POŽADAVKY KE ZKOUŠCE “MATEMATICKÁ ANALÝZA 2B”, LETNÍ SEMESTR 2010–2011

LUBOŠ PICK

Písemná část

Pro písemnou část zkoušky bylo vypsáno šest termínů, a to ve dnech 7.6., 15.6., 20.6., 23.6., 30.6. a 7.9. 2011, vždy od 8:45 hodin v posluchárně K1. Písemnou část zkoušky nelze vykonat mimo vypsané termíny. Toto pravidlo se týká i kombinovaných studentů. Žádné další termíny nebudou vypsány.

Studenti budou mít možnost se přihlašovat nebo odhlašovat do data předcházejícího datu zkoušky o jeden den, 00:00 hodin. Pokud se student z vážného důvodu nemůže dostavit na písemnou část zkoušky, na kterou byl přihlášen a omluví se examinátorům elektronickou poštou nejpozději v den konání zkoušky, neztratí termín.

V posluchárně K1 bude v době konání písemné části zkoušky vyvěšen zasedací pořádek. Prosíme studenty, aby se dostavili s dostatečným předstihem a zaujali svá místa podle zasedacího pořádku. Na začátku písemné části zkoušky bude provedena kontrola totožnosti studentů. Každý student se musí prokázat nějakým platným dokladem s fotografií (index, občanský průkaz, řidičský průkaz, cestovní pas, karta ISIC a podobně).

Písemná část zkoušky obsahuje čtyři příklady z následujících oblastí matematické analýzy:

- obyčejná diferenciální rovnice (15 bodů)
- lineární diferenciální rovnice (10 bodů)
- soustava lineárních diferenciálních rovnic (15 bodů)
- Fourierova řada (10 bodů)

Čas k vypracování písemné části je 150 minut. Běžné psací potřeby a veškeré písemné materiály jsou povoleny. Jakákoli technika (zejména kalkulačky, mobilní telefony apod.) je však zakázána.

K úspěšnému složení písemné části a k postupu k ústní části je třeba získat minimálně 28 bodů.

Odevzdané písemky budou opraveny během odpoledne v den konání písemné části zkoušky. Poté bude na tabuli předvedeno vzorové řešení (čas a posluchárna budou upřesněny po skončení písemné části v závislosti na počtu přítomných studentů). Účast může být užitečná i studentům, kteří se na písemnou část zkoušky teprve připravují. Po předvedení vzorového řešení bude studentům, kteří úspěšně

Date: 12. června 2011.

složili písemnou část zkoušky, přidělen čas, kdy se mají dostavit ke složení ústní části zkoušky. Ta se bude zpravidla konat v následující den, ve výjimečných případech ještě později. Přidělený čas bude pro studenta závazný, počítejte tedy s tím při plánování konání zkoušek.

Bude-li výkon studenta v ústní části zkoušky hodnocen jako nevyhovující, je student povinen znovu složit obě části zkoušky.

Ústní část zkoušky obsahuje šest otázek uspořádaných a hodnocených následujícím způsobem:

- definice klíčového pojmu z 1.-3. semestru (0 bodů)
- klíčová otázka (0 bodů)
- definice klíčového pojmu (0 bodů)
- formulace jedné věty a jedné definice (4+4 body)
- formulace a důkaz dvou „lehčích“ vět (2×12 bodů)
- formulace a důkaz „těžší“ věty (18 bodů).

K úspěšnému složení ústní části je třeba napsat správně definici obou klíčových pojmů, správně odpovědět na klíčovou otázku a ze zbývajících otázek získat celkem minimálně 30 bodů.

Uvedené body jsou ovšem pouze orientační a slouží jako pomůcka pro zkoušejícího, nelze na jejich základě vznášet žádné námitky proti výsledku zkoušky.

Po celou dobu ústní zkoušky platí, že student musí bezpečně ovládat veškeré klíčové pojmy, nejen ten, který si vylosuje. Prokáže-li se kdykoli během zkoušky, že student bezpečně neovládá kterýkoli z klíčových pojmů (včetně těch z 1.-3. semestru), bude zkouška hodnocena jako nevyhovující.

K celkovému hodnocení známkou **výborně** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a věty, znal důkazy lehkých i těžkých vět a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti ve více či méně jednoduchých teoretických příkladech. Orientačně známka “výborně” odpovídá přibližně 85 bodům.

