

MATEMATICKÁ ANALÝZA 2B - CVIČENÍ

LUBOŠ PICK

OBSAH

12.	Obyčejné diferenciální rovnice	2
12.1.	ODR - základní rovnice, separace proměnných	2
12.2.	Homogenní rovnice	3
12.3.	Exaktní rovnice	3
12.4.	ODR - rovnice 1. řádu - příklady písemkové obtížnosti	4
12.5.	Obyčejné rovnice vyššího řádu	5
12.6.	Obyčejné diferenciální rovnice vyššího řádu - příklady písemkové obtížnosti	6
12.7.	Systémy lineárních rovnic 1. řádu	6
12.8.	Systémy lineárních rovnic 1. řádu - příklady písemkové obtížnosti	7
13.	Fourierovy řady	7
13.1.	Fourierovy řady - příklady písemkové obtížnosti	8

12. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

12.1. ODR - základní rovnice, separace proměnných.

Příklad 12.1. Uhodněte nějaká řešení následujících diferenciálních rovnic. Najdete všechna řešení?

$$y' = 0; \quad y' = 5; \quad y' = -3x; \quad y' = \sin(2x); \quad y' = -4y.$$

Příklad 12.2. Uhodněte partikulární řešení diferenciálních rovnic, která splňují příslušnou okrajovou podmínku:

$$y' = -3x, \quad y(2) = 4; \quad y' = -4y, \quad y(0) = 7.$$

Příklad 12.3. Zkuste najít některé obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' + \lambda^2 y = 0.$$

Nyní najděte partikulární řešení, které splňuje okrajové podmínky

$$y(0) = 4, \quad y'(0) = 3.$$

Příklad 12.4. Najděte všechna maximální řešení diferenciálních rovnic

$$y' = 1 + y^2; \quad y' = \sin x (y^2 + 2y + 1); \quad y' = \begin{cases} y \log^2(y), & y > 0, \\ 0 & y = 0. \end{cases}$$

Načrtněte integrální křivky řešení všech uvedených rovnic!

Příklad 12.5. Jestliže se potkají dvě řešení rovnice

$$y' = f(x, y),$$

kde f je spojitá funkce dvou proměnných, pak na sebe tato dvě řešení navazují hladce. Dokažte!

Rovnici

$$y' x = y \log y$$

řeší například funkce $y \equiv 1$ a $y = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Tato dvě řešení se potkávají v bodě $[0, 1]$, ale nenavazují na sebe hladce. Proč to není ve sporu se shora uvedeným tvrzením?

Příklad 12.6. Najděte maximální partikulární řešení diferenciální rovnice

$$y' \sin x = y \log y,$$

procházející bodem $[\frac{\pi}{2}, e]$ a načrtněte jeho graf. Jaký je maximální interval, na který lze toto řešení rozšířit?

Příklad 12.7. Najděte všechna maximální řešení diferenciálních rovnic

$$y' = 10^{x+y}; \quad y' - xy' = b(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1.$$

Načrtněte integrální křivky řešení!

Příklad 12.8. Primitivní *populační model* popisuje vývoj určité populace tak, že růst počtu jedinců P v čase t je přímo úměrný P , takže podle tohoto modelu je vývoj populace řízen diferenciální rovnicí

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

kde $k > 0$ je konstanta úměrnosti, závislá na typu populace, kterou studujeme. Dokažte, že pak

$$P(t) = Ae^{kt},$$

kde A je nějaká kladná konstanta daná počátečním stavem populace. Promyslete si sestavení a vyřešení obecné rovnice a pak spočítejte následující příklad.

Bakteriální kultura roste v čase t úměrně počtu jednotlivých bakterií $P = P(t)$. Na začátku je 500 bakterií, po jednom dni máme 800 bakterií. Bude jich po dalších 12 hodinách více než 1000? Vedla by lineární aproximace ke stejnému závěru?

Příklad 12.9. Podstatně lepší populační model než ten, který byl popsán v předcházejícím příkladu, bere v potaz tzv. *maximální kapacitu životního prostředí*. Ta je dána číslem N , což je nejvyšší možný počet členů dané populace, který se ještě v daném životním prostředí užívá. Ověřte si, že podle tohoto modelu je vývoj populace řízen diferenciální rovnicí

$$\frac{dP}{dt} = kP(N - P).$$

Dokažte, že vývoj stavu populace je pak dán funkcí

$$P(t) = \frac{kNe^{Nt}}{1 + ke^{Nt}},$$

kde k je konstanta úměrnosti. Vyřešte si obecnou rovnici a načrtněte její integrální křivky. Porovnejte s příkladem 12.8! Pak spočítejte následující příklad.

