MATEMATICKÁ ANALÝZA 2, LETNÍ SEMESTR 2016–2017
ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA D

LUBOŠ PICK

Příklad D1. Určete všechny hodnoty koeficientu $a \in \mathbb{R}$, pro které existuje vlastní limita
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\operatorname{arctg} x) - \cos(\sin x) + ax^3}{x^4}.$$
Pro tyto hodnoty a limitu vypočítejte. (10 bodů)

Příklad D2. Určete střed a poloměr konvergence mocninné řady
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1)}{n+1} (2x+1)^n.$$
Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje a pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje absolutně. (10 bodů)

Příklad D3. Spočtěte primitivní funkci
$$\int \frac{x+1}{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x}+4)}\,dx$$
na všech intervalech, na kterých existuje. (10 bodů)

Příklad D4. Vyšetřete konvergenci Newtonova integrálu
$$\int_0^{\infty} \frac{(\log(1+x))^{\alpha} \sin x}{x^2}\,dx$$
v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$. (10 bodů)

Příklad D5. Nechť $F = (F_1, F_2)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení definované předpisem
$$F(x,y) = \begin{cases} ((x^2+y^2)(e^x - 1), \frac{x^2}{x^2+y^2}) & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ (0,0) & \text{pro } [x,y] = [0,0], \end{cases}$$
a $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je zobrazení definované předpisem
$$G(s,t) = st.$$

(a) Dokažte, že v bodě $[1,1]$ existuje derivace F, spočtěte její representující matici a jakobián.
(b) Spočtěte $\frac{\partial(G\circ F)}{\partial x}(0,-3)$ a $\frac{\partial(G\circ F)}{\partial y}(0,-3)$, pokud existují. (10 bodů)