K celkovému hodnocení známkou **velmi dobře** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a věty, znal důkazy lehkých vět a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti v jednoduchých teoretických příkladech. Může mít menší mezery v obtížnějších partiích. Orientačně známka “velmi dobře” odpovídá přibližně 75 bodům.

K celkovému hodnocení známkou **dobře** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a jednoduché věty a znal důkazy lehkých vět. Orientačně známka “dobře” odpovídá přibližně 60 bodům.

Hodnocení známkou **neprospěl/a** bude uplatněno, jestliže se během zkoušky prokáže, že student nezná některý z klíčových pojmů, neovládá věty nebo definice nebo není schopen dokázat ani nejjednodušší tvrzení. Orientačně hodnocení “neprospěl/a” odpovídá přibližně 55 a méně bodům.

SEZNAMY POŽADOVANÝCH VĚT, DEFINIC A KLÍČOVÝCH POJMŮ

Vybrané klíčové pojmy z 1.-3. semestru.

- prosté zobrazení, zobrazení na, bijektivní zobrazení, restrikce, složené zobrazení, obraz množiny, vzor množiny
- supremum, infimum (i v rozšířeném smyslu)
- limita posloupnosti (vlastní i nevlastní)
- konvergentní (divergentní) řada
- limita funkce v bodě včetně nevlastních bodů i nevlastních limit
- derivace reálné funkce v bodě
- primitivní funkce
- metrický prostor, metrika
- otevřená a uzavřená množina, vnitřek a uzávěr množiny
- konvergence a limita v metrickém prostoru
- kompaktní, sekvenciálně kompaktní a totálně omezená množina v metrickém prostoru
- spojité, stejnoměrně spojité a lipschitzovské zobrazení na metrickém prostoru
- derivace podle vektoru, parciální derivace, gradient, totální diferenciál
- omezené lineární zobrazení, norma zobrazení
- bodová, stejnoměrná a lokálně stejnoměrná konvergence posloupnosti a řady funkcí
- cauchyovská posloupnost v metrickém prostoru, úplný metrický prostor
- hustá a řídká množina, množina 1. a 2. kategorie, residuální množina
- Baireův prostor, Banachův prostor, separabilní metrický prostor

Klíčové otázky.

- Je množina racionálních čísel konečná, spočetná, kompaktní, otevřená, uzavřená, hustá, řídká, residuální, 1. kategorie v $(\mathbb{R}, \mathrm{eukl})$?
- Je množina iracionálních čísel konečná, spočetná, kompaktní, otevřená, uzavřená, hustá, řídká, residuální, 1. kategorie v $(\mathbb{R}, \mathrm{eukl})$?
- Platí implikace $\lim a_n = 0 \Rightarrow \sum a_n < \infty$? Platí implikace $\sum a_n < \infty \Rightarrow \lim a_n = 0$?
- Je každá omezená posloupnost reálných čísel konvergentní? Je každá konvergentní posloupnost reálných čísel omezená? Je každá konvergentní řada absolutně konvergentní? Je každá monotónní posloupnost reálných čísel konvergentní? Je každá konvergentní posloupnost reálných čísel monotónní?
- Je každá spojitá funkce na intervalu omezená? Je každá omezená funkce na intervalu spojitá? Je každá spojitá funkce na intervalu stejnoměrně spojitá?
- Má každá spojitá funkce na intervalu v každém bodě derivaci? Má -li funkce na intervalu v nějakém bodě vlastní derivaci, je potom v tomto

