MATEMATICKÁ ANALÝZA 1, NMMA101, ZIMNÍ SEMESTR 2016–2017 POPIS PŘEDMĚTU A INFORMACE K ZÁPOČTU A KE ZKOUŠCE

LUBOŠ PICK

Popis předmětu

Jde o první část čtyřsemestrálního základního kursu matematické analýzy. Věnuje se zejména základům diferenciálního počtu. Kurs se skládá z přednášek, cvičení a prosemináře a je hodnocen zápočtem a zkouškou.

Přednáška se koná pro větší množství (desítky až stovky) studentů najednou, přičemž přednášející u tabule vykládá především teoretické poznatky a ilustrativní příklady. Otázky v průběhu přednášky a diskuse po ní jsou vítány, jiná forma studentské aktivity (pobyt u tabule atd.) se nepředpokládá. Z látky přednášené na přednášce je potřeba složit zkoušku.

Cvičení se koná pro menší množství (15-25) studentů najednou, typicky pro jeden kroužek. Na cvičeních se počítají příklady určené k procvičení dané tématiky. S aktivní účastí studentů (někdy i u tabule) se počítá. Náplň a formu cvičení určuje cvičící. Z početních technik prováděných na cvičeních je potřeba složit zápočet.

Proseminář je určen pro malé množství (typicky 15-25) studentů, kteří mají zájem o získání hlubších teoretických poznatků z matematické analýzy nad rámec povinné látky. Na prosemináři často referují probíranou látku studenti. Proseminář je hodnocen zápočtem. Zápočet bývá typicky udělován za inteligentní referát.

Zápočet

Postačující podmínkou pro udělení zápočtu je 50% účast na cvičeních a dvě splněné zápočtové písemky.

Během zimního semestru budou uspořádány celkem tři zápočtové písemky, z toho dvě v průběhu cvičení a jedna opravná. Každá zápočtová písemka bude obsahovat tři příklady z oblastí matematické analýzy odpovídajících náplni prvního semestru. Čas k vypracování každé zápočtové písemky je 30 minut. Povoleny jsou pouze psací potřeby. Písemka je hodnocena jako *splněná*, pokud student správně vyřeší alespoň dva ze tří příkladů. V případě nesplnění zápočtových písemek je možné získat zápočet za domácí vypracování sedmi nebo patnácti příkladů (podle toho, zda studentovi chybí jedna nebo dvě splněné písemky). V těchto případech je nutná individuální domluva s cvičícím.

Zkouška

Písemná část. Pro písemnou část zkoušky bude vypsáno právě pět termínů, a to

- v úterý 17.01. 2017 v 08:30 v posluchárně K1,
- v úterý 24.01. 2017 v 08:30 v posluchárně K1,
- v pondělí 30.01. 2017 v 08:30 v posluchárně K1,
- v úterý 14.02. 2017 v 08:30 v posluchárně K1,
- **v pátek 17.03. 2017 ve 14:00 v posluchárně K1**.

Date: 17. února 2017.

Mimo vypsané termíny nebude možné vykonat písemnou část zkoušky. Jiné termíny nebudou vypsány.

K písemné části zkoušky se mohou elektronicky prostřednictvím systému SIS přihlásit studenti, kteří získali zápočet.

V posluchárně K1 bude v době konání písemné části zkoušky vyvěšen zasedací pořádek. Prosíme studenty, aby se dostavili nejpozději v 08:15 a zaujali svá místa podle zasedacího pořádku. Před začátkem písemné části zkoušky bude provedena kontrola totožnosti studentů. Každý student se musí prokázat nějakým platným dokladem s fotografií (index, OP, ŘP, pas a podobně).

Písemná část zkoušky bude obsahovat čtyři příklady z následujících partií matematické analýzy:

- výpočet limity posloupnosti (10 bodů),
- výpočet limity reálné funkce jedné reálné proměnné (10 bodů),
- vyšetření konvergence číselné řady (10 bodů),
- vyšetření průběhu reálné funkce jedné reálné proměnné (20 bodů).

Jestliže student získá z písemné části zkoušky 28 nebo více bodů, postoupí k ústní části zkoušky. Jestliže získá 27 nebo méně bodů, bude zkouška hodnocena známkou **neprospěl(a)**.

Čas k vypracování písemné části je 120 minut. Povoleny budou pouze běžné psací potřeby.

Bezprostředně po skončení písemné části (tedy přibližně v 10:35) bude na tabuli v posluchárně K1 předvedeno vzorové řešení. Účast na předvedení vzorového řešení je povolena i studentům, kteří ten den písemnou zkoušku neskládali.

