MATEMATICKÁ ANALÝZA 2, NMMA102, LETNÍ SEMESTR 2016–2017 POPIS PŘEDMĚTU A INFORMACE K ZÁPOČTU A KE ZKOUŠCE

LUBOŠ PICK

Popis předmětu

Jde o druhou část čtyřsemestrálního základního kursu matematické analýzy. Věnuje se pokročilejším partiím diferenciálního počtu, základům integrálního počtu a základům teorie metrických prostorů. Kurs se skládá z přednášek, cvičení a prosemináře a je hodnocen zápočtem a zkouškou.

Přednáška se koná pro větší množství (desítky až stovky) studentů najednou, přičemž přednášející u tabule vykládá především teoretické poznatky a ilustrativní příklady. Otázky v průběhu přednášky a diskuse po ní jsou vítány, jiná forma studentské aktivity (pobyt u tabule atd.) se nepředpokládá. Z látky přednášené na přednášce je potřeba složit zkoušku.

Cvičení se koná pro menší množství (15-25) studentů najednou, typicky pro jeden kroužek. Na cvičeních se počítají příklady určené k procvičení dané tématiky. S aktivní účastí studentů (někdy i u tabule) se počítá. Náplň a formu cvičení určuje cvičící. Z početních technik prováděných na cvičeních je potřeba složit zápočet.

Proseminář je určen pro malé množství (typicky 15-25) studentů, kteří mají zájem o získání hlubších teoretických poznatků z matematické analýzy nad rámec povinné látky. Na prosemináři často referují probíranou látku studenti. Proseminář je hodnocen zápočtem. Zápočet bývá typicky udělován za inteligentní referát.

Zápočet

Postačující podmínkou pro udělení zápočtu je 50% účast na cvičeních a dvě splněné zápočtové písemky.

Během zimního semestru budou uspořádány celkem tři zápočtové písemky, z toho dvě v průběhu cvičení a jedna opravná. Každá zápočtová písemka bude obsahovat tři příklady z oblastí matematické analýzy odpovídajících náplni druhého semestru. Čas k vypracování každé zápočtové písemky je 30 minut. Povoleny jsou pouze psací potřeby. Písemka je hodnocena jako *splněná*, pokud student správně vyřeší alespoň dva ze tří příkladů. V případě nesplnění zápočtových písemek je možné získat zápočet za domácí vypracování sedmi nebo patnácti příkladů (podle toho, zda studentovi chybí jedna nebo dvě splněné písemky). V těchto případech je nutná individuální domluva s cvičícím.

Zkouška

Písemná část. Pro písemnou část zkoušky bude vypsáno právě pět termínů, a to

- ve čtvrtek 08.06. 2017 v 08:00 v posluchárně K1,
- ve středu 14.06. 2017 v 08:00 v posluchárně K1,
- v pátek 16.06. 2017 v 08:00 v posluchárně K1,
- ve středu 28.06. 2017 v 08:00 v posluchárně K1,
- v pondělí 25.09. 2017 v 08:00 v posluchárně K1.

Date: 11. června 2017.

Mimo vypsané termíny nebude možné vykonat písemnou část zkoušky. Jiné termíny nebudou vypsány.

K písemné části zkoušky se mohou elektronicky prostřednictvím systému SIS přihlásit studenti, kteří získali zápočet.

V posluchárnách, v nichž se písemná část zkoušky bude konat, bude vyvěšen zasedací pořádek. Prosíme studenty, aby se dostavili nejpozději v 07:50 a zaujali svá místa podle zasedacího pořádku. Před začátkem písemné části zkoušky bude provedena kontrola totožnosti studentů. Každý student se musí prokázat nějakým platným dokladem s fotografií (ISIC, OP, ŘP, pas a podobně).

Písemná část zkoušky bude obsahovat pět příkladů z následujících partií matematické analýzy:

- výpočet limity funkce pomocí Taylorova polynomu (10 bodů),
- vyšetření konvergence mocninné řady a součet číselné řady (10 bodů),
- určení primitivní funkce (10 bodů),
- vyšetření konvergence určitého integrálu (10 bodů),
- základy diferenciálního počtu funkcí více proměnných (10 bodů).