bodě spojitá? Má -li funkce na intervalu v nějakém bodě nevlastní derivaci, je potom v tomto bodě spojitá? Má -li funkce v nějakém bodě nulovou derivaci, má potom v tomto bodě nutně extrém? Má -li funkce v nějakém bodě extrém, má potom v tomto bodě nutně nulovou derivaci?
- Je každá spojitá funkce na intervalu darbouxovská? Je každá darbouxovská funkce na intervalu spojitá? Má každá spojitá funkce na otevřeném intervalu primitivní funkci? Má-li funkce na otevřeném intervalu primitivní funkci, je potom nutně spojitá? Má-li funkce na otevřeném intervalu primitivní funkci, je potom nutně darbouxovská?
- Je každá konečná množina v metrickém prostoru kompaktní? Je každá kompatní množina v metrickém prostoru konečná? Je interval $(0,1]$ kompaktní v $(\mathbb{R}, \mathrm{eukl})$? Je interval $[0,1]$ kompaktní v $(\mathbb{R}, \mathrm{eukl})$? Je interval $[0,1]$ kompaktní v $(\mathbb{R}, \mathrm{diskr})$?
- Je uzavřená jednotková koule v $(\mathbb{R}^n, \mathrm{eukl})$ kompaktní? Je uzavřená jednotková koule v $C([0,1], \varrho_{\mathrm{sup}})$ kompaktní? Je každá uzavřená a omezená množina v metrickém prostoru kompaktní? Je každá kompaktní množina v metrickém prostoru uzavřená a omezená?
- Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Které inkluze platí mezi třídami spojitých funkcí, stejnoměrně spojitých funkcí, absolutně spojitých funkcí, lipschitzovských funkcí a funkcí s konečnou variací?
- Tvoří množina všech trigonometrických polynomů uzavřenou, otevřenou, kompaktní, hustou množinu v $C([0,1], \varrho_{\mathrm{sup}})$?
- Může být v metrickém prostoru otevřená množina spočetná? Může být řídká množina nespočetná? Může být kompaktní množina nesouvislá? Může být kompaktní prostor neúplný? Jakou dimenzi může mít Banachův prostor?
- Která z následujících množin je hustá v $C([a,b])$: množina všech po částech lineárních funkcí, množina všech lipschitzovských funkcí, množina všech konstantních funkcí, množina všech polynomů, množina všech trigonometrických polynomů?
- Která z následujících množin je 1 kategorie: $(0,1)$, $[0,1]$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (všechny v $\mathbb{R}$), jednotková koule v $C[a,b]$, množina všech diferencovatelných funkcí v $C([a,b])$
- Který z následujících prostorů je separabilní (vzhledem k obvyklým metrikám, není-li uvedeno jinak): $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $C([a,b])$, $L^2([a,b])$, $(\mathbb{R}^n, \mathrm{diskr})$, ℓ^∞, $\ell^2([a,b])$, c_0? Který z uvedených prostorů je Hilbertův?
- Co můžeme říci o bodové nebo stejnoměrné konvergenci Fourierovy řady 2π-periodické funkce f na $\mathbb{R}$ mající konečný Lebesgueův integrál na $[0,2\pi]$? A je-li f navíc spojitá, monotónní, s konečnou variací, třídy C^1 na $[0,2\pi]$?

Seznam klíčových pojmů.

- obyčejná diferenciální rovnice, řešení, rozšíření, maximální řešení
- lineární obyčejná diferenciální rovnice řádu $n \in \mathbb{N}$, homogenní rovnice

- systém lineárních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu , homogenní systém
- fundamentální systém řešení homogenního systému lineárních obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu
- charakteristický polynom homogenní obyčejné diferenciální rovnice vyššího řádu a charakteristický polynom homogenního systému lineárních obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu
- duální prostor
- lokálně kompaktní metrický prostor
- totální variace, funkce s omezenou variací, absolutně spojitá funkce
- Lebesgueův bod funkce
- trigonometrická řada, trigonometrický polynom, trigonometrický systém
- Fourierovy koeficienty a Fourierova řada funkce (v $\mathbb{R}$ i v Hilbertově prostoru), sinová řada, cosinová řada
- skalární součin, unitární prostor, Hilbertův prostor
- ortogonální prvek, ortogonální a ortonormální systém, ortogonální doplněk
- součet řady v normovaném lineárním prostoru
- Schauderova báze v normovaném lineárním prostoru, úplný a maximální systém v unitárním prostoru

Seznam požadovaných definic.

- relativně kompaktní množina v metrickém prostoru
- stejně stejnoměrně spojitá množina v prostoru $C([0,1])$
- obyčejná diferenciální rovnice rozřešená vzhledem k nejvyšší derivaci
- Wronského determinant
- řetězec přidružených vektorů
- řádková úprava λ-matice
- ekvivalentní normy na normovaném lineárním prostoru
- Lebesgueova–Stieltjesova míra
- Dirichletovo jádro, Fejérovo jádro
- jednoduchá funkce

Seznam požadovaných vět.

Metrické prostory II.

- Arzélova–Ascoliova věta

Obyčejné diferenciální rovnice.