Na ostrov, který skýtá pastvu pro nejvýše 120 králíků, dorazilo 30 králíků. Po prvním roce jich zde žije již 80. Bude jich za další rok více než 100?

Příklad 12.10. Králík roste podle tzv. allometrického zákona

$$\frac{d}{dv} = k \frac{v}{v},$$

kde v označují šířku a výšku králíka a k je konstanta úměrnosti. Na začátku má králík šířku 5 cm a výšku 5 cm. Po nějaké době má králík 10 cm výšky a $5\sqrt{2}$ cm šířky. Králík má k dispozici noru o šířce 12 cm a výšce 24 cm. Určete, zda mu bude dřív úzká nebo nízká.

Příklad 12.11. Brouk Pytlík nemá rád teplotu nižší než 60 mravenčích stupňů. V 8 hodin ráno mravenci zatopí v peci, na níž Pytlík leží, na 110 stupňů, a odejdou do práce. Ve 13 hodin je teplota v místnosti 80 stupňů. Místnost vychládá rychlostí úměrnou rozdílu okamžité teploty v místnosti a venkovní teploty, která je stabilně rovna 20 stupňům. Vydrží Pytlík do 18 hodin, kdy se mravenci vrátí z práce a zatopí?

Příklad 12.12. Popište křivku v rovině, která prochází bodem $[2, 3]$ s následující vlastností: úsečka libovolné její tečny, vymezená průsečíky této tečny se souřadnými osami, se púli v bodě dotyku.

12.2. Homogenní rovnice.

Příklad 12.13. Má-li diferenciální rovnice tvar $y' = f(\frac{y}{x})$, lze ji převést substitucí $z = \frac{y}{x}$ na tvar

$$z'(x)x + z(x) = f(z),$$

což je rovnice se separovanými proměnnými.

Řešte diferenciální rovnice

$$xy' = y + x \sin^2\left(\frac{y}{x}\right), \quad xy' = \frac{y^2 + xy}{x}, \quad y' = \frac{y}{x} - 1, \quad xy' = y \log \frac{x}{y}, \quad x, y > 0.$$

Příklad 12.14. Řešte diferenciální rovnice

$$xy' = xe^{y/x} + y, \quad (x^2 + y^2) y' = 2xy.$$

Příklad 12.15. Řešte diferenciální rovnice

$$y' = \frac{y^2}{x^2} - 2, \quad y' = \frac{x + y}{x - y}, \quad y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

12.3. **Exaktní rovnice.** Má-li diferenciální rovnice tvar

$$(1) \quad h(x, y)y' + f(x, y) = 0$$

a existuje-li funkce dvou proměnných $u(x, y)$ taková, že

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = h(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y),$$

pak se taková rovnice nazývá *exaktní*.

Dosud jsme chápali u jako funkci dvou proměnných. Protože ale $y = y(x)$, můžeme chápat $u = u(x, y(x))$ jako funkci jedné proměnné (x). Pak ji derivujeme neparciálně, tj. $\frac{du}{dx}$. Povšimněme si, že exaktní rovnici (1) lze přepsat ve tvaru $\frac{du}{dx} = 0$ a že všechna řešení této rovnice jsou implicitně popsána pomocí křivek tvaru $u(x, y) = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Jak rozpoznat, zda je daná rovnice exaktní? Jsou-li funkce h a f spojitě, pak k tomu, aby rovnice (1) byla exaktní, musí platit

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Tento vztah lze považovat za test exaktnosti rovnice. Navíc jej lze snadno ověřit.

Jestliže je rovnice exaktní, jak najít funkci u ? Můžeme se například pokusit tuto funkci uhodnout. Pokud to nejde, můžeme funkci u získat integrací vztahů (2).

