PÍSEMNÁ ČÁST ZKOUŠKY Z MATEMATICKÉ ANALÝZY 2A, KÓD NMA003, ZIMNÍ SEMESTR 2010–2011, TEST F

LUBOŠ PICK

Příklad F1. Dokažte, že vztahy

$$\log(uy+1) + \operatorname{arccotg}\left(\frac{y}{x}\right) + \sin(\pi v x) = \log 2 + \operatorname{arccotg} 2$$
$$e^{vy} + \sqrt{2x+y^2} + u^2 v = 1 + \sqrt{2}$$

definují na okolí bodu $[x,y] = [\frac{1}{2}, 1]$ hladké funkce u, v proměnných x, y takové, že $u(\frac{1}{2}, 1) = 1$ a $v(\frac{1}{2}, 1) = 0$. Rozhodněte, zda existuje tečná rovina ke grafu funkce $u(x,y)$ v bodě $[x,y,u] = [\frac{1}{2}, 1, 1]$, a pokud ano, napište její rovnici. **(10 bodů)**

Příklad F2. Rozhodněte (a pečlivě zdůvodněte), zda existují globální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = y + zx$$

na množině

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ z^2 + x^2 \le y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$$

a pokud ano, najděte je. **(15 bodů)**

Příklad F3. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti

$$f_n(x) := \frac{\log\left(1 + \frac{\sqrt{x}}{n}\right)}{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}, \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in (0, \infty).$$

(15 bodů)

Příklad F4. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 4^n (\operatorname{arctg} x)^n \pi^{-n} \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{n}\right) \cos(\pi n).$$

Určete definiční obor a obor spojitosti funkce f. Rozhodněte, zda na svém definičním oboru řada konverguje stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně. **(10 bodů)**