MATEMATICKÁ ANALÝZA 3, NMMA103, ZIMNÍ SEMESTR 2017–2018
POPIS PŘEDMĚTU A INFORMACE K ZÁPOČTU A KE ZKOUŠCE

LUBOŠ PICK

Popis předmětu

Jde o třetí část čtyřsemestrálního základního kursu matematické analýzy pro bakalářské obory. Věnuje se pokročilejším partiím diferenciálního a integrálního počtu a metrických prostorů a jejich aplikací k řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Kurs se skládá z přednášek a cvičení a je hodnocen zápočtem a zkouškou.

Přednáška se koná pro větší množství (desítky až stovky) studentů najednou, přičemž přednášející u tabule vykládá především teoretické poznatky a ilustrativní příklady. Otázky v průběhu přednášky a diskuse po ní jsou vítány, jiná forma studentské aktivity (pobyt u tabule atd.) se nepředpokládá. Z látky přednášené na přednášce je potřeba složit zkoušku.

Cvičení se koná pro menší množství (15-25) studentů najednou, typicky pro jeden kroužek. Na cvičeních se počítají příklady určené k procvičení dané tématiky, výjimečně se dokazují tvrzení doplňující přednášku. S aktivní účastí studentů (někdy i u tabule) se počítá. Náplň a formu cvičení určuje cvičící. Z početních technik prováděných na cvičeních je potřeba složit zápočet.

Proseminář je určen pro malé množství (typicky 15-25) studentů, kteří mají zájem o získání hlubších teoretických poznatků z matematické analýzy nad rámec povinné látky. Na prosemináři často referují probíranou látku studenti. Proseminář je hodnocen zápočtem. Zápočet bývá typicky udělován za inteligentní referát.

Zápočet

Postačující podmínkou pro udělení zápočtu je 50% účast na cvičeních a dvě splněné zápočtové písemky.

Během zimního semestru budou uspořádány celkem tři zápočtové písemky, z toho dvě v průběhu cvičení a jedna opravná. Každá zápočtová písemka bude obsahovat tři příklady z oblastí matematické analýzy odpovídajících náplni třetího semestru. Čas k vypracování každé zápočtové písemky bude 30 minut. Povoleny jsou pouze psací potřeby. Písemka je hodnocena jako *splněná*, pokud student správně vyřeší alespoň dva ze tří příkladů. V případě nesplnění zápočtových písemek bude možné získat zápočet za domácí vypracování sedmi nebo patnácti příkladů (podle toho, zda studentovi chybí jedna nebo dvě splněné písemky). V těchto případech je nutná individuální domluva s cvičícím.

Zkouška

Písemná část. Pro písemnou část zkoušky bude vypsáno právě pět termínů, a to

- čtvrtek 18.01.2018 od 08:00 v K1,
- úterý 23.01.2018 od 08:00 v K1,
- pondělí 29.01.2018 od 08:00 v K1,
- středa 14.02.2018 od 08:00 v K1,
- někdy v březnu 2018.

Date: 7. ledna 2018.

Mimo vypsané termíny nebude možné vykonat písemnou část zkoušky. Jiné termíny nebudou vypsány.

K písemné části zkoušky se mohou elektronicky prostřednictvím systému SIS přihlásit studenti, kteří získali zápočet.

V posluchárnách, v nichž se písemná část zkoušky bude konat, bude vyvěšen zasedací pořádek. Prosíme studenty, aby se dostavili s dostatečným předstihem a zaujali svá místa podle zasedacího pořádku. Před začátkem písemné části zkoušky bude provedena kontrola totožnosti studentů. Každý student se musí prokázat nějakým platným dokladem s fotografií (ISIC, OP, ŘP, pas a podobně).

Písemná část zkoušky bude obsahovat čtyři příklady z následujících partií matematické analýzy:

- diferenciální počet implicitních funkcí více proměnných (10 bodů),
- extrémy funkcí více proměnných (10 bodů),
- stejnoměrná konvergence posloupnosti nebo řady funkcí (15 bodů),
- obyčejné diferenciální rovnice (15 bodů).

