PÍSEMNÁ ČÁST ZKOUŠKY Z MATEMATICKÉ ANALÝZY 2A, KÓD NMA003, ZIMNÍ SEMESTR 2010–2011, TEST B

LUBOŠ PICK

Příklad B1. Dokažte, že vztahy

$$u = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \cos(\pi x y)$$
$$v = e^{x-y} - 2x^2 y$$

definují na okolí bodu $[u,v] = [\frac{\pi}{2}+1, -1]$ hladké funkce x, y proměnných u, v takové, že $x(\frac{\pi}{2}+1,-1) = 1$ a $y(\frac{\pi}{2}+1,-1) = 1$. Je-li navíc $z(x,y) := \log(x^2+y^2)$, spočtěte $\frac{\partial z}{\partial u}(\frac{\pi}{2}+1,-1)$. **(10 bodů)**

Příklad B2. Najděte všechny globální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^3 - y^2 + 1$$

na množině $M := \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ 4x^2 + y^2 \le 4\right\}$. Zdůvodněte existenci globálních extrémů. **(15 bodů)**

Příklad B3. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti

$$f_n(x) := \frac{e^{\frac{x+1}{\sqrt{n}}} - 1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}, \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}.$$

(15 bodů)

Příklad B4. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos\left(\frac{n\pi - 2x}{2n}\right), \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Rozhodněte, zda řada konverguje na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ stejnoměrně, lokálně stejnoměrně nebo bodově. Rozhodněte, zda existuje $f'(0)$ a pokud ano, spočtěte ji. **(10 bodů)**