MA2B LS 2010-2011 – 1. ZÁPOČTOVÁ PÍSEMKA

LUBOŠ PICK

Verze 1

1. Rozhodněte, zda vztah
$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \operatorname{arccotg}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\pi}{2}$$
definuje na okolí bodu $[x, y] = [1, 1] \in \mathbb{R}^2$ diferencovatelnou funkci y proměnné x, splňující $y(1) = 1$. Pokud ano, spočtěte $y'(1)$.
2. Určete všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice
$$y' = x\sqrt{y},$$
splňující podmínku $y(1) = 1$ a jejich definiční obory.
3. Určete bodovou limitu posloupnosti funkcí
$$f_n(x) := ne^{\frac{1}{nx}} - n$$
na maximálním možném definičním oboru a rozhodněte, zda je tato konvergence stejnoměrná. Lokálně stejnoměrnou konvergencí se nezabývejte.

Verze 2

1. Rozhodněte, zda vztah
$$\log\left(\frac{x+y}{x-y}\right) + \sqrt{x+y} = \sqrt{2}$$
definuje na okolí bodu $[x, y] = [2, 0] \in \mathbb{R}^2$ diferencovatelnou funkci y proměnné x, splňující $y(2) = 0$. Pokud ano, spočtěte $y'(2)$.
2. Určete všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice
$$y' = \frac{\sqrt{4y}}{x},$$
splňující podmínku $y(-e) = 4$ a jejich definiční obory.
3. Určete bodovou limitu posloupnosti funkcí
$$f_n(x) := n \sin\left(\frac{\sqrt{x}}{n}\right)$$
na maximálním možném definičním oboru a rozhodněte, zda je tato konvergence stejnoměrná. Lokálně stejnoměrnou konvergencí se nezabývejte.

Verze 3

1. Rozhodněte, zda vztah
$$2^{y-x} + \cos(\sqrt{x}y) = \frac{9}{8}$$
definuje na okolí bodu $[x, y] = [3, 0] \in \mathbb{R}^2$ diferencovatelnou funkci y proměnné x, splňující $y(3) = 0$. Pokud ano, spočtěte $y'(3)$.
2. Určete všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice
$$y' = \frac{2\sqrt{y}}{x^2 + 1},$$
splňující podmínku $y(1) = \frac{\pi^2}{4}$ a jejich definiční obory.
3. Určete bodovou limitu posloupnosti funkcí
$$f_n(x) := n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$
na maximálním možném definičním oboru a rozhodněte, zda je tato konvergence stejnoměrná. Lokálně stejnoměrnou konvergencí se nezabývejte.

Verze 4

1. Rozhodněte, zda vztah
$$\sqrt{e^{xy} + y} + \arccos\left(\frac{x}{y}\right) = \sqrt{2} + \frac{\pi}{2}$$
definuje na okolí bodu $[x, y] = [0, 1] \in \mathbb{R}^2$ diferencovatelnou funkci y proměnné x, splňující $y(0) = 1$. Pokud ano, spočtěte $y'(0)$.
2. Určete všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice
$$y' = \sin(x)\sqrt{y},$$
splňující podmínku $y(0) = 1$ a jejich definiční obory.
3. Určete bodovou limitu posloupnosti funkcí
$$f_n(x) := n \operatorname{arccotg}(nx)$$
na maximálním možném definičním oboru a rozhodněte, zda je tato konvergence stejnoměrná. Lokálně stejnoměrnou konvergencí se nezabývejte.

Verze 5

1. Rozhodněte, zda vztah
$$\operatorname{tg}(x^y) + \operatorname{cotg}(y^x) = \operatorname{tg}(1) + \operatorname{cotg}(1)$$
definuje na okolí bodu $[x, y] = [1, 1] \in \mathbb{R}^2$ diferencovatelnou funkci y proměnné x, splňující $y(2) = 2$. Pokud ano, spočtěte $y'(2)$.
2. Určete všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice
$$y' = 2e^x \sqrt{y},$$
splňující podmínku $y(\log 3) = 4$ a jejich definiční obory.
3. Určete bodovou limitu posloupnosti funkcí
$$f_n(x) := \sqrt[n]{1 + x^n}$$
na intervalu $[0, \infty)$ a rozhodněte, zda je tato konvergence stejnoměrná. Lokálně stejnoměrnou konvergencí se nezabývejte.