MATEMATICKÁ ANALÝZA 2B

LUBOŠ PICK

Obsah

11.9. **Arzelova–Ascoliova věta.**

Definice 11.58. Řekneme, že množina A v metrickém prostoru (P, ϱ) je *relativně kompaktní*, jestliže $\overline{A}$ je kompaktní.

Příklady 11.59. (i) V každém metrickém prostoru (P, ϱ) platí, že každá konečná množina je relativně kompaktní a každá relativně kompaktní množina je totálně omezená (cvičení).

(ii) V diskrétním prostoru jsou relativně kompaktní množiny právě všechny konečné množiny.

(iii) V $\mathbb{R}^n$ jsou kompaktní množiny právě všechny omezené množiny.

(iv) Jak je to v $C[0,1]$? Víme, že například uzavřená jednotková koule v $C[0,1]$ je uzavřená, omezená, ale není relativně kompaktní.

Definice 11.60. Množina $A \subset C[0,1]$ se nazývá *stejně stejnoměrně spojitá*, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall f \in A \; \forall x, y: \quad |x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Věta 11.61 (Arzelà–Ascoli)**.** *Podmnožina prostoru* $(C[0,1], \sup)$ *je relativně kompaktní právě tehdy, když je stejně stejnoměrně spojitá a omezená.*

Poznámka 11.62. Analogické tvrzení platí i pro prostor $C(K)$, kde K je kompaktní metrický prostor.

12. Obyčejné diferenciální rovnice.

12.1. **Základní pojmy a věty.**

Definice 12.1. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+2}$, $F : \Omega \to \mathbb{R}$. Předpis

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

nazýváme *obyčejnou diferenciální rovnicí řádu n.*

Řešením diferenciální rovnice (1) nazýváme dvojici (y, I), kde I je otevřený interval v $\mathbb{R}$ a y je funkce definovaná alespoň na I, která má v každém bodě intervalu I vlastní derivaci n-tého řádu a jejíž hodnoty spolu s hodnotami jejích derivací vyhovují rovnici (1), tj.

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad x \in I.$$

Řekneme, že řešení $(\overline{y}, \overline{I})$ je *rozšířením* řešení (y, I), jestliže $\overline{y}$ je řešením (1) na $\overline{I}$, $I \subsetneq \overline{I}$ a $y = \overline{y}$ na I. Řešení se nazývá *maximální*, jestliže již neexistuje žádné jeho netriviální rozšíření.

KONEC 1. PŘEDNÁŠKY (21.2. 2011)

Definice 12.2. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Pak diferenciální rovnici

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

nazýváme *rozřešenou vzhledem k nejvyšší derivaci.*

Věta 12.3 (Peanova)**.** *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *je otevřená množina,* $[x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}] \in \Omega$ *a nechť* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkce. Potom existuje otevřené okolí* $U(x_0)$ *bodu* x_0 *a funkce* y *definovaná alespoň na* $U(x_0)$ *tak, že*

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad \text{pro každé } x \in U(x_0), \\ y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y_1, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1}. \end{aligned}$$

Speciálně pro rovnice 1. řádu platí: je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ *a* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkce, potom existují* $\gamma, \delta > 0$ *a funkce* y *definovaná alespoň na intervalu* $I = (x_0 - \delta, x_0 + \gamma)$ *taková, že*

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)) \quad \text{pro každé } x \in I, \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Poznámky 12.4. (i) Peanova věta je lokálního charakteru, tj. jako řešení dostaneme dvojici $(y, U(x_0))$, přičemž $U(x_0)$ může být „velmi malé“;

(ii) každé řešení je možno rozšířit do maximálního řešení, obecně však ne jen jediným způsobem;

(iii) Peanova věta neříká nic o jednoznačnosti řešení, garantuje pouze jejich existenci;

(iv) počáteční podmínky neovlivňují existenci řešení.

Lemma 12.5 (o ekvivalenci obyčejné diferenciální rovnice a integrální rovnice). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a nechť $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Nechť dále $I \subset \mathbb{R}$ je neprázdný otevřený interval, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $[x_0, y_0] \in \Omega$ a nechť y je spojitá funkce na I. Potom y je na I řešením obyčejné diferenciální rovnice*

$$y' = f(x, y)$$

splňující podmínku $y(x_0) = y_0$ právě tehdy, když platí

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \quad \text{pro každé } x \in I.$$

Definice 12.6. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Řekneme, že bod $[x_0, y_0] \in \Omega$ je *bodem větvení* řešení rovnice $y' = f(x, y)$, jestliže jím procházejí dvě řešení y_1, y_2 této rovnice, která nesplývají na žádném neprázdném otevřeném intervalu obsahujícím x_0.

Definice 12.7. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Řekneme, že funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je *lokálně lipschitzovská vzhledem ke druhé proměnné*, jestliže pro každou omezenou množinu $U \subset \Omega$ existuje $K > 0$ (K může záviset na U) takové, že pro každé $[x_0, y_0], [x_0, \overline{y_0}] \in U$ platí

$$|f(x_0, y_0) - f(x_0, \overline{y_0})| \le K|y_0 - \overline{y_0}|.$$

Věta 12.8 (Picardova pro 1. řád). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ a nechť $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která je navíc lokálně lipschitzovská vzhledem ke druhé proměnné. Potom existuje $\delta > 0$ a funkce y definovaná alespoň na intervalu $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ taková, že*

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)) \quad \text{pro každé } x \in I, \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Funkce y je navíc jednoznačně určena, tedy každá dvě taková řešení splývají na průniku svých definičních oborů. Jinými slovy, v Ω nejsou žádné body větvení řešení rovnice $y' = f(x, y)$.

KONEC 2. PŘEDNÁŠKY (28.2. 2011)

Poznámka. Lokální lipschitzovskost funkce f vzhledem k proměnné y se někdy definuje odlišně, například

$$\forall K \subset \Omega \text{ kompakt } \exists C > 0\ \forall [x, y], [x, \overline{y}] \in K : \quad |f(x, y) - f(x, \overline{y})| \le C|y - \overline{y}|,$$

případně

$$\forall [x_0, y_0] \in \Omega\ \exists r > 0\ \exists C > 0\ \forall\ [x, y], [x, \overline{y}] \in U([x_0, y_0], r) : \quad |f(x, y) - f(x, \overline{y})| \le C|y - \overline{y}|.$$

Picardova věta platí beze změny pro všechny tyto definice.

Věta 12.9 (lemma o lepení řešení ODR). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\delta, \gamma > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a $f \in C(\Omega)$. Nechť y_ℓ je řešením obyčejné diferenciální rovnice*

$$y' = f(x, y)$$

na intervalu $(a - \delta, a)$ a y_r je řešením téže rovnice na intervalu $(a, a + \gamma)$ a navíc platí

$$\lim_{x \to a-} y_\ell(x) = \lim_{x \to a+} y_r(x) = A \in \mathbb{R}.$$

Potom funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_\ell(x), & x \in (a - \delta, a), \\ A, & x = a, \\ y_r(x), & x \in (a, a + \gamma) \end{cases}$$

je řešením téže rovnice na intervalu $(a - \delta, a + \gamma)$.

12.2. **Obyčejné diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.**

Věta 12.10 (o existenci a jednoznačnosti řešení ODR 1. řádu se separovanými proměnnými)**.** *Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ a $c < d$, nechť $h : (a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ je spojitá a nenulová funkce. Nechť $[x_0, y_0] \in (a, b) \times (c, d)$. Potom existuje právě jedno řešení y obyčejné diferenciální rovnice $y' = g(y)h(x)$, splňující podmínku $y(x_0) = y_0$. Definičním intervalem I tohoto řešení je maximální interval ze všech intervalů tvaru $(x_0 - \delta, x_0 + \gamma)$, splňující*

$$(x_0 - \delta, x_0 + \gamma) \subset (a, b),$$

a

$$H(x) := \int_{x_0}^{x} h(t)\,dt \in G((c, d)) \quad \text{pro všechna } x \in I,$$

kde

$$G(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)}, \qquad y \in (c, d).$$

Poznámka 12.11. Pro řešení rovnice

$$y' = g(y)h(x), \tag{2}$$

kde g a h jsou spojité funkce, používáme následující algoritmus.

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h.

2. Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li totiž $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice (2). Těmto řešením říkáme **singulární** nebo také **stacionární**.

3. Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce g nenulová.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k h na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J. Existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$G(y(x)) = H(x) + c$$

na definičním oboru řešení y, který nalezneme v následujícím kroku.

5. Nyní zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I;\ H(x) + c \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů musí mít řešení tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c),$$

kde G^{-1} značí funkci inverzní k funkci G. Ta existuje, neboť G je na intervalu J buď rostoucí nebo klesající.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení podle Věty 12.9.

Příklad 12.12. $y' = x\sqrt[3]{y^2}$.