Jestliže student získá z písemné části zkoušky 28 nebo více bodů, postoupí k ústní části zkoušky. Jestliže získá 27 nebo méně bodů, bude zkouška hodnocena známkou **neprospěl(a)**.

Čas k vypracování písemné části je 150 minut. Povoleny budou pouze běžné psací potřeby.

Bezprostředně po skončení písemné části (tedy přibližně v 10:35) bude na tabuli v posluchárně K1 předvedeno vzorové řešení. Účast na předvedení vzorového řešení je povolena i studentům, kteří ten den písemnou část zkoušky neskládali.

Odevzdané písemky budou opraveny během odpoledne v den konání písemné části zkoušky. Výsledky budou zveřejněny na webové stránce přednášejícího. Studentům, kteří úspěšně složí písemnou část zkoušky, bude přidělen čas ústní části zkoušky. Tento čas bude pro všechny studenty závazný. Podrobný rozvrh ústní části zkoušky bude též zveřejněn na webové stránce přednášejícího. Studenti, jejichž písemná část zkoušky bude hodnocena známkou neprospěl(a), se mohou dostavit následujícího dne v 08:00 do posluchárny K3, kde jim bude, pokud o to projeví zájem, hodnocení jejich písemné práce podrobně vysvětleno.

Ústní část. Ústní část zkoušky se bude konat vždy následující pracovní den po písemné části zkoušky (tedy 09.06., 15.06., 19.06., 29.06. a 26.09. 2017) od 08:00 v posluchárně K2.

Ústní část zkoušky bude obsahovat sedm otázek uspořádaných a přibližně hodnocených podle následujícího klíče:

- definice klíčového pojmu (0 bodů),
- formulace dvou vět a jedné definice (5+5+5 body),
- formulace a důkaz tří vět (celkem 35 bodů).

K úspěšnému složení ústní části je třeba napsat správně definici klíčového pojmu a získat minimálně 30 bodů. Uvedené body jsou ovšem pouze orientační a slouží jako pomůcka pro zkoušejícího, nelze na jejich základě vznášet žádné námitky proti výsledku zkoušky.

Po celou dobu ústní zkoušky platí, že student musí bezpečně ovládat veškeré klíčové pojmy, nejen ten, který si vylosuje. Prokáže-li se kdykoli během zkoušky, že student bezpečně neovládá kterýkoli z klíčových pojmů, bude zkouška hodnocena známkou neprospěl(a).

Bude-li zkouška po ústní části hodnocena známkou neprospěl(a), je student povinen znovu složit obě části zkoušky (tedy i písemnou).

Celkové hodnocení zkoušky

K celkovému hodnocení známkou **výborně** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a věty, znal důkazy všech vět a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti na více či méně jednoduchých teoretických příkladech. Orientačně známka "výborně" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 82–100.

K celkovému hodnocení známkou **velmi dobře** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a věty, znal důkazy lehčích vět a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti v jednoduchých teoretických příkladech. Může mít menší mezery v obtížnějších partiích. Orientačně známka "velmi dobře" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 70–81.

K celkovému hodnocení známkou **dobře** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a jednoduché věty a znal důkazy lehčích vět. Orientačně známka "dobře" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 58–69.

Hodnocení známkou **neprospěl(a)** bude uplatněno, jestliže se během zkoušky prokáže, že student nezná některý z klíčových pojmů, neovládá věty nebo definice nebo není schopen dokázat ani nejjednodušší tvrzení. Orientačně hodnocení "neprospěl(a)" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 0–57.