Příklad 12.16. Řešte diferenciální rovnice

$$(3) \quad y' (\log(\sin x) - 3y^2) + y \cotg x + 4x = 0, \quad y' + \frac{y}{2x} = \frac{1}{y};$$

$$(4) \quad y' (3x^2y^2 + e^y) + 2xy^3 + 2 = 0;$$

$$(5) \quad y' (x^2 \sin(xy) - 2y) + \cos(xy) - xy \sin(xy) = 0.$$

Jestliže rovnice není exaktní, můžeme ji někdy převést na exaktní tvar pomocí integračního faktoru. Rovnici (1) vynásobíme zatím neznámou funkcí φ . Aby byla tato nová rovnice exaktní, musí splnit test, tj. musí platit

$$\frac{\partial(h\varphi)}{\partial x} = \frac{\partial(f\varphi)}{\partial y},$$

tedy

$$(6) \quad \varphi \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi \frac{\partial f}{\partial y},$$

což je ale parciální diferenciální rovnice pro φ . To je úloha těžší než původní rovnice. Z tohoto důvodu většinou hledáme funkci φ závislou jen na jedné ze dvou proměnných. Pokud např. $\varphi = \varphi(x)$, pak je $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ a (6) získá tvar

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x} \right),$$

a to je již snadno řešitelná rovnice pro φ se separovanými proměnnými.

Příklad 12.17. Uvažujte diferenciální rovnici

$$y' (3xy = x^2) + y^2 - 6xy = 0.$$

Přesvědčte se, že rovnice není exaktní. Hledejte integrační faktor ve tvaru $\varphi = \varphi(y)$ a rovnici vyřešte.

12.4. ODR - rovnice 1. řádu - příklady písemkové obtížnosti.

Příklad 12.18. Najděte všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$xy' + y = y^2 \log x,$$

procházející bodem $[1, \frac{1}{3}]$, a určete jejich definiční obory.

Příklad 12.19. Nalezněte všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' + \frac{y}{\sin(\frac{x}{2})} = \frac{2x}{\operatorname{tg}(\frac{x}{4})} \sqrt{y},$$

procházející bodem $[\pi, \pi^4]$ a určete jejich definiční obory. Lze některé z těchto řešení navázat v některém bodě definičního oboru na řešení singulární? Je některé z těchto řešení na svém maximálním definičním oboru omezené?

Příklad 12.20. Najděte všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$xy' + \frac{y}{\log x} = y^3$$

a určete jejich definiční obory. Pak nelezte všechna maximální řešení procházející bodem $[e, 1]$, určete jejich definiční obory a rozhodněte, zda je některé z těchto řešení na svém definičním oboru omezené.

Příklad 12.21. Najděte všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' + 3xy = y^{\frac{1}{3}} e^{-(x+1)^2}$$

a určete jejich definiční obory. Je některé obecné maximální řešení této rovnice omezené na svém definičním oboru? Pak nalezněte všechna řešení této rovnice, procházející bodem $\left[0, -\left(\frac{1}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$.

Příklad 12.22. Najděte všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' - \frac{1}{3} (\cotg x) y = (\cos x)^2 y^4, \quad x \in (0, \pi),$$

a určete jejich definiční obory. Potom určete všechna řešení této rovnice, procházející bodem $[\frac{\pi}{2}, 2]$ a jejich definiční obory. Nabývá některé z nich někde na svém definičním oboru záporné hodnoty?

Příklad 12.23. Najděte všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$yy'x + y^2 = \frac{x}{1-x^3}, \quad x \in (1, \infty),$$

a určete jejich definiční obory. Potom určete všechna řešení této rovnice, procházející bodem $[\sqrt[3]{2}, 0]$ a jejich definiční obory. Je některé z těchto řešení na svém definičním oboru omezené?

Příklad 12.24. Najděte všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y'(1+x^2) \arctg x + 6xy \arctg x = \sqrt[3]{y^4}(1+x^2)$$

a určete jejich definiční obory.

Příklad 12.25. Najděte všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$xy' + 4y = 3xy^2$$

a určete jejich definiční obory. Potom určete všechna řešení této rovnice, procházející bodem $[2, -\frac{1}{14}]$ a jejich definiční obory. Je některé z těchto řešení na svém definičním oboru omezené?

Příklad 12.26. Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'x + y = \frac{1}{2(x^2 + 1)y}$$

a přesně popište jejich definiční obory. Spočítejte maximální řešení, procházející bodem $[x_0, y_0]$, kde $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\log 2}$ a popište jeho definiční obory.