12.3. **Lineární obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu.**

Definice 12.13. Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a nechť $p, q : (a, b) \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Pak předpis

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x), \quad x \in (a, b),$$

nazveme *lineární obyčejnou diferenciální rovnicí 1. řádu.*

Věta 12.14 (o existenci a jednoznačnosti řešení lineární ODR 1. řádu)**.** *Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a nechť $p, q : (a, b) \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Nechť $x_0 \in (a, b)$ a $y_0 \in \mathbb{R}$. Potom existuje právě jedno řešení y obyčejné diferenciální rovnice $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$, splňující podmínku $y(x_0) = y_0$. Toto řešení má tvar*

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)} dt \right) e^{-P(x)} + y_0 e^{-P(x)}, \quad x \in (a, b),$$

kde P je primitivní funkce k p na (a, b) splňující $P(x_0) = 0$. Definičním intervalem I tohoto řešení je (a, b).

KONEC 3. PŘEDNÁŠKY (7.3. 2011)

12.4. **Lineární rovnice vyššího řádu a systémy lineárních rovnic.**

Definice 12.15. Nechť I je neprázdný otevřený interval, $n \in \mathbb{N}$ a nechť $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b$ jsou spojité reálné fuknce na I. Rovnici tvaru

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = b(x), \qquad x \in I, \tag{3}$$

nazýváme *lineární obyčejnou diferenciální rovnicí řádu n.* Jestliže $b \equiv 0$ na I, pak rovnici nazýváme *homogenní.*

Poznámka 12.16. Pro každé $x_0 \in I$ a pro každé $y^0 := [y_0, y_1, \dots, y_{n-1}] \in \mathbb{R}^n$ existuje právě jedno řešení y rovnice (3) splňující podmínky

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Důkaz tohoto tvrzení se provede stejně jako u rovnice prvního řádu, je pouze třeba použít obecnější verzi Picardovy věty, která požaduje lokální lipschitzovskost výrazu $a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) - b(x)$ ve všech proměnných y, y', ..., $y^{(n-1)}$, ta se však snadno ověří.

Značení. Symbolem $M(n \times n)$ budeme označovat množinu všech matic typu $n \times n$, jejichž složky jsou reálná čísla. Dále označíme pro maticovou funkci $A : I \to M(n \times n)$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je nějaký interval,

$$\|A\|_\infty := \sup_{x \in I} \max \{|a_{i,j}(x)|,\ i, j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Definice 12.17. Nechť I je neprázdný otevřený interval, $n \in \mathbb{N}$ a nechť $A : I \to M(n \times n)$ a $b : I \to \mathbb{R}^n$ jsou spojitá zobrazení (A je maticová funkce, tedy matice, jejíž prvky jsou spojité funkce $a_{i,j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, n$, a b je vektorová funkce, jejíž složky jsou spojité funkce $b_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$). Potom soustavu rovnic

$$y'(x) = A(x)y(x) + b(x), \qquad x \in I, \tag{4}$$

pro neznámou vektorovou funkci $y : I \to \mathbb{R}^n$ nazýváme *systémem lineárních obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu.* Jestliže $b \equiv (0, \dots, 0)$ na I, pak rovnici nazýváme *homogenní.*

Poznámky 12.18. (i) Nechť I je neprázdný otevřený interval, $a_{i,j}, b_i : I \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Pak soustavu (4) můžeme také zapsat v nezkráceném tvaru:

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + b_1 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + b_2 \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + b_n. \end{aligned}$$

Budeme dále používat také zkrácený (maticový) zápis

$$y' = Ay + b.$$

(ii) Řešení jedné rovnice řádu n lze vždy převést na řešení systému n rovnic řádu 1 (i pro nelineární rovnice) následujícím způsobem. Je-li zadána rovnice

$$y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x), \quad x \in I,$$

s podmínkami

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1}, \end{aligned}$$

pak můžeme definovat

$$u_1 := y,\ u_2 := y',\ \ldots,\ u_n := y^{(n-1)}.$$

Řešení zadané rovnice pak můžeme získat z řešení systému

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= u_3 \\ &\vdots \\ u_n' &= b - (a_{n-1}u_n + \cdots + a_0u_1). \end{aligned}$$

(iii) Ne každý systém n rovnic lze ovšem převést zpět na jednu rovnici n-tého řádu. To je možné pouze za předpokladu, že je splněna jistá podmínka řešitelnosti. Například systém

$$\begin{aligned} y' &= y \\ z' &= y \end{aligned}$$

není možné převést na jednu rovnici druhého řádu.

Věta 12.19 (o globální existenci a jednoznačnosti řešení systému lineárních ODR 1. řádu)**.** *Nechť I je neprázdný otevřený interval, $n \in \mathbb{N}$, a nechť $A : I \to M(n \times n)$ a $b : I \to \mathbb{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Nechť dále $x_0 \in I$, $y^0 \in \mathbb{R}^n$. Potom existuje právě jedno řešení systému (4), splňující podmínky*

$$y(x_0) = y^0.$$

Toto řešení je definované na celém I.

Věta 12.20 (o tvaru prostoru řešení systému lineárních ODR 1. řádu)**.** *Nechť I je neprázdný otevřený interval, $n \in \mathbb{N}$, a nechť $A : I \to M(n \times n)$ a $b : I \to \mathbb{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Označme*

$$Ly := y' - Ay, \qquad H := \operatorname{Ker} L,$$

a

$$M := \left\{y \in C^1(I, \mathbb{R}^n),\ Ly = b\right\}.$$

Pak H je vektorový podprostor prostoru $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ dimenze n a existuje $y_0 \in M$ tak, že

$$M = y_0 + H.$$

Definice 12.21. Libovolnou bázi $\left\{y^1, \ldots, y^n\right\}$ prostoru H (tj. libovolnou n-tici lineárně nezávislých řešení homogenní rovnice $Ly = 0$) nazýváme *fundamentálním systémem řešení homogenní rovnice $y' = Ay$.*

Poznámka. Dle Věty 12.20 existuje fundamentální systém řešení pro každou rovnici $y' = Ay$ za předpokladu, že A je spojitá matice. Jednotlivá řešení $y^1, \ldots, y^n$ rovnice $y' = Ay$ jsou vektorové funkce, které chápeme jako sloupce

$$y^1 = \begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_2^1 \\ \vdots \\ y_n^1 \end{pmatrix},\ y^2 = \begin{pmatrix} y_1^2 \\ y_2^2 \\ \vdots \\ y_n^2 \end{pmatrix},\ \ldots,\ y^n = \begin{pmatrix} y_1^n \\ y_2^n \\ \vdots \\ y_n^n \end{pmatrix}.$$

Můžeme je uspořádat do takzvané *fundamentální matice*

$$Y = \begin{pmatrix} y_1^1 & y_1^2 & \cdots & y_1^n \\ y_2^1 & y_2^2 & \cdots & y_2^n \\ & \vdots & & \\ y_n^1 & y_n^2 & \cdots & y_n^n \end{pmatrix}.$$

Definice 12.22. Nechť I je neprázdný otevřený interval, $n \in \mathbb{N}$, a nechť $f^1, \dots, f^n : I \to \mathbb{R}^n$ jsou vektorové funkce. Pak jejich *wronskiánem* (*Wronského determinantem*) nazýváme funkci $W : I \to \mathbb{R}$, definovanou předpisem

$$W(x) = W_{(f^1,\dots,f^n)}(x) := \det \begin{pmatrix} f_1^1(x) & f_1^2(x) & \dots & f_1^n(x) \\ f_2^1(x) & f_2^2(x) & \dots & f_2^n(x) \\ & & \vdots & \\ f_n^1(x) & f_n^2(x) & \dots & f_n^n(x) \end{pmatrix}.$$

Poznámka 12.23. Zřejmě platí následující tvrzení: jsou-li $f^1, \dots, f^n : I \to \mathbb{R}^n$ lineárně závislé vektorové funkce v prostoru $C(I, \mathbb{R}^n)$, pak $W_{(f^1,\dots,f^n)}(x) = 0$ v každém bodě $x \in I$. Obráceně toto tvrzení neplatí, neboť například pro funkce

$$f^1(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & x \in [0,1) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & x \in (-1,0), \end{cases} \qquad f^2(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & x \in [0,1) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & x \in (-1,0), \end{cases}$$

zřejmě platí $W_{(f^1,\dots,f^n)}(x) = 0$ v každém bodě $x \in (-1,1)$, přestože jsou funkce f^1 a f^2 evidentně lineárně nezávislé v prostoru $C(I, \mathbb{R}^2)$. Následující věta ukazuje, že taková situace ale nemůže nastat pro případ, kdy jsou funkce $f^1, \dots, f^n$ řešení stejného systému lineárních diferenciálních rovnic.