Odevzdané písemky budou opraveny během odpoledne v den konání písemné části zkoušky. Výsledky budou zveřejněny na webové stránce přednášejícího. Studentům, kteří úspěšně složí písemnou část zkoušky, bude přidělen čas ústní části zkoušky, a to v den následující po písemce. **Ústní část zkoušky pro poslední termín se bude konat v pátek 31.03. od 14:00 v posluchárně K1**. Tento čas bude pro všechny studenty závazný, počítejte tedy s tím při plánování rozvrhu zkoušek. Podrobný rozvrh ústní části zkoušky bude též zveřejněn na webové stránce přednášejícího. Studenti, jejichž písemná část zkoušky bude hodnocena známkou neprospěl(a), se mohou dostavit následujícího dne v 08:00 do posluchárny K3, kde jim bude, pokud o to projeví zájem, hodnocení jejich písemné práce podrobně vysvětleno.

Ústní část. Ústní část zkoušky se bude konat vždy následující den po písemné části zkoušky od 08:00 v posluchárně K2.

Ústní část zkoušky bude obsahovat sedm otázek uspořádaných a přibližně hodnocených podle následujícího klíče:

- definice klíčového pojmu (0 bodů),
- formulace dvou vět a jedné definice (5+5+5 body),
- formulace a důkaz tří vět (celkem 35 bodů).

K úspěšnému složení ústní části je třeba napsat správně definici klíčového pojmu a získat minimálně 30 bodů. Uvedené body jsou ovšem pouze orientační a slouží jako pomůcka pro zkoušejícího, nelze na jejich základě vznášet žádné námitky proti výsledku zkoušky.

Po celou dobu ústní zkoušky platí, že student musí bezpečně ovládat veškeré klíčové pojmy, nejen ten, který si vylosuje. Prokáže-li se kdykoli během zkoušky, že student bezpečně neovládá kterýkoli z klíčových pojmů, bude zkouška hodnocena známkou neprospěl(a).

Bude-li zkouška po ústní části hodnocena známkou neprospěl(a), je student povinen znovu složit obě části zkoušky (tedy i písemnou).

Celkové hodnocení zkoušky

K celkovému hodnocení známkou **výborně** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a věty, znal důkazy všech vět a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti na více či méně jednoduchých teoretických příkladech. Orientačně známka "výborně" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 82–100.

K celkovému hodnocení známkou **velmi dobře** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a věty, znal důkazy lehčích vět a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti v jednoduchých teoretických příkladech. Může mít menší mezery v obtížnějších partiích. Orientačně známka "velmi dobře" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 70–81.

K celkovému hodnocení známkou **dobře** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a jednoduché věty a znal důkazy lehčích vět. Orientačně známka "dobře" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 58–69.

Hodnocení známkou **neprospěl(a)** bude uplatněno, jestliže se během zkoušky prokáže, že student nezná některý z klíčových pojmů, neovládá věty nebo definice nebo není schopen dokázat ani nejjednodušší tvrzení. Orientačně hodnocení "neprospěl(a)" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 0–57.

Vzorové zadání písemné části zkoušky

Příklad 1. *Spočtěte limitu posloupnosti*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right). \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2. *Vyšetřete konvergenci číselné řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(3+\frac{\log n}{n}\right)^n x^n$$

v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R},\ x \geq 0.$ (10 bodů)

Příklad 3. *Spočtěte limitu funkce*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x} + \cos x}{x^2}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 4. *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}; \\ 0, & x \in \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}. \end{cases} \qquad \text{(20 bodů)}$$

Vzor zadání ústní části zkoušky

Otázka 1. *Napište definici klíčového pojmu:* částečný součet řady, součet řady, člen řady, konvergentní řada, divergentní řada.

Otázka 2. *Napište definici pojmu:* hromadná hodnota posloupnosti.

Otázka 3. *Napište znění věty:* Archimédova vlastnost reálných čísel (Věta 1.8).

Otázka 4. *Napište znění věty:* Heineova věta (Věta 4.3).

Otázka 5. *Zformulujte a dokažte větu:* vztah derivace a spojitosti (Věta 5.1).

Otázka 6. *Zformulujte a dokažte větu:* d'Alembertovo podílové kritérium (Věta 3.7).

Otázka 7. *Zformulujte a dokažte větu:* Lagrangeova věta (Věta 5.7).

Seznam klíčových pojmů.

