PÍSEMNÁ ČÁST ZKOUŠKY Z MATEMATICKÉ ANALÝZY 2A, KÓD NMA003, ZIMNÍ SEMESTR 2010–2011, TEST C

LUBOŠ PICK

Příklad C1. Dokažte, že vztahy

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + \cos(u+v) - u &= 0 \\ \sin(xy) + \operatorname{arctg}(uv) + v &= 0 \end{aligned}$$

definují na jistém okolí bodu $[u,v,x,y] = [0,0,0,\pi]$ hladké funkce u, v proměnných x, y takové, že $u(0,\pi) = 0$ a $v(0,\pi) = 0$. Nechť $h = [-\frac{1}{2}, 7e]$. Rozhodněte, zda existuje $D_h v(0,\pi)$ a pokud ano, spočtěte ji. **(10 bodů)**

Příklad C2. Nechť funkce

$$f(x,y,z) := x - y + 2z$$

je definována na $\mathbb{R}^3$ a nechť je dána množina

$$M := \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ z \le 1,\ x^2+y^2+z^2 < 4\right\}.$$

Určete

$$\sup_{[x,y,z]\in M} f(x,y,z) \quad \text{a} \quad \inf_{[x,y,z]\in M} f(x,y,z)$$

a rozhodněte, zda funkce f těchto hodnot na množině M nabývá. **(15 bodů)**

Příklad C3. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti

$$f_n(x) := n^2 \log\left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right), \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

(15 bodů)

Příklad C4. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (\log x)^n \arccos\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

Určete definiční obor a obor spojitosti funkce f. Rozhodněte, zda na svém definičním oboru řada konverguje stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně. **(10 bodů)**