Vzorové zadání písemné části zkoušky

Příklad 1. Určete koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax) - \arcsin(bx) + x^3}{x^5}$$

existovala vlastní. Pro tyto hodnoty a, b limitu vypočítejte. (10 bodů)

Příklad 2. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nx^n}{(2n-1)!}$$

na jejím definičním oboru. (10 bodů)

Příklad 3. Spočtěte primitivní funkci

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin x}\, dx$$

na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. (10 bodů)

Příklad 4. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^{\infty} \frac{x+2}{x^{\frac{4}{5}}} \frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x+1}}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 5. Nechť $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x, y, z) = (|xy| + \sin xy, \operatorname{arctg}(x + y + 2z)).$$

(a) Dokažte, že v bodě $(1, 1, -1)$ existuje derivace funkce F a spočtěte její representující matici.
(b) Spočtěte $\frac{\partial F_1}{\partial x}(0, 0, 0)$, pokud existuje. (10 bodů)

Vzor zadání ústní části zkoušky

Sada číslo π

Otázka 1. *Napište definici klíčového pojmu*: Taylorův polynom.

Otázka 2. *Napište definici pojmu:* stejnoměrně spojitá funkce.

Otázka 3. *Napište znění věty:* první věta o střední hodnotě.

Otázka 4. *Napište znění věty:* o poloměru konvergence mocninné řady.

Otázka 5. *Zformulujte a dokažte větu:* vlastnosti uzávěru.

Otázka 6. *Zformulujte a dokažte větu:* aproximace Riemannova integrálu součty přes dělení s malou normou.

Otázka 7. *Zformulujte a dokažte větu:* postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu.

Seznamy požadovaných vět, definic a klíčových pojmů

Seznamy požadovaných vět, definic a klíčových pojmů se mohou v průběhu semestru mírně měnit v závislosti na přednášce. Jejich definitivní podoba bude včas oznámena na přednášce.

Seznam klíčových pojmů.

- Taylorův polynom
- Taylorova řada, Maclaurinova řada
- mocninná řada, střed a poloměr konvergence
- primitivní funkce
- Riemannův integrál
- stejnoměrně spojitá funkce
- Newtonův integrál
- konvergentní a divergentní Newtonův integrál
- metrický prostor, metrika
- normovaný lineární prostor, norma
- otevřená a uzavřená množina, vnitřek a uzávěr množiny
- konvergence a limita posloupnosti v metrickém prostoru
- limita zobrazení vzhledem k množině
- derivace podle vektoru, parciální derivace, gradient, totální diferenciál, derivace zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$
- Jacobiho matice, jacobián
- norma lineárního zobrazení $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Seznam požadovaných definic.

- symbol o
- racionální funkce
- dělení intervalu, zjemnění dělení
- horní a dolní součty, horní a dolní Riemannův integrál
- metriky v $\mathbb{R}^n$ (eukleidovská, newyorská, maximová, diskrétní)
- metriky v $C[a, b]$ (supremová, integrální), diskrétní metrika
- otevřená a uzavřená koule
- hromadný bod, derivace množiny, izolovaný bod
- vnitřní bod, vnitřek
- hraniční bod, hranice množiny
- vzdálenost bodu od množiny, průměr množiny
- zděděná metrika

Seznam požadovaných vět (není-li výslovně stanoveno jinak, jsou požadovány úplné důkazy).

Taylorův polynom.

- Peanův tvar zbytku (Věta 6.1)
- příliš dobrá aproximace polynomu (Lemma 6.2)
- jednoznačnost Taylorova polynomu (Věta 6.3)
- obecný tvar zbytku (Věta 6.4)
- Lagrangeův tvar zbytku (Věta 6.5)
- Cauchyův tvar zbytku (Věta 6.6)
- aritmetika malého o (Věta 6.7 - bez důkazu)
- malé o složené funkce (Věta 6.8 - bez důkazu)
- Taylorovy řady elementárních funkcí (Věta 6.9 - bez důkazu)
- iracionalita čísla e (Věta 6.10)

Mocninné řady.

- o poloměru konvergence mocninné řady (Věta 7.1)
- derivace mocninné řady (Věta 7.3)
- vztah mocninné řady a Taylorova polynomu (Věta 7.4)
- Abelova věta (Věta 7.6)

Primitivní funkce.

- jednoznačnosti primitivní funkce až na konstantu (Věta 8.1)
- vztah spojitosti a existence primitivní funkce (Věta 8.2)
- Darbouxova vlastnost derivace (Věta 8.3)
- linearita primitivní funkce (Věta 8.4)
- první věta o substituci (Věta 8.5)
- druhá věta o substituci (Věta 8.6)
- integrace per partes (Věta 8.7)

Riemannův integrál.