- kartézský součin, binární relace, zobrazení, definiční obor, obor hodnot
- prosté zobrazení, zobrazení na, bijekce, restrikce, složené zobrazení, inverzní zobrazení, obraz množiny, vzor množiny
- maximum, minimum, supremum, infimum (i v rozšířeném smyslu) množiny reálných čísel
- množina konečná, nekonečná, spočetná a nespočetná
- limita posloupnosti (vlastní i nevlastní), limes superior, limes inferior
- konvergentní posloupnost, divergentní posloupnost, monotónní posloupnost, vybraná posloupnost
- okolí bodu včetně nevlastních bodů, jednostranné okolí, prstencové okolí
- částečný součet řady, součet řady, člen řady, konvergentní řada, divergentní řada
- limita funkce včetně jednostranných limit ve vlastním i nevlastním bodě
- spojitost funkce v bodě (i jednostranná), spojitost funkce na intervalu
- extrémy funkce na dané množině (ostré i neostré, lokální i globální)
- derivace a jednostranné derivace reálné funkce v bodě (vlastní i nevlastní)
- konvexní funkce, konkávní funkce, inflexní bod

Seznam požadovaných definic.

Úvod.

- výrok, negace, konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence, výroková forma, nutná podmínka, postačující podmínka
- prázdná množina, neprázdná množina, podmnožina, vlastní podmnožina, inkluze, sjednocení, průnik, disjunktní množiny, rozdíl množin
- potenční množina, množiny stejné a menší nebo rovné mohutnosti
- zdola omezená množina, shora omezená množina, omezená množina
- horní závora, dolní závora

Posloupnosti reálných čísel.

- shora omezená posloupnost, zdola omezená posloupnost, omezená posloupnost
- neklesající posloupnost, nerostoucí posloupnost, rostoucí posloupnost, klesající posloupnost, ryze monotónní posloupnost
- rozšířená reálná osa
- otevřený interval, uzavřený interval, polouzavřený interval, krajní bod intervalu, vnitřní bod intervalu
- číslo e
- hromadná hodnota posloupnosti
- Bolzanova – Cauchyova podmínka pro posloupnosti

Řady reálných čísel.

- absolutně konvergentní řada, neabsolutně konvergentní řada

Reálné funkce jedné reálné proměnné.

- rostoucí funkce, klesající funkce, nerostoucí funkce, neklesající funkce, monotónní funkce, ryze monotónní funkce
- sudá funkce, lichá funkce, periodická funkce
- funkce shora omezená, zdola omezená, omezená na dané množině
- Dirichletova funkce, Riemannova funkce, konstantní funkce

Derivace a elementární funkce.

- exponenciální funkce, přirozený logaritmus, logaritmus o obecném základu, obecná mocnina, n-tá odmocnina
- goniometrické funkce, cyklometrické funkce
- n-tá derivace funkce v bodě
- tečna ke grafu funkce v bodě

- ryze konvexní funkce na intervalu, ryze konkávní funkce na intervalu
- asymptota funkce

Seznam požadovaných vět (není-li výslovně stanoveno jinak, jsou požadovány úplné důkazy).

Úvod.

- de Morganova pravidla (Věta 1.1)
- Cantorova–Bernsteinova věta (Věta 1.2) bez důkazu
- Cantorova věta (Věta 1.3) bez důkazu
- vlastnosti spočetných množin (Věta 1.4) bez důkazu
- existence infima (Věta 1.6)
- existence celé části reálného čísla (Věta 1.7)
- Archimédova vlastnost reálných čísel (Věta 1.8)
- existence n-té odmocniny (Věta 1.9) bez důkazu
- hustota racionálních čísel v $\mathbb{R}$ (Věta 1.10)

Posloupnosti reálných čísel.

- jednoznačnost limity posloupnosti (Věta 2.1)
- postačující podmínka pro existenci limity posloupnosti (Věta 2.2)
- vztah konvergence a omezenosti posloupnosti (Věta 2.3)
- limita vybrané posloupnosti (Věta 2.4)
- limita posloupnosti a aritmetické operace (Věta 2.5)
- limita součinu členů omezené posloupnosti a posloupnosti s nulovou limitou (Věta 2.6)
- limita posloupnosti a absolutní hodnota (Věta 2.7)
- limita posloupnosti a uspořádání (Věta 2.8)
- o dvou strážnících pro posloupnosti (Věta 2.9)
- nevlastní limita posloupnosti a jednostranná omezenost (Věta 2.11)
- věta o andělovi (Věta 2.12)
- věta o ďáblovi (Věta 2.13) bez důkazu
- změna konečně mnoha členů posloupnosti (Věta 2.14)
- limita posloupnosti a aritmetické operace podruhé (Věta 2.15) bez důkazu
- nevlastní limita podílu (Věta 2.16)
- limita monotónní posloupnosti (Věta 2.17)
- Cantorův princip vložených intervalů (Věta 2.18)
- Bolzanova – Weierstrassova věta (Věta 2.19)
- o vztahu limity, limes inferior a limes superior (Věta 2.20)
- vztah limes superior, limes inferior a hromadných hodnot (Věta 2.21)
- Bolzanova – Cauchyova podmínka pro posloupnosti (Věta 2.22)
- Borelova věta (Věta 2.23)

Řady reálných čísel.

