$$

Kombinací (A.21)–(A.24) není těžké nahlédnout

$$|\widetilde{\Omega}_{\varepsilon,n} \setminus (\widetilde{\Omega}^f \cup \widetilde{\Omega}^u \cap \widetilde{\Omega}_n^v)| \ge \varepsilon \quad \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}. \tag{A.25}$$

Konečně použitím stejnoměrné konvergence (A.23) a stejnoměrné spojitosti (A.24) máme

$$\|f(\cdot, u^n, v^n) - f(\cdot, u, v^n)\|_{L^\infty(\widetilde{\Omega}\setminus(\widetilde{\Omega}^f \cup \widetilde{\Omega}^u \cap \widetilde{\Omega}_n^v))} \overset{n\to\infty}{\to} 0,$$

což s použitím definice $\widetilde{\Omega}_{\varepsilon,n}$ vede ke sporu s (A.25). Tím je (A.20) dokázáno.

Krok 3: Dokončení důkazu

Díky (A.20) můžeme vybrat podposloupnost, a po opětovném přečíslování můžeme předpokládat, že $|\widetilde{\Omega}_{\varepsilon,n}| < 2^{-n}\varepsilon$. Položme $\widetilde{\Omega}_\varepsilon := \bigcup_{n=1}^\infty \widetilde{\Omega}_{\varepsilon,n}$. Pak máme $|\widetilde{\Omega}_\varepsilon| < \varepsilon$ a pro všechna $x \in \widetilde{\Omega} \setminus \Omega_\varepsilon$ a všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|f(x, u^n(x), v^n(x)) - f(x, u(x), v^n(x))| < \varepsilon. \tag{A.26}$$

Nyní budeme postupovat podobně jako v Kroku 1. Nejdříve stejným způsobem najdeme posloupnost $\{w^n\}_{n=1}^{\infty}$ a použitím konvexity f v poslední proměnné získáme bodový odhad

$$\begin{aligned} f(x,u(x),w^n(x)) &\le \sum_{k=n}^{k^n} a_k^n f(x,u(x),v^k(x)) \\ &\le \sum_{k=n}^{k^n} a_k^n |f(x,u(x),v^k(x)) - f(x,u^k(x),v^k(x))| \\ &\quad + \sum_{k=n}^{k^n} a_k^n f(x,u^k(x),v^k(x)). \end{aligned}$$

Integrací přes $\widetilde{\Omega}\setminus\Omega_\varepsilon$ a využitím (A.26) spolu s $\sum_{k=n}^{k^n} a_k^n = 1$ získáme

$$\begin{aligned} \int_{\widetilde{\Omega}\setminus\Omega_\varepsilon} f(x,u(x),w^n(x))\,\mathrm{d}x &\le \varepsilon|\widetilde{\Omega}\setminus\Omega_\varepsilon| + \int_{\widetilde{\Omega}\setminus\Omega_\varepsilon} \sum_{k=n}^{k^n} a_k^n f(x,u^k(x),v^k(x))\,\mathrm{d}x \\ &\le \varepsilon|\widetilde{\Omega}| + \sup_{k\ge n} \int_{\Omega} f(x,u^k(x),v^k(x))\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Nyní můžeme stejně jako v kroku 1 přejít k limitě na pravé straně a na levé straně použít Fatouovo lemma (Věta A.3.5)

$$\int_{\widetilde{\Omega}\setminus\Omega_\varepsilon} f(x,u(x),v(x))\,\mathrm{d}x \le \varepsilon|\widetilde{\Omega}| + L.$$

Nyní přejdeme s $\varepsilon \to 0_+$. Na pravé straně využijeme omezenost $\widetilde{\Omega}$ a na levé straně Leviho větu (Věta A.3.2), tedy (připomeňme $|\widetilde{\Omega}_\varepsilon| \le \varepsilon$)

$$\int_{\widetilde{\Omega}} f(x,u(x),v(x))\,\mathrm{d}x \le L.$$

Konečně buď $\widetilde{\Omega}^n \subset \Omega$ posloupnost omezených množin splňující $\widetilde{\Omega}^n \nearrow \Omega$, potom limitním přechodem ve výše uvedené nerovnosti (použitím Leviho věty, tedy Věty A.3.2) dostaneme (A.19). ■

Příloha B

Některé poznatky z funkcionální analýzy

Níže uvedené výsledky shrnují ten ty nejdůležitější výsledky, které v těchto skriptech potřebujeme. Další detaily je možno nalézt například v Lukeš [1998], Edwards [1995] či Dunford and Schwartz [1988].