- vlastnosti dělení (Věta 9.1)
- mantinely Riemannova integrálu (Věta 9.2)
- aproximace Riemannova integrálu (Věta 9.3)
- aproximace Riemannova integrálu součty přes dělení s mizející normou (Věta 9.4)
- kritérium existence Riemannova integrálu (Věta 9.5)
- vztah spojitosti a stejnoměrné spojitosti (Věta 9.6)
- vztah spojitosti a riemannovské integrovatelnosti (Věta 9.7)
- vztah monotonie a riemannovské integrovatelnosti (Věta 9.8)
- vlastnosti Riemannova integrálu (Věta 9.9)
- derivace funkce horní meze Riemannova integrálu (Věta 9.10)
- výpočet Riemannova integrálu spojité funkce (Věta 9.11)
- charakterizace riemannovské integrovatelnosti (Věta 9.12)

Newtonův integrál.

- vlastnosti Newtonova integrálu (Věta 10.1)
- per partes pro Newtonův integrál (Věta 10.2)
- substituce pro Newtonův integrál (Věta 10.3)
- vztah Riemannova a Newtonova integrálu (Věta 10.4)

Konvergence Newtonova integrálu.

- Bolzanova–Cauchyova podmínka pro funkce (Věta 11.1)
- vztah spojitosti a existence Newtonova integrálu (Věta 11.2)
- srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu (Věta 11.3)
- srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu - obecnější verse (Věta 11.4)
- vztah absolutní konvergence a konvergence Newtonova integrálu (Věta 11.5)
- limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu - bez důkazu (Věta 11.6)
- Newtonův integrál součinu funkcí (Věta 11.7)

- Abelovo–Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu (Věta 11.8)
- první věta o střední hodnotě (Věta 11.9)
- druhá věta o střední hodnotě (Věta 11.10)

Aplikace určitého integrálu.

- Cauchyova nerovnost (Věta 12.1)
- eukleidovský prostor (Věta 12.2)
- odhad normy integrálu vektorové funkce (Věta 12.3)
- délka křivky (Věta 12.4)
- objem a povrch rotačního tělesa - bez důkazu (Věta 12.5)
- integrální kritérium konvergence řad (Věta 12.6)
- integrální tvar zbytku (Věta 12.7)

Metrické prostory.

- vztah mezi normou a metrikou (Věta 13.1)
- vlastnosti konvergence v metrickém prostoru (Věta 13.2)
- limita vybrané posloupnosti (Věta 13.3)
- vlastnosti uzavřených množin (Věta 13.4)
- otevřenost otevřené koule (Věta 13.5)
- vztah otevřených a uzavřených množin (Věta 13.6)
- vlastnosti otevřených množin (Věta 13.7)
- otevřené a uzavřené množiny v diskrétním prostoru (Věta 13.8)
- vlastnosti uzávěru (Věta 13.9)
- charakterizace spojitosti (Věta 13.10)
- o spojitosti složeného zobrazení(Věta 13.11)
- Heineova věta pro metrické prostory (Věta 13.12)
- o spojitosti složeného zobrazení v bodě - bez důkazu (Věta 13.13)
- o limitě složeného zobrazení - bez důkazu (Věta 13.14)

Funkce více proměnných.

- vztah totálního diferencálu a parciálních derivací (Věta 14.1)
- vztah existence totálního diferenciálu a spojitosti (Věta 14.2)
- o cestičce v kostičce (Věta 14.3)
- postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu (Věta 14.4)
- geometrický význam gradientu (Věta 14.5)
- representace derivace maticí (Věta 14.6)
- vztah derivace a spojitosti vektorové funkce více proměnných (Věta 14.7)
- postačující podmínka pro existenci derivace vektorové funkce více proměnných (Věta 14.8)
- spojitost lineárního zobrazení (Věta 14.9)
- derivace složeného zobrazení (Věta 14.11)
- řetízkové pravidlo (Věta 14.12)
- řetízkové pravidlo podruhé - bez důkazu (Věta 14.13)
- o přírůstku funkce (Věta 14.14)