Věta 12.24 (o wronskiánu a lineární závislosti řešení systému lineárních ODR 1. řádu)**.** *Nechť I je neprázdný otevřený interval, $n \in \mathbb{N}$, a nechť $A : I \to M(n \times n)$ je spojité zobrazení. Nechť $f^1, \dots, f^n$ jsou na I řešení systému lineárních diferenciálních rovnic $y' = Ay$. Potom platí:*

(i) *Je-li $W_{(f^1,\dots,f^n)}(x_0) = 0$ v nějakém bodě $x_0 \in I$, pak $W_{(f^1,\dots,f^n)}(x) = 0$ v každém bodě $x \in I$ a funkce $f^1, \dots, f^n$ jsou na I lineárně závislé.*

(ii) *Je-li $W_{(f^1,\dots,f^n)}(x_0) \neq 0$ v nějakém bodě $x_0 \in I$, pak $W_{(f^1,\dots,f^n)}(x) \neq 0$ v každém bodě $x \in I$ a funkce $f^1, \dots, f^n$ jsou na I lineárně nezávislé.*

KONEC 4. PŘEDNÁŠKY (14.3. 2011)

Věta 12.25 (variace konstant pro systém lineárních ODR 1. řádu)**.** *Nechť I je neprázdný otevřený interval, $n \in \mathbb{N}$ a nechť $A : I \to M(n \times n)$ a $b : I \to \mathbb{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Nechť $y^1, \dots, y^n$ je fundamentální systém řešení homogenního systému lineárních diferenciálních rovnic $y' = Ay$. Potom existují funkce $c_1, \dots, c_n \in C^1(I, \mathbb{R})$ tak, že y, definované předpisem*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y^i(x), \quad x \in I,$$

je řešení nehomogenního systému $y' = Ay + b$ na I.

Důsledek 12.26 (variace konstant pro jednu rovnici vyššího řádu)**.** *Nechť $[y_{(1)}, \dots, y_{(n)}]$ je fundamentální systém řešení homogenní lineární diferenciální rovnice*

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} = 0$$

na I. Potom existují funkce $c_1, \dots, c_n \in C^1(I, \mathbb{R})$ tak, že

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} c_i' y_{(i)} &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n} c_i' y_{(i)}' &= 0, \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^{n} c_i' y_{(i)}^{(n-2)} &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n} c_i' y_{(i)}^{(n-1)} &= b \end{aligned}$$

na I *a funkce* $y = \sum_{i=1}^n c_i y_{(i)}$ *je řešením rovnice*

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} = b$$

na I.

12.5. **Systémy lineárních rovnic s konstantními koeficienty.** Naším cílem je řešit lineární diferenciální rovnice vyššího řádu ve tvaru

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(x) y^{(j)}(x) = b(x), \qquad x \in I,$$

kde a_j a b jsou spojité funkce na intervalu I s hodnotami v $\mathbb{R}$, a systémy lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu ve tvaru

$$y'(x) = A(x)y(x) + b(x),$$

kde $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ je maticová funkce na I s hodnotami v $\mathbb{R}^{n^2}$ a b je vektorová funkce s hodnotami v $\mathbb{R}^n$, tedy $a_{i,j}$ a b_j jsou spojité funkce na I.

V předcházejícím odstavci jsme si vysvětlili, že rovnici tvaru (1) lze převést na systém rovnic tvaru (2) a že řešení hledáme ve dvou krocích: nejprve musíme najít fundamentální systém řešení příslušné homogenní úlohy (tj. v obou případech $b \equiv 0$) a pak nalézt jedno partikulární řešení nehomogenní úlohy. Druhý z těchto kroků (nalezení partikulárního řešení) provádíme buď pomocí metody variace konstant (Věta 12.25) a nebo, je-li pravá strana rovnice (tedy funkce b) speciálního tvaru

$$b(x) = e^{\alpha x}\left(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)\right)$$

(tzv. kvazipolynom), hledáme řešení v podobném tvaru pomocí metody neurčitých koeficientů (tato metoda bude probrána na cvičení).

V tomto odstavci se zaměříme na první z obou zmíněných kroků, tj. na hledání fundamentálního systému řešení. Tento krok je v plné obecnosti velice těžký a metody řešení jsou známy jen pro jisté speciální třídy rovnic, dané speciálním tvarem funkcí $a_j(x)$ v (1) a funkcí $a_{i,j}(x)$ v (2).

Zde popíšeme metody hledání FSŘ v případě, kdy jsou tyto funkce *konstantní*. Budeme tedy hledat fundamentální systém řešení jednak homogenní lineární rovnice

(5)
$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)}(x) = 0, \qquad x \in I,$$

kde $a_j \in \mathbb{R}$, a jednak homogenního systému lineárních diferenciálních rovnic

(6)
$$y'(x) = Ay(x), \qquad x \in I,$$

kde $A \in M(n \times n)$ je číselná matice.

Definice 12.27. *Charakteristickým polynomem* rovnice (5) nazýváme polynom

$$P(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Věta 12.28 (FSŘ lineární ODR vyššího řádu s konstantními koeficienty)**.** *Nechť* $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ *jsou všechny různé reálné kořeny charakteristického polynomu* $P(\lambda)$ *s násobnostmi* $r_1, \dots, r_s$. *Nechť* $\alpha_1 + \beta_1 i, \dots, \alpha_l + \beta_l i$ *jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu* $P(\lambda)$ *s kladnou imaginární částí a násobnostmi* $q_1, \dots, q_l$. *Pak funkce*

$$\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \dots & t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots & & & \\
e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \dots & t^{r_s-1}e^{\lambda_s t}, \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \\
\vdots & & & \\
e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, \\
e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t
\end{array}$$

tvoří fundamentální systém řešení rovnice (5).

Definice 12.29. *Charakteristickým polynomem* soustavy (6) nazýváme polynom

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E), \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

kde $E \in M(n \times n)$ je identická matice.

Poznámka. Funkce $y = e^{\lambda x} q$, kde $\lambda \in \mathbb{C}$ a $q \in \mathbb{C}^n$, je řešením (6) právě tehdy, když λ je vlastním číslem matice A (tedy kořenem charakteristického polynomu soustavy (6)) a q je vlastní vektor matice A příslušející k vlastnímu číslu λ, tedy platí-li

$$Aq = \lambda q.$$

KONEC 5. PŘEDNÁŠKY (21.3. 2011)

Věta 12.30 (FSŘ systému lineárních ODR 1. řádu s konstantními koeficienty v případě, že existuje báze $\mathbb{R}^n$ z vlastních vektorů)**.** *Nechť A je podobná diagonální matici a nechť*

$$q_{(1)}, q_{(2)}, \dots, q_{(n)}$$

jsou lineárně nezávislé vlastní vektory matice A, odpovídající vlastním číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ matice A. Potom funkce

$$e^{\lambda_1 x} q_{(1)},\ e^{\lambda_2 x} q_{(2)}, \dots,\ e^{\lambda_n x} q_{(n)}$$

tvoří (obecně komplexní) fundamentální systém řešení systému (6).

Poznámka. Matice A je reálná, takže je-li $\lambda = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ vlastní číslo A, pak je také komplexně sdružené číslo $\overline{\lambda} = \alpha - \beta i$ vlastním číslem matice A. Komplexně sdruženým vlastním číslům odpovídají komplexně sdružené vlastní vektory. Z toho plyne, že je-li komplexní funkce f ve FSŘ systému (6), pak je v tomto FSŘ také komplexně sdružená funkce $\overline{f}$. Protože dvojice reálných funkcí $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ jsou lineárními kombinacemi f a $\overline{f}$ (neboť $\operatorname{Re} f = \frac{f+\overline{f}}{2}$ a $\operatorname{Im} f = \frac{f-\overline{f}}{2i}$), získáme reálný FSŘ tak, že nahradíme dvojici komplexních funkcí f a $\overline{f}$ dvojicí reálných funkcí $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$.

Poznámka. Připomeňme si několik faktů z algebry. Je-li A reálná čtvercová matice typu $n \times n$, pak A má v $\mathbb{C}$ nejméně jedno a nejvýše n vlastních čísel, součet jejichž násobností je roven n. Označíme-li N_λ vlastní podprostor příslušející k vlastnímu číslu λ, pak N_λ je vektorový prostor, jehož dimenze splňuje

$$1 \leq \dim N_\lambda \leq k,$$

kde k je násobnost vlastního čísla λ. Je-li $\dim N_\lambda$ ostře menší než násobnost λ, pak pro účely FSŘ nemáme k dispozici dostatek lineárně nezávislých vlastních vektorů. Větu 12.30 nelze použít, protože báze z vlastních vektorů neexistuje. Nedostatek vlastních vektorů je v takovém případě potřeba kompenzovat pomocí tzv. řetězců přidružených vektorů.

Definice 12.31. Systém nenulových vektorů $v^1, v^2, \dots, v^k$, splňujících vztahy

$$\begin{aligned}
(A - \lambda E)v^1 &= 0,\\
(A - \lambda E)v^2 &= v^1,\\
(A - \lambda E)v^3 &= v^2,\\
&\ \,\vdots\\
(A - \lambda E)v^k &= v^{k-1},
\end{aligned}$$

kde E je jednotková matice, nazveme *řetězcem přidružených vektorů* (délky k), příslušejících k vlastnímu číslu λ matice A. Vektor v^j nezveme *přidruženým vektorem řádu* $j-1$.