B.1 Banachovy a Hilbertovy prostory

Definice B.1.1 — Norma, normovaný prostor. Zobrazení $x \mapsto \|x\|$, kde x patří do nějakého reálného (komplexního) vektorového prostoru V, se nazývá norma, jestliže

- $\|x\|_V \geq 0$ pro všechna $x \in V$, přičemž $\|x\|_V = 0$ právě tehdy, když $x = 0$
- $\|\lambda x\|_V = |\lambda| \|x\|_V$ pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) a všechna $x \in V$
- $\|x + y\|_V \leq \|x\|_V + \|y\|_V$ pro všechna x a $y \in V$.

Vektorový prostor V, na kterém je definována norma, se nazývá normovaný vektorový prostor.

Definice B.1.2 — Skalární součin, unitární prostor. Zobrazení $(x, y) \mapsto (x, y)_V$, kde x, y patří do nějakého reálného (komplexního) vektorového prostoru V, se nazývá skalární součin, jestliže

- $(x, x)_V \geq 0$ pro všechna $x \in V$, přičemž $(x, x)_V = 0$ právě tehdy, když $x = 0$
- $(x, y)_V = \overline{(y, x)_V}$ pro všechna x, $y \in V$
- $(\lambda x, y)_V = \lambda (x, y)_V$ pro všechna x, $y \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$).

Vektorový prostor se skalárním součinem se nazývá unitární prostor.

Definice B.1.3 — Silná konvergence, neboli konvergence v normě. Říkáme, že posloupnost $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ prvků normovaného vektorového prostoru V konverguje silně (tedy v normě) k prvku $v \in V$, jestliže

$$\lim_{n \to \infty} \|v_n - v\|_V = 0.$$

Definice B.1.4 — Cauchyovská posloupnost. Říkáme, že posloupnost $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ prvků vektorového prostoru V je cauchyovská, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé m, $n \geq n_0$ platí

$$\|v_n - v_m\|_V < \varepsilon.$$

Zatímco každá silně konvergetní posloupnost je nutně cauchyovská (což si čtenář zajisté sám ověří), opačná implikace není obecně pravda.

Definice B.1.5 — Úplné prostory, Banachovy a Hilbertovy prostory. Normovaný vektorový prostor V, který splňuje, že každá cauchyovská posloupnost jeho prvků má ve V silnou limitu, se nazývá úplný. Úplné normované prostory se nazývají Banachovy prostory, úplné unitární prostory (vůči normě indukované skalárním součinem) se nazývají Hilbertovy prostory.

Definice B.1.6 — Separabilní prostor. Normovaný lineární prostor V se nazývá separabilní, jestliže v něm existuje spočetná hustá podmnožina, tedy množina $M = \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ taková, že pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $v \in V$ existuje prvek $v_k \in M$ takový, že $\|v_k - v\|_V < \varepsilon$.

B.2 Duální prostory, slabá konvergence

Definice B.2.1 — Duální prostor. Množina všech spojitých lineárních funkcionálů nad Banachovým prostorem X se nazývá duálním prostorem a značí se X^*.