Jestliže student získá z písemné části zkoušky 28 nebo více bodů, postoupí k ústní části zkoušky. Jestliže získá 27 nebo méně bodů, bude zkouška hodnocena známkou **neprospěl(a)**.

Čas k vypracování písemné části je 150 minut. Povoleny budou pouze běžné psací potřeby.

Bezprostředně po skončení písemné části (tedy přibližně v 10:35) bude na tabuli v posluchárně K1 předvedeno vzorové řešení. Účast na předvedení vzorového řešení je povolena i studentům, kteří ten den písemnou část zkoušky neskládali.

Odevzdané písemky budou opraveny během odpoledne v den konání písemné části zkoušky. Výsledky budou zveřejněny na webové stránce přednášejícího. Studentům, kteří úspěšně složí písemnou část zkoušky, bude přidělen čas ústní části zkoušky. Tento čas bude pro všechny studenty závazný. Podrobný rozvrh ústní části zkoušky bude též zveřejněn na webové stránce přednášejícího. Studenti, jejichž písemná část zkoušky bude hodnocena známkou neprospěl(a), se mohou dostavit následujícího dne v 08:00 do posluchárny K3, kde jim bude, pokud o to projeví zájem, hodnocení jejich písemné práce podrobně vysvětleno.

Ústní část. Ústní část zkoušky se bude konat vždy následující pracovní den po písemné části zkoušky (tedy v případě prvních čtyř termínů v pátek 19.01.2018, ve středu 24.01.2018, v úterý 30.01.2018 a ve čtvrtek 15.02.2018) od 08:00 v posluchárně K2.

Ústní část zkoušky bude obsahovat sedm otázek uspořádaných a přibližně hodnocených podle následujícího klíče:

- definice vybraného klíčového pojmu z prvního ročníku (0 bodů),
- definice klíčového pojmu (0 bodů),
- odpověď na klíčovou otázku z prvního ročníku (0 bodů),
- formulace dvou vět a jedné definice (5+5+5 body),
- formulace a důkaz tří vět (celkem 35 bodů).

K úspěšnému složení ústní části je třeba napsat správně definici klíčového pojmu z prvního ročníku, definici klíčového pojmu, správně odpovědět na klíčovou otázku z prvního ročníku (stačí správná odpověď, případně jednoduchý protipříklad, bez podrobných důkazů) a získat minimálně 30 bodů. Uvedené body jsou orientační a slouží jako pomůcka pro zkoušejícího, na jejich základě není možné vznášet námitky proti výsledku zkoušky.

Po celou dobu ústní zkoušky platí, že student musí bezpečně ovládat veškeré klíčové pojmy včetně klíčových pojmů z prvního ročníku, nejen ten, který si vylosuje. Prokáže-li se kdykoli během zkoušky, že student bezpečně neovládá kterýkoli z klíčových pojmů, bude zkouška hodnocena známkou neprospěl(a).

Bude-li zkouška po ústní části hodnocena známkou neprospěl(a), je student povinen znovu složit obě části zkoušky (tedy i písemnou).

Celkové hodnocení zkoušky

K celkovému hodnocení známkou **výborně** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a věty, znal důkazy všech vět a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti na více či méně jednoduchých teoretických příkladech. Orientačně známka "výborně" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 82–100.

K celkovému hodnocení známkou **velmi dobře** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a věty, znal důkazy lehčích vět a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti v jednoduchých teoretických příkladech. Může mít menší mezery v obtížnějších partiích. Orientačně známka "velmi dobře" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 70–81.

K celkovému hodnocení známkou **dobře** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a jednoduché věty a znal důkazy lehčích vět. Orientačně známka "dobře" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 58–69.

Hodnocení známkou **neprospěl(a)** bude uplatněno, jestliže se během zkoušky prokáže, že student nezná některý z klíčových pojmů, neovládá věty nebo definice nebo není schopen dokázat ani nejjednodušší tvrzení. Orientačně hodnocení "neprospěl(a)" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 0–57.