Poznámky. (i) Je-li $v^1, v^2, \dots, v^k$ řetězec přidružených vektorů nějaké čtvercové matice typu $n \times n$, pak jsou vektory $v^1, v^2, \dots, v^k$ lineárně nezávislé. První vektor v řetězci, tedy v^1, je vlastním vektorem matice A, zbývající vektory v řetězci nejsou vlastní.

(ii) Každému Jordanovu bloku matice A velikosti k odpovídá jeden řetězec přidružených vektorů délky k.

(iii) Pro každé vlastní číslo λ matice A násobnosti k existuje právě jeden index $i \leq k$ tak, že

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda E) \subsetneqq \operatorname{Ker}((A - \lambda E)^2) \subsetneqq \cdots \subsetneqq \operatorname{Ker}((A - \lambda E)^i) = \cdots = \operatorname{Ker}((A - \lambda E)^k).$$

Návod na sestavení FSŘ systému (6) v případě, kdy neexistuje báze z vlastních vektorů, dává následující věta.

Věta 12.32 (o řešeních příslušných násobnému vlastnímu číslu s řetězci). *Nechť A je čtvercová matice typu $n \times n$, nechť λ je její vlastní číslo a nechť $v^1, v^2, \dots, v^k$ je řetězec přidružených vektorů odpovídající vlastnímu číslu λ. Pak funkce*

$$v^1 e^{\lambda x}, \left(v^1 x + v^2\right) e^{\lambda x}, \left(v^1 \frac{x^2}{2} + v^2 x + v^3\right) e^{\lambda x}, \dots, \left(v^1 \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + v^2 \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} + \dots + v^k\right) e^{\lambda x}$$

jsou lineárně nezávislá řešení systému $y' = Ay$.

Poznámka. Je zřejmé, že s pomocí předcházející věty lze již snadno sestavit FSŘ systému (6). Tento FSŘ bude pochopitelně obecně komplexní. Reálný FSŘ opět obdržíme metodou popsanou ve výše uvedené poznámce.

Věta 12.33 (o FSŘ systému lineárních ODR 1. řádu s konstantními koeficienty). *Nechť A je čtvercová matice typu $(n \times n)$. Potom existuje FSŘ $[y^1, \dots y,^n]$ homogenního systému $y' = Ay$ ve tvaru*

$$y^i(x) = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} P_1^i \\ P_2^i \\ \vdots \\ P_n^i \end{pmatrix},$$

kde λ je vlastní číslo matice A násobnosti k a P_j^i, $i, j \in [1, \dots, n]$ jsou polynomy stupně nejvýše k.

Poznámka 12.34 (algoritmus pro hledání pro FSŘ systému (6) metodou řetězců přidružených vektorů).
1. krok: najdeme všechna vlastní čísla matice A;
2. krok: ke každému vlastnímu číslu najdeme odpovídající vlastní vektory;
3. krok: ke každému vlastnímu číslu zjistíme dimenzi vlastního podprostoru podle vzorečku

$$\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda E) + \text{hodnost}\,(A - \lambda E) = n;$$

4. krok: je-li pro některé vlastní číslo dimenze vlastního podprostoru ostře menší než jeho násobnost, pak najdeme řetězec (nebo více řetězců - záleží na počtu odpovídajících Jordanových buněk) přidružených vektorů;
5. krok: sestavíme FSŘ jako kombinaci funkcí z Vět 12.30 a 12.33.

Definice 12.35. Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme *λ-maticí. Řádkovými úpravami λ-matice* rozumíme:

- záměnu dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovou konstantou,
- přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom v proměnné λ.

Poznámka. Nechť $A \in M(n \times n)$. Pak lze λ-matici $\lambda E - A$ převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou λ-matici. Výsledná λ-matice má na diagonále nenulové polynomy, součet jejichž stupňů je n.

Značení.

- Nechť $P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ je polynom a $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce mající vlastní derivaci n-tého řádu na $\mathbb{R}$. Potom symbol $P(\frac{d}{dx})y$ značí funkci

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y.$$

- Nechť $\mathbb{P} = (P_{ij})$ je λ-matice typu $n \times n$. Soustavou diferenciálních rovnic odpovídající $\mathbb{P}$ budeme rozumět soustavu

$$\begin{aligned} P_{11}(\frac{d}{dx})y_1 + \dots + P_{1n}(\frac{d}{dx})y_n &= 0, \\ P_{21}(\frac{d}{dx})y_1 + \dots + P_{2n}(\frac{d}{dx})y_n &= 0, \\ &\vdots \\ P_{n1}(\frac{d}{dx})y_1 + \dots + P_{nn}(\frac{d}{dx})y_n &= 0. \end{aligned}$$

Poznámka. Nechť λ-matice $\tilde{\mathbb{P}}$ vznikla konečnou posloupností řádkových úprav z λ-matice $\mathbb{P}$. Potom vektorová funkce $\vec{y}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ třídy $\mathcal{C}^\infty$ je řešením soustavy odpovídající matici $\mathbb{P}$, právě když je řešením soustavy odpovídající $\tilde{\mathbb{P}}$.

Poznámka 12.36 (algoritmus pro hledání pro FSŘ systému (6) metodou λ-matic)**.** *1. krok:* matici $\lambda E - A$ převedeme konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou matici;
2. krok: vzniklou soustavu diferenciálních rovnic řešíme zespoda.

Příklad.

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + 5y_2 \\ y_2 &= -2y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

Řešení. Nejprve určíme příslušnou λ-matici a upravíme ji na horní trojúhelníkovou:

$$\lambda\mathbb{E} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\lambda + 1 \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda + 2 \end{pmatrix}.$$

Sestavíme odpovídající soustavu diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} y_1 + \frac{1}{2}y_2' + y_2 &= 0 \\ y_2'' - 2y_2' + 2y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice vypočítáme y_2, zderivujeme, dosadíme do první rovnice a dopočítáme y_1:

$$\begin{aligned} y_2 &= \alpha_1 e^x \sin x + \alpha_2 e^x \cos x \\ y_1 &= \left(-\frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\right) e^x \sin x + \left(-\frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_2\right) e^x \cos x. \end{aligned}$$

Poznámka. Nehomogenní soustavu $y' = Ay + b$ a nehomogenní rovnici $Ly = b$ řešíme ve dvou krocích: nejprve najdeme FSŘ homogenní soustavy $y' = Ay$ nebo homogenní rovnice $Ly = 0$ a potom hledáme jedno partikulární řešení nehomogenní soustavy (rovnice). K druhému kroku můžeme využít například metodu variace konstant nebo, je-li pravá strana ve speciálním tvaru, následující větu.

Věta 12.37 (o speciálním tvaru pravé strany)**.** *Nechť*

$$b(x) = e^{\mu x} \cdot (P(x) \cos \nu x + Q(x) \sin \nu x),$$

kde $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ a P, Q jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice $Ly = b$ ve tvaru

$$y_0(t) = x^m e^{\mu x} \cdot (R(x) \cos \nu x + S(x) \sin \nu x),$$

kde R, S jsou vhodné polynomy stupně ne většího než $\max\{\text{stupeň } P, \text{ stupeň } Q\}$ *a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ udává, jakou násobnost má číslo $\mu + i\nu$ jakožto kořen charakteristického polynomu.*

KONEC 6. PŘEDNÁŠKY (28.3. 2011)

13. Banachovy prostory

Shrnutí známých pojmů a tvrzení. (i) Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak X je vektorový (lineární) prostor nad tělesem T, zde budeme téměř výhradně uvažovat případ $T = \mathbb{R}$. Na X je tedy definováno vnitřní sčítání ($\forall x, y \in X:\ x + y \in X$) a vnější násobení (násobení skalárem) ($\forall x \in X\ \forall \lambda \in T:\ \lambda x \in X$). Na X je dále definována norma $\|\cdot\|_X$ a (normová) metrika $\varrho(x, y) := \|x - y\|$.

(ii) Je-li X navíc úplný (v metrice dané normou), pak jej nazýváme *Banachovým prostorem.*

(iii) Každý lineární prostor X má bázi, která ovšem není jednoznačně určena. Každý prvek $x \in X$ má vzhledem ke každé bázi B jednoznačný zápis, tj. existují jednoznačně určené skaláry $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$ a bázové prvky $x_1, \dots, x_m \in B$ takové, že $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$. Všechny báze mají stejnou mohutnost. Mohutnost báze nazýváme *dimenzí* prostoru X. Banachův prostor může mít dimenzi buď konečnou nebo nespočetnou.