Duální prostor je opět Banachovým prostorem vzhledem k normě

$$\|L\|_{X^*} = \sup_{v\in X;\|v\|_X\le 1} \langle L, v\rangle_X,$$

viz [Lukeš, 1998, Věta 2.4]. Duální prostor k $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, lze ztotožnit s prostorem $L^{p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, duální prostor s $C(\overline{\Omega})$ s prostorem Radonových měr nad $\overline{\Omega}$. Pro případ, kdy je příslušný úplný normovaný prostor navíc prostorem se skalárním součinem, platí

Věta B.2.2 — Rieszova reprezentační věta. Nechť L je spojitý lineární funkcionál nad Hilbertovým prostorem H. Potom existuje právě jeden prvek $v \in H$ takový, že

$$\langle L, u\rangle_H = (v, u)_H.$$

Navíc, $\|L\|_{H^*} = \|v\|_H$.

Důkaz lze najít například v [Lukeš, 1998, Věta 2.9].

K duálnímu prostoru X^*, kde X je Banachův prostor, můžeme definovat jeho duální prostor X^{**} (druhý duál k X) a můžeme definovat kanonické zobrazení E: $X \to X^{**}$ předpisem

$$Eu = u^{**}, \quad \text{kde } \langle u^{**}, L\rangle_{X^*} = \langle L, u\rangle_X \qquad \text{pro všechna } L \in X^*.$$

Definice B.2.3 — Reflexivní prostor. Banachův prostor X se nazývá reflexivní, jestliže kanonické zobrazení splňuje $E(X) = X^{**}$.

Zatímco každý Hilbertův prostor je reflexivní, například na třídě Lebesgueových prostorů to platí jen pro $p \in (1, \infty)$. Následující výsledek je elementární.

Věta B.2.4 — Vlastnosti uzavřených podprostorů. Buď X Banachův prostor, Y jeho uzavřený podprostor. Pak platí:

- Je-li X separabilní, pak Y je separabilní.
- Je-li X reflexivní, pak Y je reflexivní.

Definice B.2.5 — Slabá a slabá hvězdička konvergence. Říkáme, že posloupnost $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v Banachově prostoru X konverguje slabě k prvku $v \in X$, značíme $v_n \rightharpoonup v$, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \langle L, v_n\rangle_X = \langle L, v\rangle_X$$

pro každé $L \in X^*$. Říkáme, že posloupnost $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ konverguje slabě* (slabě hvězdička) k prvku $L \in X^*$, značíme $L_n \overset{*}{\rightharpoonup} L$, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \langle L_n, v\rangle_X = \langle L, v\rangle_X$$

pro každé $v \in X$.

Věta B.2.6 — Alaogluova–Bourbakiova–Banachova. Buď X Banachův prostor. Pokud existuje separabilní Y takové, že $Y^\star = X$, pak lze z každé omezené posloupnosti ve X vybrat slabě hvězdička konvergentní podposloupnost.

Důkaz lze najít například v [Lukeš, 1998, Věta 16.6].

Věta B.2.7 — Eberleinova–Smulyanovova. Nechť X je Banachův prostor. Následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

- z každé omezené posloupnosti v $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost

- X je reflexivní.

Důkaz lze najít například v [Lukeš, 1998, Věta 16.9].

Definice B.2.8 — ε–síť. Buď X Banachův prostor. Řekneme, že neprázdná množina $A \subset X$ je ε-síť v X, právě tehdy, když systém otevřených koulí $\{B_\varepsilon(x)|\ x \in A\}$ pokrývá X.

Definice B.2.9 — Totálně omezená množina. Řekneme, že neprázdná množina $M \subset X$, X Banachův prostor, je totálně omezená, právě když pro každé ε existuje konečná ε-síť, tj.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \exists \{m_i\}_{i=1}^N \subset M \text{ tak, že } \cup_{i=1}^N \text{ tvoří } \varepsilon\text{-síť.}$$

Věta B.2.10 — Vztah relativně kompaktních a totálně omezených množin. Nechť X je Banachův prostor. Potom je její podmnožina Y relativně kompaktní (tj. její uzávěr je kompaktní množina) právě tehdy, když je Y totálně omezená.

Důkaz lze najít například v [Lukeš, 1998, Odstavec 24.4].

