MATEMATICKÁ ANALÝZA 2, LETNÍ SEMESTR 2016–2017
ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA E

LUBOŠ PICK

Příklad E1. Určete všechny hodnoty koeficientu $a \in \mathbb{R}$, pro které existuje vlastní limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x + ax^3}{x^4}.$$

Pro tyto hodnoty a limitu vypočítejte. (10 bodů)

Příklad E2. Určete střed a poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)(x-1)^n .$$

Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje a pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje absolutně. (10 bodů)

Příklad E3. Spočtěte primitivní funkci

$$\int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x}\, dx$$

na všech intervalech, na kterých existuje. (10 bodů)

Příklad E4. Vyšetřete konvergenci Newtonova integrálu

$$\int_1^{\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{\alpha} \operatorname{arccotg} x}{x}\, dx$$

v závislosti na hodnotě parametru $\alpha \in \mathbb{R}$. (10 bodů)

Příklad E5. Nechť $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x,y) = \begin{cases} (e^{x^2-y^2}, y^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)) & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ (0,0) & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

(a) Dokažte, že v bodě $[1,1]$ existuje derivace F, spočtěte její representující matici a určete jakobián F v bodě $[1,1]$.

(b) Spočtěte $\frac{\partial F_2}{\partial y}(0,0)$, pokud existuje. (10 bodů)