(iv) Zobrazení z X do Y, kde X a Y jsou normované lineární prostory, obvykle nazýváme *operátorem*, zobrazení z X do $\mathbb{R}$ obvykle nazýváme *funkcionálem.*

(v) Jsou-li X, Y dva normované lineární prostory a je-li L lineární zobrazení z X do Y, pak říkáme, že L je *omezené*, jestliže

$$\|L\|_{\mathfrak{L}(X,Y)} := \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Lx\|_Y = \sup_{x \ne \vec{o}} \frac{\|Lx\|_Y}{\|x\|_X} < \infty.$$

Symbolem $\mathfrak{L}(X, Y)$ označujeme prostor všech omezených lineárních zobrazení z X do Y. Prostor $(\mathfrak{L}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathfrak{L}(X,Y)})$ je opět normovaný lineární prostor. Výraz $\|L\|_{\mathfrak{L}(X,Y)}$ nazýváme *normou zobrazení L.* Prostor $(\mathfrak{L}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathfrak{L}(X,Y)})$ je úplný, pokud je úplný prostor Y.

(vi) Pro každé dva normované lineární prostory X, Y a pro každé lineární zobrazení $L : X \to Y$ platí nerovnost

$$\|Lx\|_Y \leq \|L\|_{\mathfrak{L}(X,Y)} \|x\|_X.$$

(vii) Bázi prostoru $\mathbb{R}$ nad tělesem $\mathbb{Q}$ nazýváme *Hamelovou bází.* Dimenze prostoru $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ je nespočetná.

Definice 13.1. Nechť X je normovaný lineární prostor. Potom *duálním* (*adjungovaným*) prostorem k prostoru X nazýváme prostor X^* všech omezených lineárních funkcionálů na X, tedy $X^* = \mathfrak{L}(X, \mathbb{R})$.

Poznámka 13.2. Prostor X^* je vždy úplný (pro jakýkoli normovaný lineární prostor X).

Věta 13.3 (charakterizace omezených lineárních zobrazení)**.** *Jsou-li X, Y dva normované lineární prostory a je-li L lineární zobrazení z X do Y, pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

(i) *$L \in \mathfrak{L}(X, Y)$;*

(ii) *L je lipschitzovské;*

(iii) *L je spojité;*

(iv) *L je spojité v bodě 0.*

Věta 13.4 (o spojitosti normy)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak norma na tomto prostoru, chápána jako zobrazení $\|\cdot\|_X : X \to [0, \infty)$, je spojitá.*

Věta 13.5 (o konečnědimenzionálních normovaných lineárních prostorech)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor konečné dimenze $n \in \mathbb{N}$. Pak existuje homeomorfní isomorfismus prostoru X na prostor $\mathbb{R}^n$.*

Poznámka 13.6. Důsledkem Heineovy věty a Věty 13.5 je, že v každém normovaném lineárním prostoru X konečné dimenze je konvergence $x_k \to x$ ekvivalentní konvergenci $\Phi^{-1}(x_k) \to \Phi^{-1}(x)$ v $\mathbb{R}^n$, ke $\Phi : \mathbb{R}^n \to X$ je homeomorfní isomorfismus definovaný předpisem $\Phi(\lambda) := \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, kde $[x_1, \dots, x_n]$ je nějaká báze prostoru X.

Definice 13.7. Metrický prostor (P, ϱ) nazveme *lokálně kompaktním*, jestliže pro každé $x \in P$ existuje $r > 0$ takové, že $\overline{U(x, r)}$ je kompakt.

Definice 13.8. Nechť X je normovaný lineární prostor a nechť $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou dvě normy na X. Řekneme, že tyto dvě normy jsou *ekvivalentní*, jestliže existují dvě kladné konstanty C_1, C_2 takové, že pro každé $x \in X$ platí

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1.$$

Věta 13.9 (důsledky věty o konečnědimenzionálních normovaných lineárních prostorech)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor konečné dimenze $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:*

(i) *X je úplný;*

(ii) *podmnožina X je kompaktní právě tehdy, když je uzavřená a omezená;*

(iii) *X je lokálně kompaktní;*

(iv) *každé dvě normy na X jsou ekvivalentní;*

(v) *je-li X podprostorem nějakého normovaného lineárního prostoru Y (libovolné dimenze), pak X je uzavřeným podprostorem Y.*

Příklady 13.10. (i) Prostory $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, ℓ^p $(1 \leq p \leq \infty)$, c_0, L^p $(1 \leq p \leq \infty)$, $(C([0,1]), \|\cdot\|_{\sup})$ jsou Banachovy.

(ii)Prostor $(C([0,1]), \|\cdot\|_{\text{int}})$ není Banachův (není úplný).

(iii) Normy $\|\cdot\|_{\sup}$ a $\|\cdot\|_{\text{int}}$ na prostoru $C([0,1])$ nejsou ekvivalentní. Tento prostor tedy nemá konečnou dimenzi.

(iv) Prostor $(\mathbb{R}^n)^*$ je isomorfní s prostorem $\mathbb{R}^n$.

KONEC 7. PŘEDNÁŠKY (4.4. 2011)

14. Vztah derivace a Lebesgueova integálu

Úmluva. Všechny integrály v této kapitole jsou Lebesgueovy.

Definice 14.1. Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Totální variací* funkce f na intervalu $[a, b]$ definujeme předpisem

$$V(f; a, b) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|; \ \{x_i\}_{i=0}^n \text{ je dělení } [a,b], \ a = x_0 < \cdots < x_n = b \right\}.$$

Řekneme, že funkce f má na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ *konečnou* (*omezenou*) *variaci*, jestliže $V(f; a, b) < \infty$. Množinu všech funkcí s omezenou variací na intervalu $[a, b]$ značíme $\mathrm{BV}(a, b)$.

Poznámky 14.2. Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Potom
(i) je-li f monotónní na $[a, b]$, pak $f \in \mathrm{BV}(a, b)$;
(ii) $V(f; a, b) \geq |f(a) - f(b)|$;
(iii) pro každé $x, y \in [a, b]$ platí $V(f; a, y) - V(f; a, x) = V(f; x, y)$, má-li levá strana smysl.

Cvičení 14.3. Nechť R je Riemannova funkce na $\mathbb{R}$.
(i) Rozhodněte, zda $R \in \mathrm{BV}(0, 1)$;
(ii) rozhodněte, zda $R^2 \in \mathrm{BV}(0, 1)$.

Věta 14.4 (vztah omezené variace a monotonie)**.** *Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Potom $f \in \mathrm{BV}(a, b)$ právě tehdy, když existují neklesající funkce F_1, $F_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ takové, že $f = F_1 - F_2$ na $[a, b]$.*

Definice 14.5. Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je *absolutně spojitá* na $[a, b]$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, takové, že pro každý disjunktní systém intervalů $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^n$, $a_j, b_j \in [a, b]$, $j = 1, \dots, n$, splňující

$$\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta,$$

platí

$$\sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

Množinu všech absolutně spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ značíme $\mathrm{AC}(a, b)$.

Věta 14.6 (vlastnosti funkcí s omezenou variací a funkcí absolutně spojitých)**.** *Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Potom platí:*
(i) *mezi třídami $C([a, b])$ a $\mathrm{BV}(a, b)$ neplatí ani jedna inkluze;*
(ii) $\mathrm{Lip}(a, b) \subsetneq \mathrm{AC}(a, b) \subsetneq C([a, b]) \cap \mathrm{BV}(a, b)$;
(iii) *je-li $f \in L^1(a, b)$ a je-li funkce F na $[a, b]$ definována předpisem $F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$, $x \in [a, b]$, pak $F \in \mathrm{AC}(a, b)$;*
(iv) *je-li $g \in \mathrm{AC}(a, b)$ a je-li funkce G na $[a, b]$ definována předpisem $G(x) := V(g; a, x)$, $x \in [a, b]$, pak $G \in \mathrm{AC}(a, b)$;*
(v) *je-li $f \in \mathrm{BV}(a, b)$, pak v každém bodě $x \in [a, b)$ existuje $\lim_{y \to x_+} f(y)$, v každém bodě $x \in (a, b]$ existuje $\lim_{y \to x_-} f(y)$ a navíc množina bodů $x \in (a, b)$, v nichž je $\lim_{y \to x_-} f(y) \neq \lim_{y \to x_+} f(y)$, je nejvýše spočetná.*

Definice 14.7. *Lebesgueovou–Stieltjesovou mírou* na $\mathbb{R}$ nazýváme úplnou borelovskou míru ν na $\mathbb{R}$ splňující $\nu([a, b]) < \infty$ pro každý uzavřený interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Věta 14.8 (charakterizace funkcí s omezenou variací)**.** *Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je zprava spojitá funkce. Potom jsou následující výroky ekvivalentní:*
(i) $f \in \mathrm{BV}(a, b)$;
(ii) *existuje znaménková Lebesgueova–Stieltjesova míra ν na $[a, b]$ taková, že pro každé $a \leq c < d \leq b$ platí*

$$f(d) - f(c) = \nu([c, d]);$$

(iii) *existuje Lebesgueova–Stieltjesova míra μ na $[a, b]$ taková, že pro každé $a \leq c < d \leq b$ platí*

$$|f(d) - f(c)| \leq \mu([c, d]).$$

Věta 14.9 (charakterizace absolutně spojitých funkcí)**.** *Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je zprava spojitá funkce. Potom jsou následující výroky ekvivalentní:*
(i) $f \in \mathrm{AC}(a, b)$;
(ii) *existují neklesající funkce F_1, $F_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ takové, že $F_1, F_2 \in \mathrm{AC}(a, b)$ a $f = F_1 - F_2$ na $[a, b]$;*
(iii) *existuje $\varphi \in L^1(a, b)$ taková, že*

$$f(x) = \int_a^x \varphi(t)\, dt, \quad x \in [a, b];$$

(iv) *existuje* $\psi \in L^1(a,b)$ *taková, že pro každé* $a \le c < d \le b$ *platí*

$$|f(d) - f(c)| \le \int_c^d \psi(t)\, dt.$$

KONEC 8. PŘEDNÁŠKY (11.4. 2011)

Definice 14.10. Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $x \in (a,b)$. Řekneme, že x je *Lebesgueovým bodem* funkce f, jestliže

$$\lim_{h \to 0+} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(y) - f(x)|\, dx = 0.$$

Příklady. Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

(i) Nechť $x \in (a,b)$. Je-li f spojitá v x, pak x je Lebesgueův bod funkce f.