Definice B.2.11 — Spojité vnoření. Buď X, Y Banachovy prostory. Řekneme, že X je spojitě vnořen do Y (značíme $X \hookrightarrow Y$) právě tehdy, když

1. $X \subset Y$
2. identita, jakožto zobrazení $X \to Y$, je spojité zobrazení
   $\exists C > 0, \forall x \in X\colon\ \|x\|_Y \le C\,\|x\|_X$.

Definice B.2.12 — Kompaktní vnoření. Buď X, Y Banachovy prostory. Řekneme, že X je kompaktně vnořen do Y (značíme $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$) právě tehdy, když

1. $X \hookrightarrow Y$
2. identita, jakožto zobrazení $X \to Y$, je kompaktní zobrazení (každá omezená podmnožina $B \subset X$ je v Y totálně omezená).

Věta B.2.13 — Mazurova věta. Nechť X je Banachův prostor a $u_n \rightharpoonup u$ v X. Pak existují posloupnost $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$, $k_n \ge n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a čísla $a_n^k \ge 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{n, \ldots, k_n\}$, taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=n}^{k_n} a_n^k = 1 \qquad \text{a} \qquad v_n := \sum_{k=n}^{k_n} a_n^k u_k \to u \text{ silně v } X.$$

Důkaz lze najít například v Brezis [1993].

B.3 Spektrum operátorů v Hilbertových prostorech, Fredholmova alternativa

Uvažujme zobrazení (operátor) A: $H \to H$, kde H je reálný Hilbertův prostor. Budeme uvažovat pouze lineární operátory, tedy

$$A(\lambda u + \mu v) = \lambda A(u) + \mu A(v)$$

pro libovolné u, $v \in D(A)$ (definiční obor A) a libovolné λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Navíc předpokládejme, že A je omezený (a tedy spojitý), tj. existuje $C > 0$ takové, že

$$\|A(u)\|_H \le C\|u\|_H$$

pro všechna $u \in D(A)$.

Definice B.3.1 — Rezolventa, spektrum. Nechť A: $H \to H$ je omezený lineární operátor. Potom rezolventou A, značíme $\rho(A)$, nazýváme množinu všech $\eta \in \mathbb{R}$ takových, že $A - \eta I$, kde I: $H \to H$ je identita, je prosté a na. Spektrum operátoru A je množina $\sigma(A) = \mathbb{R} \setminus \rho(A)$.

Definice B.3.2 — Vlastní hodnota, vlastní funkce, bodové spektrum. Nechť A: $H \to H$ je omezený lineární operátor. Číslo $\lambda \in \sigma(A)$ nazveme vlastním číslem operátoru A, jestliže jádro operátoru $A - \lambda I$ není triviální (tedy existuje netriviální $x_\lambda \in H$ takové, že $A(x_\lambda) = \lambda x_\lambda$. Takové X_λ nazýváme vlastní funkcí operátoru A. Sjednocení všech vlastních čísel operátor A se nazývá bodové spektrum operátor A, značíme ho $\sigma_p(A)$.

Definice B.3.3 — Kompaktní operátor. Nechť A: $H \to H$ je operátor. Tento operátor se nazývá kompaktní, jestliže zobrazuje omezené množiny na množiny relativně kompaktní.

Kompaktní operátor tedy zobrazuje omezené posloupnosti v H na relativně komapktní, tedy takové, že z nich lze vybrat konvergentní podposloupnost. Je-li kompatní operátor navíc lineární, potom je také omezený (a tedy spojitý).

Definice B.3.4 — Adjungovaný operátor. Nechť A: $H \to H$ je lineární operátor. Adjungovaným operátorem A^*: $H \mapsto H$ nazvu takový operátor, který pro všechna u, $v \in H$ splňuje

$$(Au, v)_H = (u, A * v)_H.$$

Věta B.3.5 — Kompaktnost adjungovaného operátoru. Nechť lineární operátor A: $H \to H$ je kompaktní. Potom je kompaktní též k němu adjungovaný operátor A^*: $H \to H$.

Důkaz lze najít například v [Evans, 1998, Appendix D].

Definice B.3.6 — Samoadjungovaný operátor. Operátor A: $H \to H$ nazýváme samoadjungovaný, jestliže $A = A^*$.

