MA2B 2010-2011 – TEST D

LUBOŠ PICK

Příklad D1. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{\sqrt{1-y^2}\arccos(y)}{1+x^2}.$$

Potom určete maximální řešení uvedené rovnice, splňující podmínku $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{e}\right)$. **(15 bodů)**

Příklad D2. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 5y' + 6y = \cos(e^x).$$

(10 bodů)

Příklad D3. Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$x' = x + 3y + e^{2t}$$
$$y' = 2x + 2y + e^{2t}$$

pro diferencovatelné funkce x, y proměnné t.

(i) Nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy.

(ii) Nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy, splňující počáteční podmínku $x(0) = -2$, $y(0) = \frac{3}{2}$.

(iii) Určete množinu všech $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$, pro která platí: tvoří-li dvojice funkcí x, y maximální řešení uvedené soustavy, vyhovující podmínce $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, potom jsou funkce $x(t)e^{-2t}$ a $y(t)e^{-2t}$ omezené na intervalu $t \in [0, \infty)$. **(15 bodů)**

Příklad D4. Nechť funkce f je pro $x \in [-\pi, \pi)$ definována předpisem

$$f(x) := \begin{cases} 5x + \cos 2x, & x \in [-\pi, 0), \\ -x, & x \in [0, \pi), \end{cases}$$

a je dodefinována 2π-periodicky na celém $\mathbb{R}$. Spočtěte Fourierovu řadu funkce f a vyšetřete, pro která $x \in \mathbb{R}$ tato řada konverguje bodově a v těchto bodech určete její součet. Nalezněte všechny maximální intervaly v $\mathbb{R}$, na kterých řada konverguje lokálně stejnoměrně. Všechna svá tvrzení podrobně zdůvodněte. **(10 bodů)**