(ii) Nechť $f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [a,b]}$ je Dirichletova funkce na $[a,b]$ a nechť $x \in (a,b)$. Potom x je Lebesgueův bod funkce f právě tehdy, když $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Věta 14.11 (o Lebesgueových bodech)**.** *Nechť* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *je uzavřený interval a* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Je-li* $f \in L^1(a,b)$, *pak jsou skoro všechny body z* $[a,b]$ *Lebesgueovými body funkce* f.

Věta 14.12 (vztah Lebesgueova integrálu a derivace)**.** *Nechť* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *je uzavřený interval,* $\varphi \in L^1(a,b)$ *a nechť* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je dána předpisem* $f(x) := \int_a^x \varphi(t)\, dt$. *Potom* $f \in \mathrm{AC}(a,b)$ *a pro skoro všechna* $x \in (a,b)$ *platí* $f'(x) = \varphi(x)$.

Věta 14.13 (vztah absolutní spojitosti a derivace)**.** *Nechť* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *je uzavřený interval a nechť* $f \in \mathrm{AC}(a,b)$. *Potom pro skoro všechna* $x \in (a,b)$ *existuje* $f'(x)$ *a platí Newtonova–Leibnizova formule*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt, \quad x \in [a,b].$$

Věta 14.14 (vztah monotonie a derivace)**.** *Nechť* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *je uzavřený interval a nechť* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je monotónní. Potom pro skoro všechna* $x \in (a,b)$ *existuje* $f'(x)$.

Věta 14.15 (vztah omezené variace a derivace)**.** *Nechť* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *je uzavřený interval a nechť* $f \in \mathrm{BV}(a,b)$. *Potom pro skoro všechna* $x \in (a,b)$ *existuje* $f'(x)$.

15. Fourierovy řady

15.1. Základní pojmy.

Značení. Symbolem $\mathcal{P}_{2\pi}$ značíme množinu všech lokálně integrovatelných 2π-periodických funkcí na $\mathbb{R}$.

Definice 15.1. Nechť a_k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a b_k, $k \in \mathbb{N}$, jsou posloupnosti reálných čísel. Pak řadu funkcí

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme *trigonometrickou řadou*. Je-li navíc $n \in \mathbb{N}$, pak funkci

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme *trigonometrickým polynomem stupně* n.

Definice 15.2. Množinu funkcí $\mathcal{T} := \{1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \dots\}$ nazýváme *trigonometrickým systémem*.

Poznámka 15.3. Trigonometrický systém je *ortogonální* v následujícím smyslu: pro každé dvě různé funkce $f, g \in \mathcal{T}$ platí

$$\int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx = 0.$$

Dále platí

$$\int_0^{2\pi} 1 \cdot 1\, dx = 2\pi, \qquad \int_0^{2\pi} (\cos(kx))^2\, dx = \int_0^{2\pi} (\sin(kx))^2\, dx = \pi, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Věta 15.4 (Fourierovy vzorce). *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a nechť*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

přičemž řada na pravé straně konverguje stejnoměrně k f na $\mathbb{R}$. Potom

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\, dx, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\, dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

KONEC 9. PŘEDNÁŠKY (18.4. 2011)

Definice 15.5. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Pak posloupnosti reálných čísel $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, definované předpisem

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\, dx, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\, dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

nazýváme *Fourierovými koeficienty* funkce f. Trigonometrickou řadu

$$Sf(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme *Fourierovou řadou* funkce f. Vztah mezi funkcí f a její Fourierovou řadou Sf značíme symbolem $f \sim Sf$. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dále definujeme *částečný součet Fourierovy řady* funkce f předpisem

$$S_n f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Poznámky 15.6. (i) Konvence „$\frac{a_0}{2}$“ je zavedena proto, abychom měli stejný vzorec pro a_k v případě $k = 0$ i v případech $k \in \mathbb{N}$.

(ii) V definici $\{a_k\}$ a $\{b_k\}$ lze integrovat pře libovolný interval délky 2π, tedy

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos(kx)\, dx, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \sin(kx)\, dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$. Nejčastěji se používá $\alpha = 0$ nebo $\alpha = -\pi$.

(iii) Symbol $f \sim Sf$ označuje pouze fakt, že řada stojící vpravo je Fourierovou řadou funkce stojící vlevo. Nevypovídá nic o případné konvergenci řady Sf (stejnoměrné ani bodové). Zejména jej nelze zaměňovat za symbol $f = Sf$, který by znamenal, že řada vpravo bodově konverguje a jejím bodovým součtem je funkce f.

Definice 15.7. Trigonometrickou řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme *cosinovou řadou* a trigonometrickou řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme *sinovou řadou.*

Poznámka 15.8. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a nechť $f \sim Sf$. Je-li f sudá, potom Sf je cosinová řada, tedy $b_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$, a navíc platí

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Je-li f lichá, potom Sf je sinová řada, tedy $a_k = 0$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a navíc platí

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(kx)\, dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Příklad 15.9. Nechť $f(x) = x^2$ pro $x \in [-\pi, \pi)$ a nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Potom

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(kx)}{k^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Kdybychom věděli, že řada Sf konverguje k funkci f (alespoň bodově), získali bychom po dosazení postupně $x = 0$ a $x = \pi$ vzorce

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} \qquad \text{a} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Definice 15.10. Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom funkci

$$D_n(x) := \frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme *Dirichletovým jádrem*.

Poznámky 15.11 (vlastnosti D_n). Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom

(i) D_n je sudá spojitá 2π-periodická funkce, splňující $D_n(0) = n + \frac{1}{2}$;

(ii) platí

$$D_n(x) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{2 \sin(\frac{x}{2})}, \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$$

(iii) platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\, dx = \pi.$$

Věta 15.12 (o částečných součtech Fourierovy řady). *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $f \sim Sf$, $x \in \mathbb{R}$ a nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom*

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + y) D_n(y)\, dy = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x + y) + f(x - y)) D_n(y)\, dy.$$

Definice 15.13. *Jednoduchou funkcí* nazýváme každou reálnou funkci tvaru

$$s(x) := \sum_{j=1}^{K} \alpha_j \chi_{A_j}(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

kde $K \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_K \in \mathbb{R}$ a $A_1, \ldots, A_K$ jsou měřitelné podmnožiny $\mathbb{R}$ konečné jednorozměrné Lebesgueovy míry.

Poznámka 15.14. Množina S všech jednoduchých funkcí je hustá v prostoru $L^1(0, 1)$.

Věta 15.15 (Riemannovo–Lebesgueovo lemma). *Nechť $(a, b) \subset R$ je interval a nechť $f \in L^1(a, b)$. Potom*

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^b f(x) \cos(tx)\, dx = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{t \to \infty} \int_a^b f(x) \sin(tx)\, dx = 0.$$

Poznámky 15.16. (i) Jsou-li posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ Fourierovými koeficienty nějaké funkce $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, pak podle Věty 15.15 nutně platí

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0.$$

Ne každé takové posloupnosti jsou však Fourierovými koeficienty nějaké funkce $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Později ale uvidíme, že pokud ale je konvergence k nule dostatečně rychlá, například pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ konverguje, pak již ano.

(ii) Obecně platí, že čím „hladší“ je funkce $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, tím „rychlejší“ je konvergence jejích Fourierových koeficientů k nule. Je-li například $f \in \mathcal{P}_{2\pi} \cap C^k(\mathbb{R})$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, potom $a_n = o(n^{-k})$ a $b_n = o(n^{-k})$, $n \to \infty$ (toto tvrzení nebudeme dokazovat).

Věta 15.17 (Riemannova věta o lokalizaci). *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $x \in \mathbb{R}$ a $s \in \mathbb{R}$. Potom $Sf(x) = s$ právě tehdy, jestliže existuje $\delta \in (0, \pi)$ takové, že*

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\delta (f(x + y) + f(x - y) - 2s) D_n(y)\, dy = 0.$$

Věta 15.18 (Diniovo kritérium)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $x \in \mathbb{R}$ a $s \in \mathbb{R}$. Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že Lebesgueův integrál*

$$\int_0^\delta \frac{f(x+y) + f(x-y) - 2s}{y}\, dy \qquad \text{konverguje.}$$

Potom $Sf(x) = s$.