Věta B.3.7 — Fredholmova alternativa. Nechť H je Hilbertův prostor a $K\colon H \mapsto H$ je kompaktní lineární operátor. Pak platí

(i) $N(I - K)$ je konečnědimenzionální

(ii) $R(I - K)$ je uzavřený

(iii) $R(I - K) = N(I - K^*)^\perp$

(iv) $N(I - K) = \{0\} \Leftrightarrow R(I - K) = H$

(v) $\dim N(I - K) = \dim N(I - K^*)$

(vi) Spektrum K je nejvýše spočetné a obsahuje 0. Pokud je spektrum nekonečné, pak 0 je jediný hromadný bod.

Důkaz lze najít například v [Evans, 1998, Appendix D].

Věta B.3.8 — Spektrum kompaktního operátoru. Nechť $\dim H = \infty$, A: $H \to H$ je lineární kompaktní operátor. Potom

- $0 \in \sigma(A)$
- $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$
- Buď je $\sigma(A) \setminus \{0\}$ konečná množina, nebo $\sigma(A) \setminus \{0\}$ je posloupnost s limitou rovnou 0.

Důkaz lze najít například v [Evans, 1998, Appendix D].

Věta B.3.9 — Odhad na spektrum. Nechť A: $H \to H$ je lineární, omezený, samoadjungovaný operátor. Označme

$$m = \inf_{u \in H; \|u\|_H = 1} (Au, u)_H, \qquad M = \sup_{u \in H; \|u\|_H = 1} (Au, u)_H.$$

Potom $\sigma(A) \subset [m, M]$ a m, $M \in \sigma(A)$.

Důkaz lze najít například v [Evans, 1998, Appendix D].

Věta B.3.10 — Spektrum kompaktního samoajungovaného operátoru. Nechť A: $H \to H$ je lineární, kompaktní, samoadjungovaný operátor, H je separabilní. Potom existuje spočetná ortonormální báze H tvořená vlastními funkcemi operátoru A.

Důkaz lze najít například v [Evans, 1998, Appendix D].

Literatura

Hajer Bahouri, Jean-Yves Chemin, and Raphäel Danchin. *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Oxford University Press, Heidelberg, 2011.

Yoav Benyamini and Joram Lindenstrauss. *Geometric Nonlinear Functional Analysis*. AMS Colloquium Publications. AMS, 2000. Volume 48.

Haïm Brezis. *Analyse fonctionelle*. Masson, Paris, 1993.

Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz. *Linear operators. Part I*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988. ISBN 0-471-60848-3. General theory, With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1958 original, A Wiley-Interscience Publication.

Robert E. Edwards. *Functional Analysis: Theory and Applications*. Dover, New York, 1995.

Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, 1998.

Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press LLC, Boca Raton, 1992.

Eduard Feireisl. *Dynamics of Viscous Compressible Fluids*. Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications. Springer Verlag, New York, 2004.

Alois Kufner and Bohumír Opic. *Hardy-Type Inequalities*. Pitman Research Notes in Mathematics Series. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1990.

Alois Kufner, Oldřich John, and Svatopluk Fučík. *Function spaces*. Academia, Praha, 1977.

Jaroslav Lukeš. *Zápisky z funkcionální analýzy*. Karolinum, Praha, 1998.

Jaroslav Lukeš and Jan Malý. *Measure and Integral*. Matfyzpress, Praha, 1995.

Vladimir G. Mazja. *Sobolev spaces*. Springer Verlag, Berlin, 1985.

Jindřich Nečas. O oblastech typu n. *Czech Mathematical Journal*, 12(87):274–287, 1962.

Jindřich Nečas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Academia, Prague, 1967.

Elias M. Stein. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, volume 43 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. ISBN 0-691-03216-5. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.

Roger Temam. *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*. American Mathematical Society, Providence, 2001.

Kosaku Yosida. *Functional Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 6th edition, 1980.

Alexander Ženíšek. *Sobolevovy prostory*. VUTIUM, Brno, 2001.