12.5. Obyčejné rovnice vyššího řádu.

Příklad 12.27. U následujících diferenciálních rovnic nalezněte fundamentální systém řešení a uhodněte alespoň jedno partikulární řešení.

$$\begin{aligned}y'' - 5y' + 4y &= e^{3x}; \\y''' - y'' + y' - y &= \sin x; \\y'' - y &= e^x(x^2 + 1).\end{aligned}$$

Návod: Partikulární řešení hledejte po řadě ve tvaru $y = ae^{3x}$, $y = a \sin(x) + b \cos(x)$ a $y = ae^x x^2 + be^x x + ce^x$, dosadte do rovnice a dopočítejte reálné koeficienty a, b, c .

Příklad 12.28. U následujících diferenciálních rovnic nalezněte reálný fundamentální systém řešení a uhodněte partikulární řešení.

$$y'' + 4y = \cos(nx); \quad y''' - y = x^3 - 1.$$

Návod: Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y = a \sin(nx) + b \cos(nx)$, respektive ve tvaru $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, dosadte do rovnice a dopočítejte reálné koeficienty a, b, c, d .

Příklad 12.29. Zrekonstruujte nehomogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty, jestliže víte, že její fundamentální systém řešení je

$$[e^x, xe^x]; \quad [x, x^2].$$

Příklad 12.30. Metodou snižování řádu vyřešte rovnici

$$y''' = \frac{1}{4\sqrt{y}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = y''(0) = 1.$$

Návod: Položte $z = y'$.

Příklad 12.31. Nalezněte reálný fundamentální systém řešení následujících lineárních homogenních diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned}y^{(4)} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y &= 0; \\y^{(4)} + 2y''' + y'' &= 0; \\y'' + 4y' + 13y &= 0; \\y'' + y' - 2y &= 0.\end{aligned}$$

12.6. Obyčejné diferenciální rovnice vyššího řádu - příklady písemkové obtížnosti.

Příklad 12.32. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y^{(4)} - 3y'' + 2y = x^3 + \sin x.$$

Příklad 12.33. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = x \sin x.$$

Příklad 12.34. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 4y' + 4y = x^2 e^{-2x} + 5 \sin x.$$

Příklad 12.35. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 5y' + 6y = \sin(e^{-x}).$$

Příklad 12.36. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Příklad 12.37. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y^{(4)} + 2y''' + 2y'' = \sin x.$$

12.7. Systémy lineárních rovnic 1. řádu.

Příklad 12.38. Necht x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}x' &= 2x - y - z \\y' &= 2x - y - 2z \\z' &= 2z - x + y.\end{aligned}$$

Příklad 12.39. Necht x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}x' &= 3x - 2y - z \\y' &= 3x - 4y - 3z \\z' &= 2x - 4y.\end{aligned}$$

Příklad 12.40. Necht x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}x' &= 2x + 2z - y \\y' &= x + 2z \\z' &= y - x - z.\end{aligned}$$

Příklad 12.41. Necht x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}x' &= x - 2y - z \\y' &= y - x + z \\z' &= x - y.\end{aligned}$$

Příklad 12.42. Necht x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}x' &= 4x + 5y - 2z \\y' &= -2x - 2y + z \\z' &= -x - y + z.\end{aligned}$$

Příklad 12.43. Necht x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}x' &= x - y + z \\y' &= x + y - z \\z' &= 2z - y.\end{aligned}$$

Příklad 12.44. Necht x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}x' &= 2x + y \\y' &= 2y + 4z \\z' &= x - z.\end{aligned}$$

12.8. Systémy lineárních rovnic 1. řádu - příklady písemkové obtížnosti.

Příklad 12.45. Necht x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}x' &= 2x - 2y + z + e^t \\y' &= -x + 2y - z \\z' &= -2x + 3y - z,\end{aligned}$$

splňující počáteční podmínku $x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 0$.

Příklad 12.46. Necht x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}x' &= x + z \\y' &= -x + 2y + z \\z' &= -x + 3z,\end{aligned}$$

splňující počáteční podmínku $x(0) = 1, y(0) = 1, z(0) = 0$.

Příklad 12.47. Necht x a y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}x' &= x + 2y + e^t \\y' &= 2x + y + e^t,\end{aligned}$$

splňující počáteční podmínku $x(0) = 0, y(0) = 0$.

Příklad 12.48. Necht x a y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}x' &= x - z \\y' &= 2x + y - 2z \\z' &= 2x + y - 2z.\end{aligned}$$

(i) Nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy, splňující počáteční podmínku $x(0) = 1, y(0) = 1, z(0) = 1$.