Seznamy požadovaných vět, definic a klíčových pojmů

Seznamy požadovaných vět, definic a klíčových pojmů se mohou v průběhu semestru mírně měnit v závislosti na postupu přednášky. Jejich definitivní podoba bude včas oznámena na přednášce.

Vybrané klíčové pojmy z prvního ročníku.

- prosté zobrazení, zobrazení na, bijektivní zobrazení, restrikce, složené zobrazení, obraz množiny, vzor množiny
- supremum, infimum (i v rozšířeném smyslu)
- limita posloupnosti (vlastní i nevlastní)
- konvergentní (divergentní) číselná řada
- limita funkce v bodě včetně nevlastních bodů i nevlastních limit
- spojitost funkce v bodě a na intervalu, stejnoměrná spojitost funkce na množině
- derivace reálné funkce jedné reálné proměnné
- primitivní funkce
- Riemannův integrál
- Newtonův integrál
- metrický prostor, metrika
- konvergence a limita posloupnosti v metrickém prostoru
- otevřená a uzavřená množina, vnitřek a uzávěr množiny
- derivace funkce více reálných proměnných podle vektoru, parciální derivace, gradient, totální diferenciál

Klíčové otázky z prvního ročníku.

1) Je množina racionálních čísel konečná, spočetná, otevřená, uzavřená v $\mathbb{R}$?
2) Je množina iracionálních čísel konečná, spočetná, otevřená, uzavřená v $\mathbb{R}$?
3) Platí implikace $\lim a_n = 0 \Rightarrow \sum a_n$ je konvergentní? Platí implikace $\sum a_n$ je konvergentní $\Rightarrow \lim a_n = 0$?

4) Je každá omezená posloupnost reálných čísel konvergentní? Je každá konvergentní posloupnost reálných čísel omezená? Je každá konvergentní řada absolutně konvergentní? Je každá monotónní posloupnost reálných čísel konvergentní? Je každá konvergentní posloupnost reálných čísel monotónní?
5) Je každá spojitá funkce na intervalu omezená? Je každá omezená funkce na intervalu spojitá? Je každá spojitá funkce na intervalu stejnoměrně spojitá?
6) Má každá spojitá funkce na intervalu v každém bodě derivaci? Má -li funkce na intervalu v nějakém bodě derivaci, je potom v tomto bodě spojitá? Má -li funkce v nějakém bodě nulovou derivaci, má potom v tomto bodě nutně extrém? Má -li funkce v nějakém bodě extrém, má potom v tomto bodě nutně nulovou derivaci?
7) Má každá spojitá funkce na intervalu Darbouxovu vlastnost? Je každá funkce mající Darbouxovu vlastnost na intervalu spojitá? Má každá spojitá funkce na otevřeném intervalu primitivní funkci? Má-li funkce na otevřeném intervalu primitivní funkci, je potom nutně spojitá? Má-li funkce na otevřeném intervalu primitivní funkci, má potom nutně Darbouxovu vlastnost?

Seznam klíčových pojmů.

- kompaktní množina v metrickém prostoru
- stejnoměrně spojitá funkce na metrickém prostoru
- cauchyovská posloupnost v metrickém prostoru
- úplný metrický prostor
- lipschitzovské zobrazení na metrickém prostoru
- derivace funkce více proměnných druhého řádu a druhý diferenciál
- Taylorův polynom funkce více proměnných druhého řádu
- difeomorfismus
- kladná a záporná část čísla a funkce
- přerovnání řady
- Cauchyův součin řad
- zobecněná řada, součet zobecněné řady
- konvergentní, divergentní, absolutně konvergentní zobecněná řada
- Banachův prostor
- součet řady a konvergence v normovaném lineárním prostoru
- komplexní číslo, imaginární jednotka, reálná a imaginární část komplexního čísla, absolutní hodnota komplexního čísla, komplexně sdružené číslo
- bodová, stejnoměrná a lokálně stejnoměrná konvergence posloupnosti a řady funkcí
- cauchyovská a stejnoměrně cauchyovská posloupnost a řada funkcí
- charakteristická funkce množiny
- diferenciální rovnice, řešení, maximální řešení
- charakteristický polynom
- fundamentální systém

Seznam požadovaných definic.