- Peanova věta (bez důkazu)
- Picardova věta pro 1. řád
- lemma o ekvivalenci obyčejné diferenciální rovnice a integrální rovnice
- lemma o lepení řešení obyčejné diferenciální rovnice

- o existenci a jednoznačnosti řešení obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu se separovanými proměnnými
- o existenci a jednoznačnosti řešení lineární obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu
- o globální existenci a jednoznačnosti řešení systému lineárních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu
- o tvaru prostoru řešení systému lineárních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu
- o wronskiánu a lineární závislosti řešení systému lineárních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu
- variace konstant pro systém lineárních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu
- fundamentální systém řešení lineární obyčejné diferenciální rovnice vyššího řádu s konstantními koeficienty
- fundamentální systém řešení systému lineárních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty v případě, kdy existuje báze $\mathbb{R}^n$ z vlastních vektorů (bez důkazu)
- o řešeních příslušných násobnému vlastnímu číslu s řetězci (bez důkazu)
- fundamentální systém řešení systému lineárních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty (bez důkazu)
- o speciálním tvaru pravé strany (bez důkazu)

Banachovy prostory.

- charakterizace omezených lineárních zobrazení
- o spojitosti normy
- o konečnědimenzionálních normovaných lineárních prostorech
- důsledky věty o konečnědimenzionálních normovaných lineárních prostorech

Vztah derivace a Lebesgueova integrálu.

- vztah omezené variace a monotonie
- vlastnosti funkcí s omezenou variací a funkcí absolutně spojitých
- charakterizace funkcí s omezenou variací
- charakterizace absolutně spojitých funkcí
- o Lebesgueových bodech (bez důkazu)
- vztah Lebesgueova integrálu a derivace
- vztah absolutní spojitosti a derivace
- vztah monotonie a derivace
- vztah omezené variace a derivace

Fourierovy řady.

- Fourierovy vzorce
- o částečných součtech Fourierovy řady

- Riemannovo–Lebesgueovo lemma
- Riemannova věta o lokalizaci
- Diniovo kritérium
- důsledky Diniova kritéria
- Fejérova věta
- Weierstrassova věta - trigonometrická verze
- Dirichletovo–Jordanovo kritérium konvergence Fourierových řad (bez důkazu)
- Cauchyova-Schwarzova nerovnost
- o tvaru koeficientů nekonečné řady v unitárním prostoru
- o součtu ortogonální řady
- Besselova nerovnost a Parsevalova rovnost
- o ortogonální bázi
- o bázi separabilního Hilbertova prostoru (bez důkazu)
- o bijekci na ℓ^2 a její důsledek
- Rieszova–Fischerova věta
- o konvergenci Fourierovy řady separabilním Hilbertově prostoru
- o bázi prostoru L^2 (bez důkazu)
- Parsevalova rovnost v L^2 (bez důkazu)
- o konvergenci Fourierovy řady v L^2 (bez důkazu)
- Rieszova–Fischerova věta pro L^2 (bez důkazu)

Vzor zadání zkušebních otázek – ústní část

1. Napište definici *klíčového pojmu z prvních tří semestrů*: limita posloupnosti (vlastní i nevlastní)

2. odpovězte na následující *klíčové otázky*: Která z následujících množin je hustá v $C([a,b])$: množina všech po částech lineárních funkcí, množina všech lipschitzovských funkcí, množina všech konstantních funkcí, množina všech polynomů, množina všech trigonometrických polynomů?

3. Napište definici *klíčového pojmu*: absolutně spojitá funkce

4. Napište definici pojmu: *Fejérovo jádro* a znění věty: *důsledky věty o konečnědimenzionálních normovaných lineárních prostorech.*

5. Zformulujte a dokažte věty: *lemma o lepení řešení obyčejné diferenciální rovnice*, *Diniovo kritérium.*

6. Zformulujte a dokažte větu: *Arzelova–Ascoliova věta.*

Příklad 1 Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{1 + y^4}{y \cos^2 x},$$

splňující počáteční podmínku $y(0) = 1$, a jejich definiční obory. **(15 bodů)**

Příklad 2 Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

a jejich definiční obory. **(10 bodů)**

Příklad 3 Nalezněte maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x - 2y + z + e^t \\ y' &= -x + 2y - z \\ z' &= -2x + 3y - z, \end{aligned}$$

splňující počáteční podmínku $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$. **(15 bodů)**

Příklad 4 Rozviňte funkci

$$f(x) = e^{-2x}, \quad x \in (0, \pi],$$

do *sinové* Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{4 + (2k+1)^2}.$$ **(10 bodů)**