(ii) Určete množinu všech $[x_0, y_0, z_0] \in \mathbb{R}^3$, pro která je maximální řešení uvedené soustavy (x, y, z) vyhovující podmínce $y(0) = [x_0, y_0, z_0]$ konstantní.

13. FOURIEROVY ŘADY

Příklad 13.1. Rozviňte funkci

$$f(x) := \arcsin \cos x, \quad x \in (-\pi, \pi],$$

do Fourierovy řady na \mathbb{R} . Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na \mathbb{R} , a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte číselné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Příklad 13.2. Rozviňte funkci

$$f(x) := \left| \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right|, \quad x \in \mathbb{R},$$

do Fourierovy řady. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na \mathbb{R} , a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte číselné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}.$$

Příklad 13.3. Rozviňte funkci

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in (-\pi, 0] \\ x^2, & x \in [0, \pi) \end{cases},$$

do Fourierovy řady. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na \mathbb{R} , a pokud ano, určete její součet.

Příklad 13.4. Necht $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Rozviňte funkci

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x, & x \in (-\pi, 0], \\ \beta x, & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

do Fourierovy řady na \mathbb{R} . Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na \mathbb{R} , a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte číselné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}.$$

Příklad 13.5. Necht $a \in \mathbb{R}$. Rozviňte funkci

$$f(x) := 1 - \sin(ax), \quad x \in (-\pi, \pi),$$

do Fourierovy řady na \mathbb{R} . Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na \mathbb{R} , a pokud ano, určete její součet.

Příklad 13.6. Rozviňte funkci

$$f(x) := \sin(3x) + 4x, \quad x \in (-\pi, \pi),$$

do Fourierovy řady na \mathbb{R} . Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na \mathbb{R} , a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin 2n}{n}.$$

Příklad 13.7. Necht $a \in \mathbb{Z}$. Rozviňte funkci

$$f(x) := \cos(ax), \quad x \in (0, \pi),$$

do *sinové* Fourierovy řady na \mathbb{R} . Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na \mathbb{R} , a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte číselné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2k-1)}{4-(2k-1)^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)^2}{(4-(2k-1)^2)^2},$$

Příklad 13.8. Rozviňte funkci

$$f(x) := \sin(x), \quad x \in (0, \pi),$$

do *cosinové* Fourierovy řady na \mathbb{R} . Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na \mathbb{R} , a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$$

13.1. Fourierovy řady - příklady písemkové obtížnosti.

Příklad 13.9. Necht funkce f je definována na intervalu $[-\pi, \pi)$ předpisem

$$f(x) := \begin{cases} x + \sin^3 x, & x \in (-\pi, 0], \\ \pi - x + \sin^3 x, & x \in (0, \pi), \end{cases}$$

a je dodefinována 2π -periodicky na celém \mathbb{R} . Spočtěte Fourierovu řadu funkce f a určete součet této řady pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 13.10. Necht funkce f je definována na intervalu $[-\pi, \pi)$ předpisem

$$f(x) := \begin{cases} \sin x \cos^2 x, & x \in (-\pi, 0], \\ x^2 + \sin x + \cos^2 x, & x \in (0, \pi), \end{cases}$$

a je dodefinována 2π -periodicky na celém \mathbb{R} . Spočtěte Fourierovu řadu funkce f a určete součet této řady pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 13.11. Nechť funkce f je definována na intervalu $[-\pi, \pi)$ předpisem

$$f(x) := \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

a je dodefinována 2π -periodicky na celém \mathbb{R} . Spočtěte Fourierovu řadu funkce f a určete součet této řady pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 13.12. Nechť funkce f je definována na \mathbb{R} předpisem

$$f(x) := \operatorname{sgn}(\sin(2x)) + \cos^3 x + \sin^3 x.$$

Spočtěte Fourierovu řadu funkce f a určete součet její Fejérový řady pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 13.13. Nechť funkce f je definována na intervalu $[-\pi, \pi)$ předpisem

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}), \\ x + \frac{\pi}{2}, & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0), \\ -x + \frac{\pi}{2}, & x \in [0, \frac{\pi}{2}), \\ 0, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi), \end{cases}$$

a je dodefinována 2π -periodicky na celém \mathbb{R} . Spočtěte Fourierovu řadu funkce f a určete součet této řady pro každé $x \in \mathbb{R}$.