- Hessova matice
- extrém a lokální extrém funkce více proměnných
- regulární zobrazení
- tečná nadrovina
- funkce první Baireovy třídy
- pozitivní lineární operátor
- Bernsteinův polynom
- diferenciální rovnice se separovanými proměnnými
- lineární diferenciální rovnice, homogenní rovnice

Seznam požadovaných vět.

Metrické prostory II.

- nutná podmínka kompaktnosti (Věta 15.1)
- vztah kompaktnosti a uzavřenosti (Věta 15.2)
- vlastnosti kompaktních množin (Věta 15.3)
- charakterizace kompaktnosti v $\mathbb{R}^k$ (Věta 15.4)
- spojitý obraz kompaktu (Věta 15.5)
- nabývání extrémů spojité reálné funkce na kompaktu (Věta 15.6)
- omezenost spojité reálné funkce na kompaktu (Věta 15.7) (bez důkazu)
- vztah stejnoměrné spojitosti a spojitosti na kompaktu (Věta 15.8)
- vztah kompaktnosti a úplnosti (Věta 15.9)
- vztah úplnosti a uzavřenosti (Věta 15.10)
- Cantorova věta (Věta 15.11)
- charakterizace kompaktních prostorů (Věta 15.12)

Funkce více proměnných II.

- vztah omezené derivace a lipschitzovskosti (Věta 16.1)
- skládání zobrazení třídy $\mathcal{C}^k$ (Věta 16.2) (bez důkazu)
- o záměnnosti parciálních derivací (Věta 16.3) (bez důkazu)
- vztah druhé derivace a totálního diferenciálu (Věta 16.5)
- postačující podmínka pro existenci derivace (Věta 16.6)
- Lagrangeův tvar zbytku pro 2. řád (Věta 16.7)
- Peanův tvar zbytku pro 2. řád (Věta 16.8)
- o implicitně zadané funkci (Věta 16.9)
- o implicitně zadaných funkcích (Věta 16.10) (bez důkazu)
- nutná podmínka existence lokálního extrému (Věta 16.11)
- elipticita positivně definitní kvadratické formy (Věta 16.12)
- podmínky druhého řádu pro existenci lokálního extrému (Věta 16.13)
- Lagrangeova věta o multiplikátorech (Věta 16.14)
- o lokálním difeomorfismu (Věta 16.15)
- o vztahu difeomorfismu a regulárního zobrazení (Věta 16.16)

Číselné řady II.

- přerovnání absolutně konvergentní řady (Věta 17.1)
- Riemannova věta o přerovnání neabsolutně konvergentní řady (Věta 17.2) (bez důkazu)
- Mertensova věta (Věta 17.3)
- Abelova věta (Věta 17.4) (bez důkazu)
- jednoznačnost součtu zobecněné řady (Věta 17.5)
- linearita součtu zobecněné řady (Věta 17.6)
- vlastnosti zobecněného součtu (Věta 17.7)
- srovnávací kritérium pro zobecněné řady (Věta 17.8)
- absolutní konvergence zobecněné řady (Věta 17.9)
- přerovnání zobecněné řady (Věta 17.10)
- spočetnost nosiče zobecněné řady (Věta 17.11)
- zobecněný součet na $\mathbb{N}$ (Věta 17.12)
- asociativita zobecněného součtu (Věta 17.13) (bez důkazu)

Stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí.

- Mooreova–Osgoodova věta (Věta 18.1)
- charakterisace stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí (Věta 18.2)
- vztah stejnoměrné konvergence a spojitosti (Věta 18.3)
- charakterizace lokálně stejnoměrné konvergence na intervalu (Věta 18.4)
- Bolzanova–Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci (Věta 18.5)
- stejnoměrná konvergence derivací (Věta 18.6)
- záměna limity a Newtonova integrálu (Věta 18.7)

- Diniova věta (Věta 18.8)
- Korovkinova věta o třech funkcích (Věta 18.9)
- Weierstrassova věta (Věta 18.10)
- Weierstrassovo kritérium (Věta 18.11)
- Abelovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci řad funkcí (Věta 18.13)
- Dirichletovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci řad funkcí (Věta 18.14)
- záměna sumy a derivace (Věta 18.15) (bez důkazu)
- záměna sumy a Newtonova integrálu (Věta 18.16) (bez důkazu)
- o lokálně stejnoměrné konvergenci mocninné řady (Věta 18.17)

Obyčejné diferenciální rovnice.