Značení. Nechť $x \in \mathbb{R}$ a f je reálná funkce definovaná na nějakém okolí bodu x. Symbolem $f(x+)$ budeme označovat limitu $\lim_{y \to x_+} f(y)$ a symbolem $f(x-)$ limitu $\lim_{y \to x_-} f(y)$.

Věta 15.19 (Důsledky Diniova kritéria)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a nechť $x \in \mathbb{R}$.*

(i) *Nechť existují vlastní limity $f(x+)$ a $f(x-)$ a nechť dále existují vlastní limity*

$$\lim_{y \to 0_+} \frac{f(x+y) - f(x+)}{y} \qquad a \qquad \lim_{y \to 0_+} \frac{f(x-y) - f(x-)}{y}.$$

Potom řada Sf konverguje v bodě x a platí

$$Sf(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Speciálně, má-li funkce f konečné jednostranné derivace v bodě x, potom $Sf(x) = f(x)$.

(ii) *Jestliže existují $\delta > 0$, $\alpha > 0$ a $K > 0$ takové, že pro každé $y \in (x-\delta, x+\delta)$ platí*

$$|f(x+y) - f(x)| \le K|y|^\delta,$$

pak $Sf(x) = f(x)$.

Poznámky 15.20. Shrneme bez důkazů několik poznatků o bodové konvergenci Fourierových řad.

(i) Existuje funkce $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, jejíž Fourierova řada Sf diverguje v každém bodě $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Je-li $f \in \mathcal{P}_{2\pi} \cap L^2(-\pi, \pi)$, potom Sf konverguje skoro všude na $\mathbb{R}$. Speciálně to platí pro $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ spojitou na $\mathbb{R}$.

(iii) Je-li f monotónní na intervalu $(-\pi, \pi)$, pak Sf konverguje v každém bodě a jejím součtem v bodě $x \in \mathbb{R}$ je hodnota $\frac{f(x+) f(x-)}{2}$.

(iv) Existuje spojitá funkce $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, jejíž Fourierova řada Sf diverguje v každém bodě nespočetné husté podmnožiny $\mathbb{R}$.

(v) Je-li $f \in \mathcal{P}_{2\pi} \cap L^2(-\pi, \pi)$, potom $\lim_{n\to\infty} \|S_n f - f\|_{L^2(-\pi,\pi)} = 0$.

15.2. **Fejérova věta.**

Definice 15.21. Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom funkci

$$K_n(x) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme *Fejérovým jádrem.*

Poznámky 15.22 (vlastnosti K_n)**.** Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom

(i) K_n je sudá spojitá 2π-periodická funkce, splňující $K_n(0) = \frac{n+1}{2}$;

(ii) platí

$$K_n(x) = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \right)^2, \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$$

(iii) platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\, dx = \pi.$$

Poznámka. Fejérovo jádro má některé „lepší“ vlastnosti než Dirichletovo jádro. Například je nezáporné a navíc splňuje $K_n \rightrightarrows 0$ na množině $(-\pi, \pi) \setminus (-\delta, \delta)$ pro libovolné $\delta \in (0, \pi)$. To neplatí pro Dirichletovo jádro, neboť například $D_n(\pi) = \frac{(-1)^n}{2}$.

Definice 15.23. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $x \in \mathbb{R}$ a nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak výraz

$$\sigma_n f(x) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme *částečným Fejérovým součtem* Fourierovy řady Sf funkce f stupně n.

Poznámka 15.24. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $f \sim Sf$, $x \in \mathbb{R}$ a nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) K_n(y)\, dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+y) + f(x-y)) K_n(y)\, dy.$$

Věta 15.25 (Fejérova)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a nechť $x \in \mathbb{R}$.*

(i) *Nechť existují vlastní limity $f(x+)$ a $f(x-)$. Potom*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

(ii) *Je-li funkce f spojitá na nějakém intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$, potom*

$$\sigma_n f \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f \qquad \text{na } (a,b).$$

Poznámka 15.26. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $x \in \mathbb{R}$ a nechť existují vlastní limity $f(x+)$ a $f(x-)$. Potom Fourierova řada Sf funkce f nemusí konvergovat ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$, a to ani tehdy, je-li f spojitá na $\mathbb{R}$. Fejérova věta ukazuje, že jediným kandidátem na součet $Sf(x)$ je hodnota $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ (tedy $f(x)$, je-li f spojitá v x).

Věta 15.27 (Weierstrassova - trigonometrická verze)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ je spojitá na $\mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Potom existuje trigonometrický polynom $T \in \mathcal{T}$ splňující*

$$\|f - T\|_{\sup} < \infty.$$

KONEC 11. PŘEDNÁŠKY (9.5. 2011)

Věta 15.28 (Dirichletovo–Jordanovo kritérium konvergence Fourierových řad)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ a nechť $f \in \mathrm{BV}([a,b])$.*

(i) *pro každé $x \in (a,b)$ konverguje Fourierova řada $Sf(x)$ a platí*

$$Sf(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2};$$

(ii) *je-li funkce f navíc spojitá na $[a,b] \subset \mathbb{R}$, potom*

$$Sf \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f \qquad \text{na } (a,b).$$

15.3. **Fourierovy řady v Hilbertově prostoru.**

Definice 15.29. Nechť X je lineární prostor. Potom *skalárním součinem* na X nazýváme zobrazení

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R},$$

splňující následující tři podmínky:

(i) $\forall x, y \in X\ \forall \lambda \in \mathbb{R}:\ \langle x_1 + \lambda x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \lambda \langle x_2, y\rangle$;
(ii) $\forall x, y \in X:\ \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;
(iii) $\forall x \in X:\ \langle x, x\rangle \geq 0$, navíc $\langle x, x\rangle = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$.

Lineární prostor se skalárním součinem nazýváme *unitárním prostorem.*

Příklady 15.30. Následující prostory jsou unitární vzhledem k naznačeným skalárním součinům:

(i) $X = \mathbb{R}^n$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$;
(ii) $X = \ell^2$, $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$;
(iii) $X = L^2([-\pi,\pi])$, $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx$;
(iv) $X = C([-\pi,\pi])$, $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx$.

Věta 15.31 (Cauchyova–Schwarzova nerovnost)**.** *Nechť X je unitární prostor. Potom pro každé $x, y \in X$ platí*

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle.$$

Definice 15.32. Nechť X je unitární prostor. Potom definujeme na X normu $\|\cdot\|_X$ předpisem

$$\|x\|_X := \sqrt{\langle x, x\rangle}, \quad x \in X.$$

Poznámka. Předcházející definice je korektní, neboť z axiomů skalárního součinu plyne, že funkcionál $\|\cdot\|_X$ skutečně je na prostoru X normou. Někdy budeme normu v X značit pouze $\|\cdot\|$. Všechny konvergence v této kapitole, nebude-li stanoveno jinak, jsou míněny vzhledem k metrice $\|x - y\|_X$.

Definice 15.33. Nechť X je unitární prostor. Je-li X navíc úplný vzhledem k metrice $\|x-y\|_X$, pak jej nazýváme *Hilbertovým prostorem*.

Příklady 15.34. Prostory $\mathbb{R}^n$, ℓ^2 a $L^2([-\pi,\pi])$ jsou Hilbertovy vzhledem k odpovídajícím skalárním součinům. Prostor $C([-\pi,\pi])$ není Hilbertův vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$, protože vzhledem k odpovídající normě $\|f\| = (\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx)^{\frac{1}{2}}$ není úplný.

Poznámky 15.35. Nechť X je unitární prostor. Potom
(i) skalární součin je spojitý z $X\times X$ do $\mathbb{R}$;
(ii) platí tzv. *rovnoběžníkové pravidlo*:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2), \qquad x,y\in X.$$

Definice 15.36. Nechť X je unitární prostor a nechť $x,y\in X$. Řekneme, že prvek x je *ortogonální* (*kolmý*) k prvku y, značíme $x\perp y$, jestliže $\langle x,y\rangle = 0$. Systém $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$, kde I je indexová množina libovolné mohutnosti, nazveme *ortogonální systémem* v X, jestliže $x_\alpha\perp x_\beta$ pro každé $\alpha,\beta\in I$, $\alpha\neq\beta$. Jestliže navíc platí $\|x_\alpha\| = 1$ pro každé $\alpha\in I$, pak nazýváme $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *ortonormální systémem* v X. Je-li ortogonální (resp. ortonormální) systém spočetný, pak jej nazýváme *ortogonální* (*resp. ortonormální*) *posloupností*. Pro $M\subset X$ nazýváme množinu $M^\perp$, definovanou předpisem $M^\perp := \{y\in X;\ \forall x\in M:\ y\perp x\}$, *ortogonálním doplňkem* množiny M v prostoru X.