- nutná podmínka konvergence řady (Věta 3.1)
- Bolzanova-Cauchyova podmínka konvergence řady (Věta 3.2)
- řady a aritmetické operace (Věta 3.3)
- srovnávací kritérium (Věta 3.4)
- limitní srovnávací kritérium (Věta 3.5)
- Cauchyovo odmocninové kritérium (Věta 3.6)
- d'Alembertovo podílové kritérium (Věta 3.7)
- Raabeovo kritérium (Věta 3.8) bez důkazu
- kondenzační kritérium (Věta 3.9)
- o konvergenci řady $\sum n^{-\alpha}$ (Věta 3.10)
- Abelova parciální sumace (Lemma 3.11)
- Abelovo-Dirichletovo kritérium (Věta 3.12)

- Leibnizova věta (Věta 3.13)
- vztah absolutní konvergence a konvergence řady (Věta 3.14)

Reálné funkce jedné reálné proměnné.

- jednoznačnost limity funkce (Věta 4.1) bez důkazu
- vztah limity funkce a jednostranných limit (Věta 4.2) bez důkazu
- Heineova věta (Věta 4.3)
- Heineova věta pro spojitost (Věta 4.4) bez důkazu
- aritmetika limit funkcí (Věta 4.5) bez důkazu
- limita složené funkce (Věta 4.6)
- vlastní limita funkce a omezenost (Věta 4.7)
- limita funkce a uspořádání (Věta 4.8) bez důkazu
- spojitost a artimetické operace (Věta 4.9) bez důkazu
- o dvou strážnících pro funkce (Věta 4.10) bez důkazu
- o andělovi pro funkce (Věta 4.11) bez důkazu
- o ďáblovi pro funkce (Věta 4.12) bez důkazu
- limita monotónní funkce (Věta 4.13)
- Bolzanova věta o nabývání mezihodnot (Věta 4.14)
- spojitý obraz intervalu (Věta 4.15)
- existence extrémů (Věta 4.16)
- omezenost spojité funkce na uzavřeném intervalu (Věta 4.17)
- spojitost inverzní funkce (Věta 4.18)

Derivace a elementární funkce.

- vztah derivace a spojitosti (Věta 5.1)
- aritmetika derivací (Věta 5.2)
- derivace složené funkce (Věta 5.3)
- derivace inverzní funkce (Věta 5.4)
- nutná podmínka existence extrému (Věta 5.5)
- Rolleova věta (Věta 5.6)
- Lagrangeova věta (Věta 5.7)
- vztah derivace a monotonie (Věta 5.8)
- Cauchyova věta (Věta 5.9)
- l'Hospitalova pravidla (Věta 5.10), důkaz pouze části (a)
- věta o limitě derivací (Věta 5.11)
- zavedení exponenciální funkce (Věta 5.12), důkaz pouze podmínky (E2)
- vlastnosti exponenciální funkce (Věta 5.13)
- existence a jednoznačnost exponenciální funkce (Věta 5.14)
- vlastnosti logaritmu (Věta 5.15), důkaz pouze podmínky (L7)
- základní vlastnosti sinu a kosinu (Věta 5.16) bez důkazu
- vlastnosti funkcí sin a cos(Věta 5.17) bez důkazu
- jednoznačnost sinu a kosinu (Věta 5.18) bez důkazu
- vlastnosti funkce tangens (Věta 5.19) bez důkazu
- vlastnosti funkce kotangens (Věta 5.20) bez důkazu
- vlastnosti cyklometrických funkcí (Věta 5.21) bez důkazu
- ekvivalentní podmínky pro konvexitu (Lemma 5.22)
- vztah konvexity a existence jednostranných derivací (Věta 5.23)
- vztah konvexity a spojitosti (Věta 5.24)
- vztah druhé derivace a konvexity (Věta 5.25)
- nutná podmínka pro inflexi (Věta 5.26)
- postačující podmínka pro inflexi (Věta 5.27)
- tvar asymptoty (Věta 5.28)