- lepení řešení (Věta 19.1)
- tvar řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu (Věta 19.2) (bez důkazu)
- existence a jednoznačnost řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty (Věta 19.3) (bez důkazu)
- množina řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty (Věta 19.4)
- Rieszova–Fischerova věta (Věta 19.5)
- Eulerova formule (Věta 19.6) (bez důkazu)
- fundamentální systém řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty (Věta 19.7) (bez důkazu)
- řešení rovnice se speciální pravou stranou (Věta 19.8) (bez důkazu)
- Peanova věta (Věta 19.10) (bez důkazu)
- Picardova věta (Věta 19.11) (bez důkazu)
- existence a jednoznačnost řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic (Věta 19.12) (bez důkazu)
- množina řešení homogenní soustavy lineárních diferenciálních rovnic (Věta 19.13) (bez důkazu)
- tvar řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic (Věta 19.14) (bez důkazu)
- regularita fundamentálního systému (Lemma 19.15) (bez důkazu)
- variace konstant pro soustavu lineárních diferenciálních rovnic (Věta 19.16) (bez důkazu)
- řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty (Věta 19.17) (bez důkazu)

Vzorové zadání písemné části zkoušky

Příklad 1. Ukažte, že vztahy

$$u = \sin x + xy + e^z,$$
$$v = \cos y + xe^{-y},$$
$$w = x^2 + 2y - \cos(xz)$$

definují na okolí bodu $[u, v, w] = [1 + \sin 1, 2, 0]$ hladké funkce $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$, pro které platí $x(1 + \sin 1, 2, 0) = 1$, $y(1 + \sin 1, 2, 0) = 0$, $z(1 + \sin 1, 2, 0) = 0$. Rozhodněte, zda má funkce $x(u, v, w)$ totální diferenciál v bodě $[1 + \sin 1, 2, 0]$, a pokud ano, spočtěte jej. **(10 bodů)**

Příklad 2. Nalezněte globální extrémy funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definované předpisem

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

na množině

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 5,\ yz = 2\}.$$ **(10 bodů)**

Příklad 3. Nechť f je definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin(x^n).$$

Určete definiční obor funkce f. Rozhodněte, zda na tomto definičním oboru řada konverguje stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně. Vyšetřete spojitost funkcí f a f' v jejich definičním oboru. **(15 bodů)**

Příklad 4. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{1 + y^4}{y \cos^2 x},$$

splňující počáteční podmínku $y(0) = 1$, a jejich definiční obory. **(15 bodů)**

Vzor zadání zkušebních otázek pro ústní část zkoušky

Otázka 1. Napište definici klíčového pojmu z prvních dvou semestrů: *Newtonův integrál.*
Otázka 2. Odpovězte na následující klíčové otázky: Je každá omezená posloupnost reálných čísel konvergentní? Je každá konvergentní posloupnost reálných čísel omezená? Je každá konvergentní řada absolutně konvergentní? Je každá monotónní posloupnost reálných čísel konvergentní? Je každá konvergentní posloupnost reálných čísel monotónní?

Otázka 3. Napište definici klíčového pojmu: *úplný metrický prostor.*

Otázka 4. Napište definici pojmu: *Hessova matice.*

Otázka 5. Napište znění věty: *Mertensova věta.*

Otázka 6. Napište znění věty: *o lokálním difeomorfsmu.*

Otázka 7. Zformulujte a dokažte větu: *spojitý obraz kompaktu.*

Otázka 8. Zformulujte a dokažte větu: *Rieszova–Fischerova věta.*

Otázka 9. Zformulujte a dokažte větu: *Korovkinova věta.*