Příklad 15.37. V Hilbertově prostoru $L^2([-\pi,\pi])$ tvoří trigonometrický systém $\mathcal{T}$ ortogonální množinu. Systém

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots\}$$

tvoří v $L^2([-\pi,\pi])$ ortonormální množinu.

Poznámky 15.38. Nechť X je unitární prostor, $x,y\in X$, $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset X$ a $\{y_n\}_{n=1}^\infty\subset X$. Potom platí:
(i) $\forall\, x\in X:\ x\perp 0$;
(ii) $\forall\, x\in X:\ x\perp x \ \Leftrightarrow\ x=0$;
(iii) jestliže $x_n\perp y_n$ pro každé $n\in\mathbb{N}$ a navíc $x_n\to x$ a $y_n\to y$, pak $x\perp y$;
(iv) $\forall\, x,y\in X:\ x\perp y\ \Rightarrow\ \|x\pm y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2$ („Pythagorova věta“).

Definice 15.39. Nechť X je normovaný lineární prostor, $x\in X$ a $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset X$. Řekneme, že prvek x je *součtem řady* $\sum_{n=1}^\infty x_n$ v prostoru X, značíme $x=\sum_{n=1}^\infty x_n$, jestliže $\lim_{n\to\infty}\|x-\sum_{k=1}^n x_k\|_X = 0$.

Věta 15.40 (o tvaru koeficientů nekonečné řady v unitárním prostoru)**.** *Nechť X je unitární prostor a nechť $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset X$ je ortogonální posloupnost nenulových prvků v X. Nechť $x\in X$ a nechť $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$. Jestliže $x=\sum_{n=1}^\infty c_nx_n$, potom platí*

$$c_n = \frac{\langle x,x_n\rangle}{\|x_n\|^2}.$$

Definice 15.41. Nechť X je unitární prostor, $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset X$ je ortogonální posloupnost nenulových prvků v X, $x\in X$ a $n\in\mathbb{N}$. Potom reálné číslo

$$c_n := \frac{\langle x,x_n\rangle}{\|x_n\|^2}$$

nazýváme n-tým *Fourierovým koeficientem prvku x vzhledem k systému* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Řadu $\sum_{n=1}^\infty c_nx_n$ nazýváme *Fourierovou řadou prvku x vzhledem k systému* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$.

Poznámka 15.42. O konvergenci či součtu Fourierovy řady nějakého prvku v unitárním prostoru zatím nevíme nic. Součtem Fourierovy řady nějakého prvku nemusí obecně být tento prvek. Například v Hilbertově prostoru $L^2(-\pi,\pi)$ tvoří množina $\{\cos(x),\cos(2x),\cos(3x)\,\dots\}$ ortogonální posloupnost. Koeficienty funkce $f(x):=\sin x$ vzhledem k tomuto systému jsou ale všechny nulové, nulová funkce je tedy také součtem příslušné Fourierovy řady.

Věta 15.43 (o součtu ortogonální řady)**.** *Nechť X je unitární prostor a nechť $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset X$ je ortogonální posloupnost nenulových prvků v X. Potom platí:*
(i) *jestliže $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje v X, potom $\sum_{n=1}^\infty\|x_n\|^2<\infty$ a navíc*

$$\left\|\sum_{n=1}^\infty x_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^\infty\|x_n\|^2;$$

(ii) *je-li X Hilbertův (tj. je-li navíc úplný) a platí-li $\sum_{n=1}^\infty\|x_n\|^2<\infty$, potom $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje v X.*

Věta 15.44 (Besselova nerovnost a Parsevalova rovnost). *Nechť X je unitární prostor, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ je ortonormální posloupnost v X, $x \in X$ a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost Fourierových koeficientů x vzhledem k $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom platí:*
(i) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leq \|x\|^2$ *(Besselova nerovnost);*
(ii) $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ *právě tehdy, když* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \|x\|^2$ *(Parsevalova rovnost);*
(iii) *je-li X Hilbertův (tj. je-li navíc úplný), pak $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konverguje v X a platí*

$$\left(x - \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \right) \perp x_m \text{ pro všechna } m \in \mathbb{N}.$$

KONEC 12. PŘEDNÁŠKY (16.5. 2011)

Poznámka 15.45. Nechť X je separabilní unitární lineární prostor a nechť $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je ortogonální systém nenulových prvků v X. Potom I je spočetná množina.

Definice 15.46. Nechť X je normovaný lineární prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je *Schauderovou bází* prostoru X, jestliže pro každé $x \in X$ existuje právě jedna posloupnost reálných čísel $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taková, že

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n.$$

Poznámky 15.47. (i) Schauderova báze se od algebraické báze liší tím, že připouští i nekonečný součet.
(ii) Je-li navíc X unitární prostor a $\{x_n\}$ je ortogonální posloupnost, potom se čísla c_n musí rovnat odpovídajícím Fourierovým koeficientům prvku x vzhledem k systému $\{x_n\}$, tedy

$$c_n = \frac{\langle x, x_n \rangle}{\|x_n\|^2}.$$

Definice 15.48. Nechť X je unitární prostor a nechť $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je ortogonální posloupnost v X. Řekneme, že systém $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je

- *úplný*, jestliže $\overline{\mathrm{Lin}\{x_n\}} = X$;
- *maximální*, jestliže neexistuje nenulový prvek $y \in X$ takový, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $y \perp x_n$ (jinými slovy, platí implikace $\forall n \in \mathbb{N}: \ y \perp x_n \ \Rightarrow y = 0$).

Věta 15.49 (o ortogonální bázi). *Nechť X je Hilbertův prostor, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ je ortogonální posloupnost. Potom jsou následující tři výroky ekvivalentní:*
(i) *$\{x_n\}$ je Schauderova báze prostoru X;*
(ii) *$\{x_n\}$ je úplný ortogonální systém v prostoru X;*
(iii) *$\{x_n\}$ je maximální ortogonální systém v prostoru X.*

Věta 15.50 (o bázi separabilního Hilbertova prostoru). *Každý separabilní Hilbertův prostor má (spočetnou) ortonormální Schauderovu bázi.*

Věta 15.51 (o bijekci na ℓ^2). *Nechť X je separabilní Hilbertův prostor a nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ je jeho ortonormální Schauderova báze. Potom zobrazení F, definované předpisem*

$$F : x \in X \mapsto \{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \textit{kde } c_n = \langle x, x_n \rangle,$$

je unitární (tj. zachovávající skalární součin) lineární bijekce prostoru X na prostor ℓ^2. Navíc inverzní zobrazení $F^{-1} : \ell^2 \to X$ splňuje

$$F^{-1}(\{c_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n.$$

Důsledek 15.52. *Každé dva separabilní Hilbertovy prostory jsou isometricky isomorfní.*

Věta 15.53 (Rieszova–Fischerova). *Nechť X je separabilní Hilbertův prostor a nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ je nějaký ortogonální systém. Nechť posloupnost reálných čísel $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|x_n\|^2 < \infty.$$

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konverguje v prostoru X a je Fourierovou řadou svého součtu.

Poznámka. Systém $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ v Rieszově–Fischerově větě nemusí být úplný.

Věta 15.54 (o konvergenci Fourierovy řady v separabilním Hilbertově prostoru)**.** *Nechť X je separabilní Hilbertův prostor, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ je ortogonální posloupnost nenulových prvků. Potom jsou následující tři výroky ekvivalentní:*

(i) *$\{x_n\}$ je úplný systém;*

(ii) *pro každý prvek $x \in X$ platí Parsevalova rovnost*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|x_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle x, x_n \rangle^2}{\|x_n\|^2};$$

(iii) *Fourierova řada každého prvku $x \in X$ konverguje v X a jejím součtem je tento prvek, jinými slovy*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n, \quad \textit{kde } c_n = \frac{\langle x, x_n \rangle}{\|x_n\|^2}.$$

15.4. **Fourierovy řady v $L^2([-\pi, \pi])$.**

Věta 15.55 (o bázi L^2)**.** *Trigonometrický systém $\mathcal{T}$ tvoří ortogonální Schauderovu bázi prostoru $L^2([-\pi, \pi])$.*

Věta 15.56 (Parsevalova rovnost v L^2)**.** *Nechť $f \in L^2([-\pi, \pi])$ a nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou její Fourierovy koeficienty. Potom platí*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Věta 15.57 (o konvergenci Fourierovy řady v L^2)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi} \cap L^2([-\pi, \pi])$ a nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou její Fourierovy koeficienty. Potom platí*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \qquad \text{ve smyslu konvergence v } L^2([-\pi, \pi]).$$

Věta 15.58 (Rieszova–Fischerova pro L^2)**.** *Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel splňující*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) < \infty.$$

Potom existuje $f \in \mathcal{P}_{2\pi} \cap L^2([-\pi, \pi])$ taková, že $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou její Fourierovy koeficienty. Navíc je tato funkce součtem své Fourierovy řady v prostoru $L^2([-\pi, \pi])$.

KONEC 13. PŘEDNÁŠKY (23.5. 2011), KONEC LETNÍHO SEMESTRU